
**ФИЗИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА
КРИСТАЛЛОВ**

УДК 534-16+534.242

К 70-летию Института кристаллографии РАН

**ВОЗБУЖДЕНИЕ ИНТЕНСИВНЫХ АКУСТИЧЕСКИХ ВОЛН
В ГЕКСАГОНАЛЬНЫХ КРИСТАЛЛАХ**

© 2013 г. В. И. Альшиц, Д. А. Бессонов, В. Н. Любимов

Институт кристаллографии РАН, Москва

E-mail: alshits@ns.crys.ras.ru

Поступила в редакцию 10.06.2013 г.

Описано резонансное возбуждение интенсивной упругой волны с помощью отражения от свободной поверхности гексагонального кристалла волны накачки. Резонанс возникает при специальном выборе геометрии распространения, когда отражающая граница немного отклонена от симметричной ориентации, а интенсивная отраженная волна близка к направлению распространения особой объемной моды, удовлетворяющей условию свободной границы в невозмущенной симметричной ориентации. Показано, что в кристаллах с упругими модулями $c_{44} > c_{66}$ резонанс возникает при выборе исходной границы, параллельной гексагональной оси b , а в кристаллах с модулями $c_{44} < c_{66}$ — когда исходная граница ортогональна этой оси. Доля энергии волны накачки, попадающая в возбуждаемый пучок, зависит от конкретных соотношений между модулями упругости и может быть весьма значительной при специальном подборе кристаллов. Приведены примеры кристаллов, в которых при достаточно высоких частотах можно повысить интенсивность пучка в 5–10 раз, сохранив его расходимость на приемлемом уровне.

DOI: 10.7868/S0023476113060040

ВВЕДЕНИЕ

Узкие ультразвуковые пучки высокой интенсивности широко применяются в технике, медицине, научном приборостроении и т.д. В [1] описана возможность создания таких пучков в кристаллах с использованием особенности анизотропии их упругих свойств. Как сам принцип возбуждения, так и теория [1] применимы в самом общем случае произвольной анизотропии. Однако для оптимизации эффекта выбор кристалла должен осуществляться исходя из определенных критериев, зависящих не только от симметрии и геометрии распространения, но и от конкретных значений упругих модулей.

Речь идет о резонансном возбуждении акустических полей с помощью отражения специальной волны накачки, подобранной так, чтобы одна из отраженных волн распространялась в окрестности направления, допускающего существование собственной особой объемной волны в кристалле, удовлетворяющей условию свободной границы. Согласно [2], в любом кристалле можно выбрать такой срез поверхности с нормалью \mathbf{n}_0 и такое направление \mathbf{m}_0 вдоль границы, которые допускают распространение подобной волны. Более того, при определенном согласованном непрерывном изменении ориентации ортогональной пары $\{\mathbf{m}_0, \mathbf{n}_0\}$ решение для такой собственной волны должно сохраняться. Вектор поляризации \mathbf{A} особой объемной волны и ее поток энергии \mathbf{P} всегда параллельны плоскости границы кристалла.

Рассмотрим случай, когда собственная волна принадлежит промежуточной полости поверхности медленности. При этом, согласно [1], в той же сагиттальной плоскости $\{\mathbf{m}_0, \mathbf{n}_0\}$ и при такой же приведенной фазовой скорости стационарного перемещения волнового поля вдоль поверхности должно существовать независимое отражение, в котором имеются только две объемные компоненты, падающая и отраженная, принадлежащие внешней полости поверхности медленности.

При несогласованном возмущении выделенной геометрии распространения $\{\mathbf{m}_0, \mathbf{n}_0\}$ решения для особой объемной волны и для специального отражения исчезают. Вместо них появляется объединенная волновая суперпозиция, в которую бывшая собственная волна с промежуточной полостью поверхности входит как дополнительная отраженная компонента. Нарушение ею граничного условия свободной поверхности при малом возмущении геометрии будет малым, следовательно, компенсация нарушения за счет остальных парциальных волн задачи отражения может быть обеспечена при весьма малых амплитудах этих волн. Возникает искомое резонансное отражение, в котором слабая падающая волна возбуждает интенсивную отраженную компоненту, распространяющуюся вблизи поверхности [1].

В [1] возмущением, искажающим исходную геометрию распространения, был выбран малый поворот сагиттальной плоскости $\{\mathbf{m}_0, \mathbf{n}_0\}$ вокруг нормали \mathbf{n}_0 . Отражающая граница кристалла

оставалась неизменной. В качестве примера, иллюстрирующего общую теорию, в [1] рассматривался гексагональный кристалл с поверхностью, параллельной главной оси симметрии z .

В настоящей работе резонанс в гексагональном кристалле рассмотрен при другом возмущении симметричной картины распространения – повороте исходной поверхности вокруг вектора \mathbf{m}_0 . При этом сагиттальная плоскость, всегда ортогональная границе, тоже автоматически претерпевает соответствующее слабое изменение ориентации. Будут проанализированы ориентации, когда исходная граница параллельна гексагональной оси и когда она перпендикулярна данной оси. В первом случае резонанс возможен только в кристаллах с модулями упругости c_{44} и c_{66} , удовлетворяющими соотношению $c_{44} > c_{66}$, а во втором случае – только при обратном соотношении модулей $c_{44} < c_{66}$.

Первый вариант отличается от варианта [1] новым типом возмущения. Условия оптимизации параметров резонанса при этом существенно отличаются от условий, найденных в [1]. Второй вариант принципиально возможен только при новом типе возмущения. Поскольку граница является плоскостью поперечной изотропии, поворот сагиттальной плоскости вокруг нормали к поверхности (как в [1]) фактически сохраняет исходную геометрию распространения.

По той же причине рассматриваемый резонанс не возникает в изотропных средах. На их свободных границах также существуют особые объемные волны (*SH-моды*), однако они сохраняются и при изменении ориентации поверхности, и при вариациях направления распространения. Никакой связи с волнами других поляризаций изотропия не допускает.

Тем не менее развиваемая теория относится не только к кристаллам. Она полностью применима и к текстурам, которые по своим упругим свойствам ничем не отличаются от гексагональных кристаллов, обладая той же поперечной изотропией [3].

ИСХОДНАЯ ПОВЕРХНОСТЬ ПАРАЛЛЕЛЬНА ГЕКСАГОНАЛЬНОЙ ОСИ

Невозмущенные волновые решения. Рассмотрим полубесконечную поперечно-изотропную упругую среду плотности ρ с поверхностью, параллельной главной оси симметрии (z), и сагиттальной плоскостью (xz), перпендикулярной этой оси. Симметрию среды отражает поверхность медленности – трехлопастная поверхность обратных скоростей объемных упругих волн [3]. Сечения этой волновой поверхности исходными граничной и сагиттальной плоскостями пред-

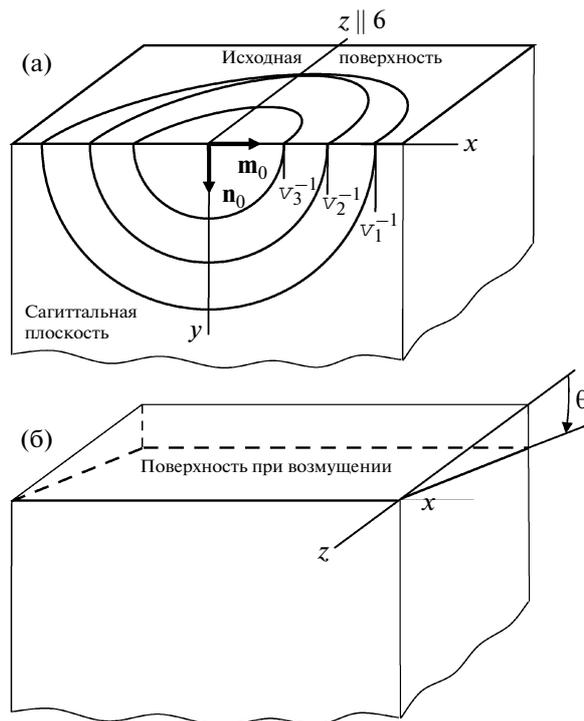


Рис. 1. Ориентации поверхности и сагиттальной плоскости кристалла: а – невозмущенная конфигурация и сечения поверхности медленности, б – поверхность выведена из симметричной ориентации в результате малого поворота вокруг оси x на угол θ .

ставлены на рис. 1а. Показанные на рисунке скорости

$$v_1 = \sqrt{c_{66}/\rho}, \quad v_2 = \sqrt{c_{44}/\rho}, \quad v_3 = \sqrt{c_{11}/\rho}, \quad (1)$$

$$v_1 < v_2 < v_3$$

отвечают скоростям распространения трех изонормальных объемных волн в базисной плоскости (xz) такой же безграничной среды. В этом разделе рассматриваются кристаллы, в которых $c_{66} < c_{44} < c_{11}$. В силу условий устойчивости [3] в поперечно-изотропных средах всегда $c_{11} > c_{66}$. Что касается модуля c_{44} , то обычно $c_{11} > c_{44}$, хотя противоположный знак этого неравенства также не противоречит условиям устойчивости.

На рассматриваемой свободной поверхности кристалла xz с нормалью $\mathbf{n}_0 = (0, 1, 0) \parallel y$ вдоль волновой нормали $\mathbf{m}_0 = (1, 0, 0) \parallel x$ может распространяться особая объемная волна, удовлетворяющая граничному условию свободной поверхности. Ее поле упругих смещений представим в виде

$$\mathbf{u}_0^{\text{ex}}(x, t) = C^{\text{ex}} \mathbf{A}^{\text{ex}} \exp[ik(x - v_2 t)], \quad (2)$$

$$\mathbf{A}^{\text{ex}} = (0, 0, 1) \parallel z, \quad \mathbf{k}_0^{\text{ex}} = k \mathbf{m}_0.$$

Здесь C^{ex} – скалярная амплитуда, \mathbf{A}^{ex} – вектор поляризации, \mathbf{k}_0^{ex} – волновой вектор. Данная особая волна с частотой ω и скоростью $v_2 = \omega/k$ (1), распространяющаяся в симметричном направле-

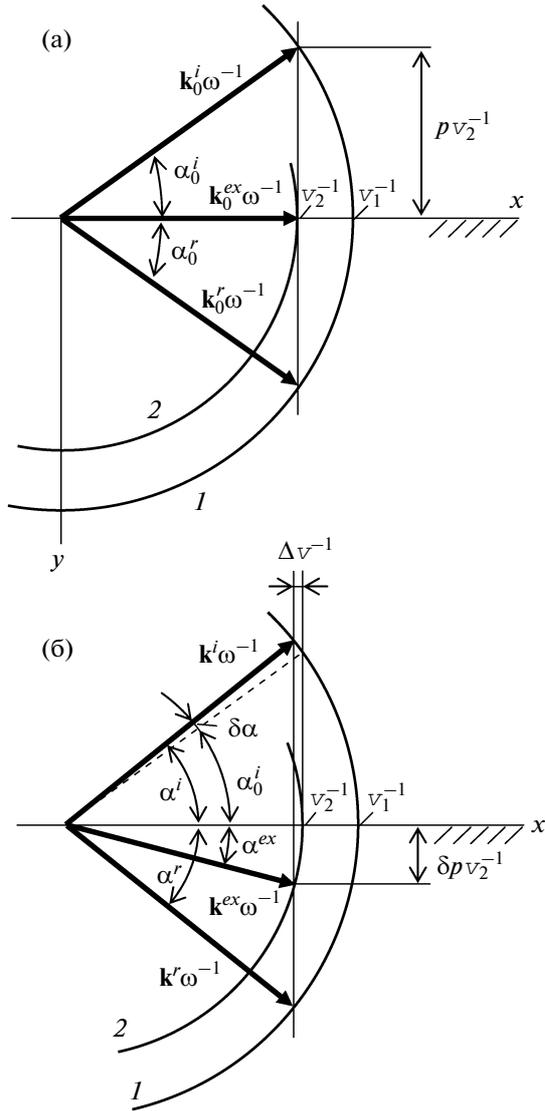


Рис. 2. Фрагменты внешних полостей (1, 2) поверхности медленности в ее сечении сагиттальной плоскостью и схема отражений: а – сосуществующие особая объемная волна и специальное отражение (невозмущенная геометрия распространения); б – резонансное отражение при возмущении.

нии – вдоль линии пересечения двух плоскостей симметрии xz и xy , имеет поток энергии строго вдоль направления волнового вектора.

Независимо от волны \mathbf{u}_0^{ex} (2) при той же скорости v_2 в плоскости xu существует трехпарциальное отражение. Его формируют падающая (\mathbf{u}_0^i) и отраженная (\mathbf{u}_0^r) волны, а также волна, локализованная у границы (\mathbf{u}_0^l):

$$\mathbf{u}^{ref}(x, y, t) = [C^i \mathbf{u}_0^i(y) + C^r \mathbf{u}_0^r(y) + C^l \mathbf{u}_0^l(y)] \exp[ik(x - v_2 t)]. \quad (3)$$

Конкретизируя выражения для входящих сюда парциальных волн, имеем

$$\mathbf{u}^{i,r}(y) = C^{i,r} \mathbf{A}^{i,r} \exp(\mp i k p y), \quad \mathbf{A}^{i,r} \approx (\pm p, 1, 0) \sqrt{c_{66}/c_{44}}, \quad (4)$$

$$\mathbf{k}^{i,r} = (\mathbf{m}_0 \mp p \mathbf{n}_0) k, \quad p = \sqrt{\Delta_{46}/c_{66}};$$

$$\mathbf{u}^l(y) = C^l \mathbf{A}^l \exp(-k q y), \quad \mathbf{A}^l \approx (1, i q, 0) \sqrt{c_{11}/c_{44}}, \quad (5)$$

$$\mathbf{k}^l = (\mathbf{m}_0 + i q \mathbf{n}_0) k, \quad q = \sqrt{\Delta_{14}/c_{11}}.$$

Здесь введено обозначение $\Delta_{\alpha\beta} = c_{\alpha\alpha} - c_{\beta\beta}$.

Структура волнового поля при резонансном отражении. Для реализации резонансного отражения, одна из отраженных компонент которого обладает высокой интенсивностью, необходимо слегка изменить исходную выделенную геометрию распространения (рис. 1а), чтобы найденные выше независимые решения для особой объемной волны (2) и трехпарциального отражения (3) интегрировались в смешанную резонансную комбинацию. В [1] та же исходная геометрия возмущалась малым поворотом сагиттальной плоскости вокруг нормали к поверхности \mathbf{n}_0 . Здесь в качестве альтернативы рассмотрим возмущение ориентации поверхности. Поворот граничной плоскости xz вокруг направления главной оси симметрии z (единственный вариант, при котором сагиттальная плоскость остается неизменной) ничего не меняет в исходной геометрии задачи в силу поперечной изотропии рассматриваемой среды, а потому не возмущает и решений (2) и (3). В связи с этим необходимо поворачивать поверхность вместе с сагиттальной плоскостью. Наиболее простой вариант возмущения сводится к малому повороту поверхности кристалла вокруг оси x на угол θ (рис. 1б):

$$\mathbf{n}_0 \rightarrow \mathbf{n} = (0, 1, \theta). \quad (6)$$

При возмущении волновые решения $\mathbf{u}_0^{ex}(x, t)$ (2) и $\mathbf{u}^{ref}(x, y, t)$ (3) трансформируются и перестают быть независимыми. Общее волновое поле теперь – суперпозиция этих измененных решений:

$$\mathbf{u}(x, y, z, t) = [C^{ex} \mathbf{u}^{ex}(y) + C^i \mathbf{u}^i(y, z) + C^r \mathbf{u}^r(y, z) + C^l \mathbf{u}^l(y, z)] \exp[ik(x - vt)]. \quad (7)$$

Здесь также предполагается, что возмущение включает в себя не только изменение волновой геометрии, но и отклонение скорости v от своего исходного значения v_2 , т.е. $v = v_2 + \Delta v$, $\Delta v > 0$ (рис. 2).

В возмущенной волновой суперпозиции (7) появилась новая отраженная компонента

$$\mathbf{u}^{ex}(y) = \mathbf{A}^{ex} \exp(i \delta p k y), \quad (8)$$

которая является интенсивной возбуждаемой волной — продуктом резонанса. Поляризация этой компоненты \mathbf{A}^{ex} в развиваемой теории возмущений определяется выражением (2), а ее волновой вектор изменяет свой наклон:

$$\mathbf{k}^{\text{ex}} = k(\mathbf{m}_0 + \mathbf{n}\delta p), \quad \delta p = \sqrt{2\Delta v/v_2}. \quad (9)$$

Для остальных компонент $\mathbf{u}^{i,r,l}$ суперпозиции (7) имеем

$$\mathbf{u}^{i,r}(y, z) = C^{i,r} \mathbf{A}^{i,r} \exp[\mp i k p (y + \theta z)], \quad (10)$$

$$\mathbf{k}^{i,r} = (\mathbf{m}_0 \mp \mathbf{p}\mathbf{n})k;$$

$$\mathbf{u}^l(y, z) = C^l \mathbf{A}^l \exp[-kq(y + \theta z)],$$

$$\mathbf{A}^l \approx (1, iq, i\theta d/c_{11}q)\sqrt{c_{11}/c_{44}}, \quad (11)$$

$$\mathbf{k}^l = (\mathbf{m}_0 + i\mathbf{q}\mathbf{n})k, \quad d = c_{13} + c_{44}.$$

В (10) векторы $\mathbf{A}^{i,r}$ в принятом приближении задаются теми же выражениями, что и в (4).

Общая схема резонансного отражения для данной геометрии представлена на рис. 2, где показаны волновые векторы объемных парциальных волн, участвующих в резонансном отражении, т.е. падающей (\mathbf{k}^i) и двух отраженных (\mathbf{k}^{ex} и \mathbf{k}^r) волн (комплексный волновой вектор \mathbf{k}^l локализованной у границы парциальной волны на рисунке показан быть не может). На рис. 2б также показаны угол падения волны накачки α^i и углы отражения α^{ex} и α^r соответствующих отраженных парциальных волн.

Рассматриваемое возмущенное отражение характеризуется изменением приведенной фазовой скорости $v = v_2 + \Delta v$, а значит, и угла падения волны накачки $\alpha_0^i \rightarrow \alpha^i = \alpha_0^i + \delta\alpha$ (рис. 2б). Нетрудно показать [1], что связь между этими приращениями имеет вид

$$\delta\alpha = \frac{v_1 \Delta v}{v_2^2 \sin \alpha_0^i} = \frac{(\delta p)^2}{2p_0}. \quad (12)$$

Резонансные характеристики отражения. Следуя [1], введем коэффициент возбуждения волны \mathbf{u}^{ex} как отношение плотности потока энергии в ней к плотности потока энергии падающей волны накачки:

$$K^{\text{ex}}(\theta^2, \delta p) = \frac{|\mathbf{P}^{\text{ex}}|}{|\mathbf{P}^i|} = \frac{|C^{\text{ex}}|^2 s^{\text{ex}}}{|C^i|^2 s^i} \approx \frac{\mu^2 (s^{\text{ex}}/s^i) \theta^2}{(\theta^2 + \lambda' \delta p)^2 + (\lambda'' \delta p)^2}. \quad (13)$$

Здесь s^{ex} и s^i — лучевые скорости соответствующих волн. Из-за симметрии невозмущенной геометрии распространения они близки к соответствующим фазовым скоростям тех же волн, а их отношение оценивается как

$$\frac{s^{\text{ex}}}{s^i} \approx \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{c_{44}}{c_{66}}}. \quad (14)$$

Кроме того, в (13) введены параметры

$$\mu^2 = \frac{4c_{66}}{c_{44}} \left(2 \frac{c_{66}}{c_{44}} - 1 \right)^2, \quad (15)$$

$$\lambda' = \frac{1}{p} \left(2 \frac{c_{66}}{c_{44}} - 1 \right)^2, \quad \lambda'' = \frac{4c_{66}^2 q}{c_{44}^2}.$$

Аналогичный коэффициент возбуждения волны “утечки” \mathbf{u}^r в тех же терминах равен

$$K^r(\theta^2, \delta p) = \frac{|\mathbf{P}^r|}{|\mathbf{P}^i|} = \frac{|C^r|^2}{|C^i|^2} \approx \frac{(\theta^2 - \lambda' \delta p)^2 + (\lambda'' \delta p)^2}{(\theta^2 + \lambda' \delta p)^2 + (\lambda'' \delta p)^2}. \quad (16)$$

Этот коэффициент характеризует степень потери энергии из волны накачки, отраженной по нерезонансному каналу. Оставшаяся часть энергии этой волны идет на возбуждение объемной волны \mathbf{u}^{ex} , которая и представляет главный интерес. Доля энергии, попадающей в интенсивный пучок, определяется выражением

$$\eta(\theta^2, \delta p) = 1 - K^r(\theta^2, \delta p) \approx \frac{4\lambda' \theta^2 \delta p}{(\theta^2 + \lambda' \delta p)^2 + (\lambda'' \delta p)^2}. \quad (17)$$

Величины K^{ex} и η — основные характеристики эффективности резонанса.

Экстремальные параметры резонанса. Коэффициенты K^{ex} , K^r и η как функции параметров θ и δp экстремальны на линии

$$\theta_{\text{max}}^2 = \lambda \delta p_{\text{max}}, \quad \lambda = \sqrt{(\lambda')^2 + (\lambda'')^2}. \quad (18)$$

Поскольку, согласно (12),

$$(\delta p)^2 = 2p_0 \delta\alpha, \quad (19)$$

из уравнения (18) вытекает

$$\delta\alpha \sim \theta_{\text{max}}^4. \quad (20)$$

Поэтому на линии (18) малые параметры θ_{max} и $\delta\alpha$ имеют разный порядок величины: $\delta\alpha \ll \theta_{\text{max}}$, а экстремальные значения параметров K^{ex} , K^r и η имеют вид

$$K_{\text{max}}^{\text{ex}} = \frac{1}{\theta_{\text{max}}^2} \left(\frac{\mu^2/2}{\lambda'/\lambda + 1} \right) \frac{s^{\text{ex}}}{s^i}, \quad (21)$$

$$K_{\text{min}}^r = \frac{\lambda - \lambda'}{\lambda + \lambda'}, \quad \eta_{\text{max}} = 1 - K_{\text{min}}^r = \frac{2}{\lambda/\lambda' + 1}.$$

Как видно из (21), чем ближе параметр λ к величине λ' , тем меньше параметр K_{min}^r и тем больше параметры $K_{\text{max}}^{\text{ex}}$ и η_{max} . Близость параметров λ (18) и λ' (15) возникает при малых значениях отношения λ''/λ' . В этом случае

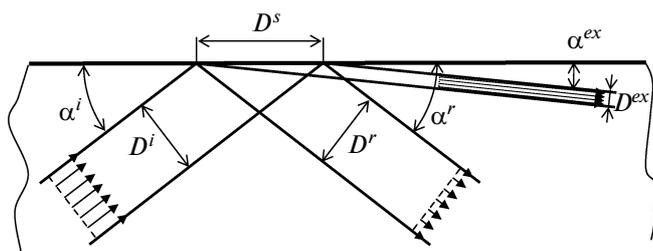


Рис. 3. Схема резонансного возбуждения интенсивного пучка объемных волн. Отдельные стрелки изображают векторы Пойнтинга в падающей и отраженных пучках.

$$K_{\min}^r \approx \left(\frac{\lambda''}{2\lambda'} \right)^2 = \frac{4\Delta_{14}\Delta_{46}c_{66}^3}{c_{11}(2c_{66} - c_{44})^4}. \quad (22)$$

Таким образом, наибольшая эффективность резонанса возможна в кристаллах с достаточно малой комбинацией модулей упругости в числителе (22). Например, если $c_{11} = c_{44}$, когда $q = \lambda'' = 0$, имеем $K_{\min}^r = 0$ и $\eta_{\max} = 1$. В этом случае вся энергия волны накачки идет на возбуждение волны \mathbf{u}^{ex} , отраженная волна утечки \mathbf{u}^r исчезает – возникает конверсия.

Полуширину резонансного пика по параметру возмущения θ^2 найдем из условия

$$(1/2)K_{\max}^{\text{ex}}(\delta p_{\max}) = K^{\text{ex}}(\theta_{1/2}^2, \delta p_{\max}), \quad (23)$$

которое с учетом (18) приводит к результату

$$\theta_{1/2}^2 = 2\theta_{\max}^2 \sqrt{3 + 4\lambda'/\lambda + (\lambda'/\lambda)^2}. \quad (24)$$

Отметим, что при рассматриваемой исходной геометрии распространения, но при ином возмущении – повороте сагиттальной плоскости, конверсия ($\eta_{\max} = 1$, $K_{\min}^r = 0$) наступает при условии $c_{44} = 2c_{66}$ [1]. Однако при введенном здесь возмущении – повороте поверхности кристалла – такое условие полностью ликвидирует резонанс. В самом деле, при данном условии $\lambda' = 0$ (15), а это приводит к тому, что $\mu^2 = 0$, следовательно, $K^{\text{ex}} = 0$ (13). Более того, согласно (21), при этом $\eta_{\max} = 0$, $K_{\min}^r = 1$. Другими словами те условия, которые в [1] обеспечивали максимум эффективности резонанса, в рассматриваемом случае приводят к противоположному результату, полностью блокируя резонанс.

Баланс потоков энергии. Переходя от отражения плоских объемных волн к отражению ограниченных пучков (рис. 3), запишем закон сохранения энергии – равенство потока энергии в падающем пучке волны накачки сумме потоков

энергии в двух отраженных пучках объемных волн:

$$|\mathbf{P}^i|D^i = |\mathbf{P}^r|D^r + |\mathbf{P}^{\text{ex}}|D^{\text{ex}}. \quad (25)$$

Здесь D^i , D^r , D^{ex} – ширины соответствующих пучков. В силу симметрии геометрии распространения пучки падающей i и отраженной r волн имеют одинаковые ширины и составляют одинаковые углы с поверхностью:

$$D^i = D^r, \quad \alpha^i = \alpha^r. \quad (26)$$

Возбуждаемый узкий пучок имеет ширину

$$D^{\text{ex}} = D^s \delta p, \quad D^s = D^i / \sin \alpha^i, \quad (27)$$

где D^s – ширина пятна, возникающего на поверхности кристалла (рис. 3). В результате баланс потоков энергии (25) сводится к тождеству

$$1 - K^r = K^{\text{ex}} \delta p / \sin \alpha^i, \quad (28)$$

справедливость которого вытекает из выражений для K^{ex} (13) и η (17).

Из рассуждения становится ясно, что резонанс никак не противоречит закону сохранения энергии. Речь идет не об увеличении энергии в пучке, а о повышении ее плотности путем сжатия поперечного размера пучка. При этом из формулы (21) для амплитуды коэффициента усиления K_{\max}^{ex} этой плотности возникает иллюзия возможности неограниченного роста этой амплитуды по мере уменьшения возмущающего угла θ . К сожалению, это не так. Из (24) видно, что по мере уменьшения этого угла происходит пропорциональное сжатие ширины пика $K_{\max}^{\text{ex}}(\theta^2, \delta p)$, как по θ , так и по δp (18), а значит и по углам падения $\delta\alpha$ (12). Как только ширина $\delta\alpha_{1/2}$ станет меньше угла $\delta\psi_i$ естественной расходимости падающего пучка, резонанс начнет “расплываться”. При $\delta\alpha_{1/2} \ll \delta\psi_i$, когда большая часть волновой суперпозиции в пучке окажется вне резонансной области, обсуждаемый механизм интенсификации перестанет работать. Таким образом, дифракционная расходимость падающего пучка задает физический предел уменьшению угла θ , а значит, и амплитуде коэффициента усиления K_{\max}^{ex} (21). Согласно [1], при оптимальных условиях можно рассчитывать на получение усиления $K_{\max}^{\text{ex}} \sim 5-10$. Ниже критерии оптимизации обсуждаются более подробно.

ИСХОДНАЯ ПОВЕРХНОСТЬ ОРТОГОНАЛЬНА ГЕКСАГОНАЛЬНОЙ ОСИ

Новая геометрия распространения. Если на рис. 1а поменять местами поверхность и сагиттальную плоскость, то придем к случаю, рассматриваемому далее. Исходная поверхность ортого-

нальна главной оси симметрии и является плоскостью поперечной изотропии (рис. 4).

Объемная волна (2), поляризованная вдоль гексагональной оси z (т.е. ортогонально новой границе кристалла), теперь не может удовлетворять условию свободной поверхности и более не является собственным решением граничной задачи. Зато этим свойством в рассматриваемой геометрии распространения (рис. 4) обладает другая объемная волна:

$$\mathbf{u}_0^{\text{ex}}(x, t) = C^{\text{ex}} \mathbf{A}^{\text{ex}} \exp[ik(x - v_1 t)], \quad (29)$$

$$\mathbf{A}^{\text{ex}} = (0, 1, 0) \parallel y, \quad \mathbf{k}_0^{\text{ex}} = k \mathbf{m}_0,$$

распространяющаяся в том же направлении x со скоростью v_1 (1) и поляризацией вдоль y . Для существования резонансного отражения необходимо, чтобы особая объемная волна принадлежала внутренней полости поверхности медленности. Поэтому вместо принятого выше неравенства $v_1 < v_2 < v_3$ (1) должно быть $v_2 < v_1 < v_3$ (рис. 4). Это значит, что рассматриваемый резонанс может быть реализован в другой группе кристаллов, где $c_{66} > c_{44}$.

Структура возмущенного волнового поля. Введем возмущение – малое изменение геометрии распространения волнового поля, повернув плоскость поверхности вокруг оси x на малый угол θ относительно исходной симметричной ориентации и, как и выше, введем малое изменение скорости Δv :

$$\mathbf{n}_0 \rightarrow \mathbf{n} = (0, \theta, 1), \quad v_1 \rightarrow v = v_1 + \Delta v. \quad (30)$$

Изменения волнового поля при возмущении аналогичны тем, которые рассматривались выше. Волновое поле также будет состоять из четырех парциальных волн – трех объемных и одной локализованной у границы кристалла.

Возбуждаемой компонентой оказывается отраженная объемная волна, параметры которой получаются при учете возмущения δp (29):

$$\mathbf{u}_0^{\text{ex}}(x, t) \rightarrow \mathbf{u}^{\text{ex}}(x, z, t) = C^{\text{ex}} \mathbf{A}^{\text{ex}} \exp[ik(x + z\delta p - vt)], \quad (31)$$

$$\mathbf{k}_0^{\text{ex}} \rightarrow \mathbf{k}^{\text{ex}} = k(\mathbf{m}_0 + \mathbf{n}\delta p) = k(1, 0, \delta p),$$

$$\delta p = \sqrt{2v_1\Delta v}/v_2.$$

В волновое поле вовлекаются две другие объемные волны – падающая \mathbf{u}^i и отраженная \mathbf{u}^r :

$$\mathbf{u}^{i,r}(x, y, z, t) = C^{i,r} \mathbf{A}^{i,r} \exp[ik\{x \mp (z + \theta y)p - vt\}],$$

$$\mathbf{A}^{i,r} = (\pm pd, \pm \theta p^2 d, \Delta_{16} + c_{44} p^2)/N, \quad (32)$$

$$N = \sqrt{(\Delta_{16} + c_{44} p^2)^2 + (pd)^2},$$

$$\mathbf{k}^{i,r} = (\mathbf{m}_0 \mp p \mathbf{n})k = (1, \mp \theta p, \mp p)k.$$

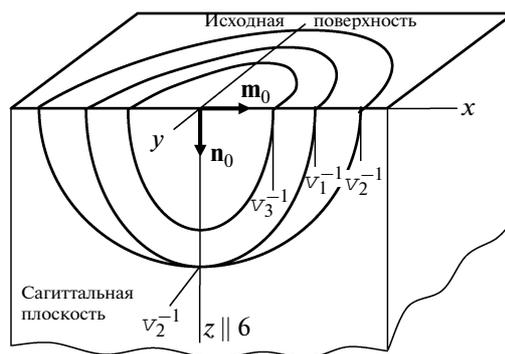


Рис. 4. Аналог рис. 1а для новой геометрии распространения. Невозмущенная конфигурация и сечения поверхности медленности.

Характеристики локализованной у границы кристалла квазипродольной компоненты \mathbf{u}^l резонансного отражения получаются из соотношений (32) при следующей замене:

$$(\mathbf{u}^r, C^r, \mathbf{A}^r, \mathbf{k}^r, p) \rightarrow (\mathbf{u}^l, C^l, \mathbf{A}^l, \mathbf{k}^l, iq). \quad (33)$$

Входящие в формулы (32), (33) вещественные параметры p и q нулевого приближения выражаются через модули упругости кристалла:

$$\left. \begin{matrix} p^2 \\ q^2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \left(\mp P + \sqrt{P^2 + 4Q} \right), \quad (34)$$

где

$$P = (c_{33}\Delta_{16} - c_{44}\Delta_{64} - d^2)/c_{33}c_{44}, \quad (35)$$

$$Q = \Delta_{16}\Delta_{64}/c_{33}c_{44} > 0.$$

Положительность параметров p и q вытекает из условия $Q > 0$ (35).

Параметры резонансного отражения. Выражения для коэффициентов возбуждения $K^{\text{ex}}(\theta^2, \delta p)$ (13), $K^r(\theta^2, \delta p)$ (16), $\eta(\theta^2, \delta p)$ (17) и уравнение линии экстремальных значений этих параметров (18) сохраняют свою силу, если вместо (15) ввести новые параметры $\lambda', \lambda'', \lambda$ и μ^2 :

$$\lambda' = \frac{(c_{66}\Delta_{16} - gp^2)c_{44}}{p(p^2 + q^2)c_{33}c_{66}^2}, \quad g = c_{33}\Delta_{16} - c_{13}^2,$$

$$\lambda'' = \sqrt{\frac{c_{44}^3\Delta_{16}/\Delta_{64}}{(p_0^2 + q^2)^2 c_{33}c_{66}^2} \left(1 + \frac{g\Delta_{64}}{c_{33}c_{44}c_{66}p_0^2} \right)}, \quad (36)$$

$$\lambda^2 = (\lambda')^2 + (\lambda'')^2 = \frac{(g^2 + c_{33}c_{44}c_{66}^2\Delta_{16}/\Delta_{64})c_{44}^2}{(p^2 + q^2)c_{33}^2c_{66}^4},$$

$$\mu^2 = \frac{4(\Delta_{16} - c_{13}p^2)^2 c_{44}^2}{(p^2 + q^2)c_{66}^2 N^2}.$$

Здесь $g > 0$ в силу условий устойчивости [3]. Отметим, что теперь отношение групповых ско-

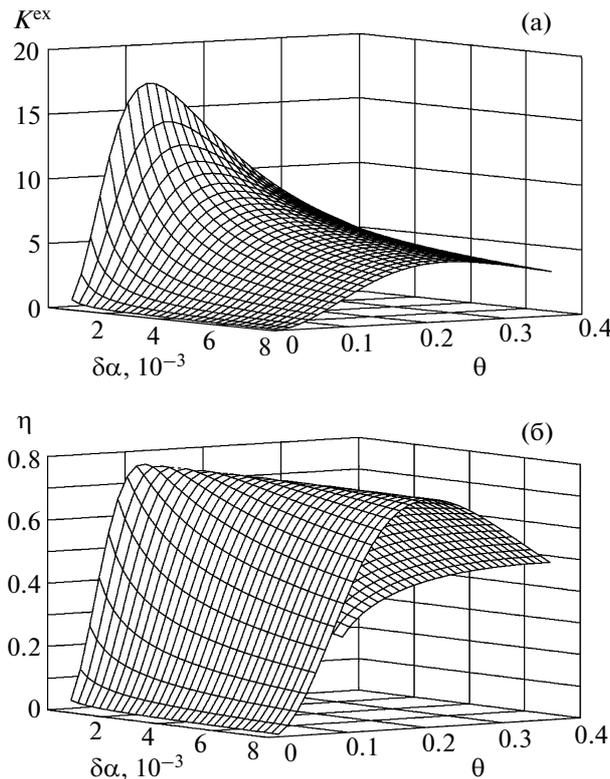


Рис. 5. Трехмерные поверхности коэффициента усиления K^{ex} (а) и доли энергии в возбуждаемом пучке η (б) в зависимости от угла падения $\delta\alpha$ и угла отклонения плоскости поверхности θ в кристалле гептина (C_7H_{12}).

ростей s^{ex}/s^i , входящее в K^{ex} (13), уже нельзя заменять отношением скоростей фазовых.

Для удобства анализа выражение для η_{max} (21) можно представить в иной форме:

$$\eta_{\text{max}} = \frac{2}{1 + \sqrt{1 + a^2}}, \quad (37)$$

$$a^2 = \frac{c_{33}c_{44}c_{66}^2\Delta_{16}/\Delta_{64}}{(c_{66}\Delta_{16} - gp^2)^2} \left(p^2 + \frac{g\Delta_{64}}{c_{33}c_{44}c_{66}} \right)^2 > 0.$$

Повышение эффективности резонанса, т.е. увеличение η_{max} , эквивалентно уменьшению параметра a^2 в (37). Эта величина может быть относительно малой в кристаллах с малой величиной Δ_{64} . Поскольку, согласно (35), $Q \propto \Delta_{64}$, при положительных значениях величины P (обычно это так) малым будет и параметр p^2 в (32): $p^2 \propto \Delta_{64}$. При этом из (37) вытекает малость величины $a^2 \propto \Delta_{64}$. В то же время малая величина параметра p означает малость угла падения волны накачки: $\alpha_0^i = \arctg p$ (рис. 2а). Это может вызвать определенные сложности для эксперимента. Здесь, видимо, придется идти на компромисс, выбирая не слишком боль-

шие значения η_{max} , отвечающие не слишком малым углам падения α_0^i .

ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ РЕАЛИЗАЦИИ РАССМОТРЕННЫХ РЕЗОНАНСОВ В РЕАЛЬНЫХ КРИСТАЛЛАХ

В данном разделе приведены количественные характеристики резонансов первого и второго типов для конкретных кристаллов из групп, где $c_{44} > c_{66}$ и $c_{44} < c_{66}$. Диапазон применимости приближенного аналитического рассмотрения, основанного на разложении по малым параметрам, в условиях значительной упругой анизотропии реальных кристаллов иногда оказывается недостаточно широким. Поэтому все приведенные иллюстрации для конкретных кристаллов получены численно по точным формулам (13), (16), (17).

Резонанс первого типа. На рис. 5 представлены трехмерные поверхности функций $K^{\text{ex}}(\theta, \delta\alpha)$ и $\eta(\theta, \delta\alpha)$, построенные для кристалла гептина (C_7H_{12}), вполне соответствующего развитой в данной работе приближенной теории. Для него эффективность η во всей области углов, рассмотренной на рис. 5, остается практически постоянной, причем на достаточно высоком уровне $\sim 75\%$. Также видно, что ширина резонанса по углам падения $\delta\alpha$ не слишком мала. Она составляет $\sim 10^{-2}$ рад, что представляется вполне приемлемым для получения резонансного пика на практике.

На рис. 6а построены зависимости коэффициентов усиления $K_{\text{max}}^{\text{ex}}(\delta\alpha)$ для серии кристаллов ($c_{44} > c_{66}$), представленных в таблице. Как видно из рисунка, кристаллы имеют разные ширины резонанса по углам падения $\delta\alpha$. Однако все они представляются приемлемыми с точки зрения приложений. На рис. 6б показаны зависимости $\eta_{\text{max}}(\delta\alpha)$ для той же группы кристаллов. Видно, что в рассматриваемом интервале углов $\delta\alpha$ все кристаллы имеют неплохую эффективность от 50 до 75%.

На рис. 7 показаны профили функций $K^{\text{ex}}(\theta)$ и $\eta(\theta)$, построенных для тех же кристаллов при углах падения $\delta\alpha$, отвечающих условию $K_{\text{max}}^{\text{ex}} = 5$.

Резонанс второго типа. Как отмечалось выше, для достижения конверсии в данном случае требуется выполнение условия $c_{44} = c_{66}$. Однако это условие приводит к скользящему падению, что серьезно ухудшает параметры резонанса, в частности ширину пика по углам падения. Поэтому приходится искать определенный компромисс между эффективностью и шириной резонансной области. В качестве примеров были выбраны кристаллы, в которых волна утечки уносит $\sim 20\text{--}30\%$

Упругие модули (ГПа) [4] и параметры μ^2 , λ' , λ'' для двух групп гексагональных кристаллов, различающихся соотношениями между модулями c_{44} и c_{66}

Кристалл		c_{11}	c_{44}	c_{66}	c_{33}	c_{13}	μ^2	λ'	λ''
$c_{44} > c_{66}$	Гептин (C_7H_{12})	4.01	0.91	0.21	4.01	3	0.27	0.16	0.19
	Дунит	198	67	61	238	96	2.45	2.15	2.70
	Полипропилен	1.52	0.555	0.155	2.45	1.14	0.22	0.12	0.25
	$Al(IO_3)_3 \cdot 2HIO_3 \cdot 6H_2O$	42.9	16	13.6	38.7	21.9	1.67	1.17	2.29
$c_{44} < c_{66}$	Карбит кремния (SiC)	502	169	203.5	565	56	1.89	0.86	13.77
	Карбонат кальция ($CaCO_3$)	14.6	5.5	6.24	40.4	5	2.25	0.83	49.59
	Co-32%Ni	326	74	82.5	358	95	2.14	1.41	42.93
	Селенид цинка (ZnSe)	107	25	31	116	35	1.32	0.67	20.61

падающей на поверхность энергии. Отметим, что для этого не требуется малость величины a^2 в формуле (37) (в частности, эффективность η , равная 70%, достигается при $a^2 = 2.45$). Тем самым возможно удерживать эффективность η на уровне ~70–80% и в то же время обеспечивать ширину резонансного пика по углам падения, превышающую дифракционную расходимость падающего пучка.

На рис. 8 представлены трехмерные изображения основных характеристик резонанса для кристалла карбида кремния SiC. Из рис. 8б видно, что эффективность η сохраняет достаточно высокий уровень в рассмотренном диапазоне углов $\delta\alpha$. В частности, вблизи значения коэффициента усиления $K^{ex} = 5$ эффективность остается на уровне ~70%.

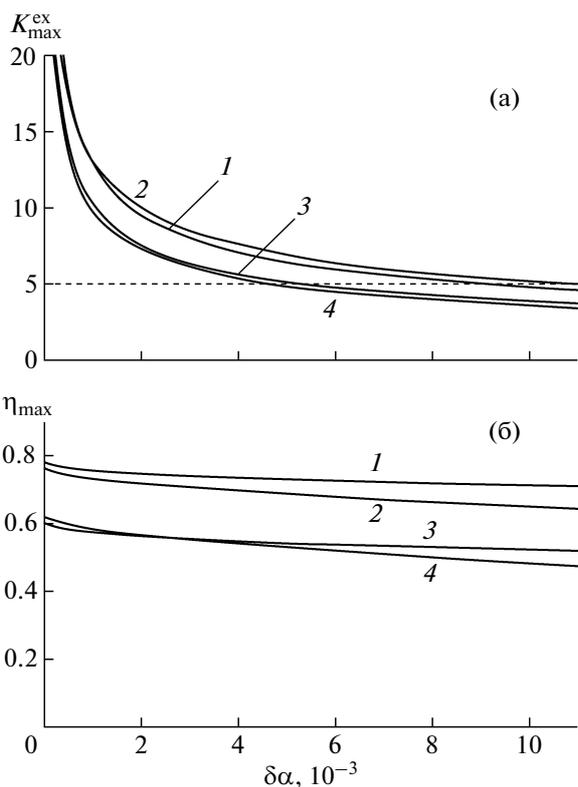


Рис. 6. Зависимости функций $K_{max}^{ex}(\delta\alpha)$ (а) и $\eta_{max}(\delta\alpha)$ (б) от угла падения для серии кристаллов: 1 – гептин (C_7H_{12}), 2 – дунит, 3 – полипропилен, 4 – $Al(IO_3)_3 \cdot 2HIO_3 \cdot 6H_2O$.

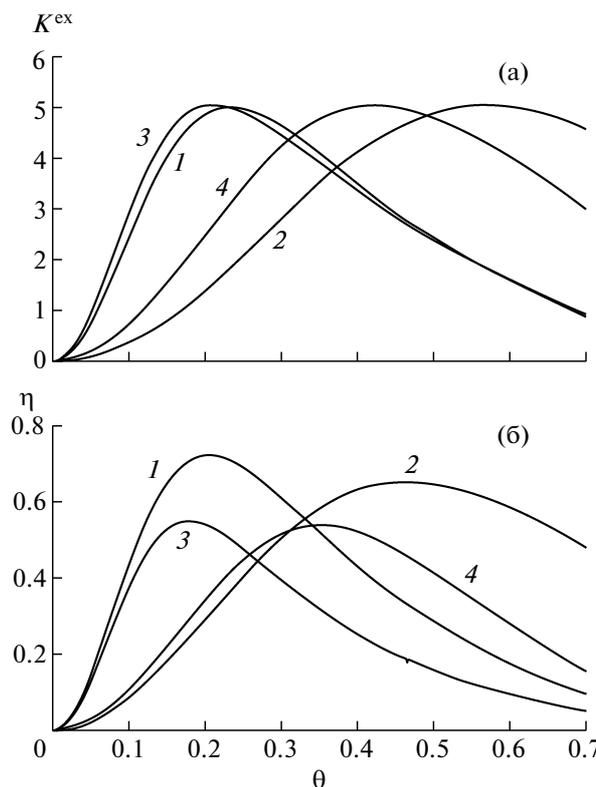


Рис. 7. Сечения поверхностей $K^{ex}(\theta, \delta\alpha)$ (а) и $\eta(\theta, \delta\alpha)$ (б) плоскостями, ортогональными оси $\delta\alpha$ при $K_{max}^{ex}(\delta\alpha) = 5$, для серии кристаллов: 1 – гептин (C_7H_{12}), 2 – дунит, 3 – полипропилен, 4 – $Al(IO_3)_3 \cdot 2HIO_3 \cdot 6H_2O$.

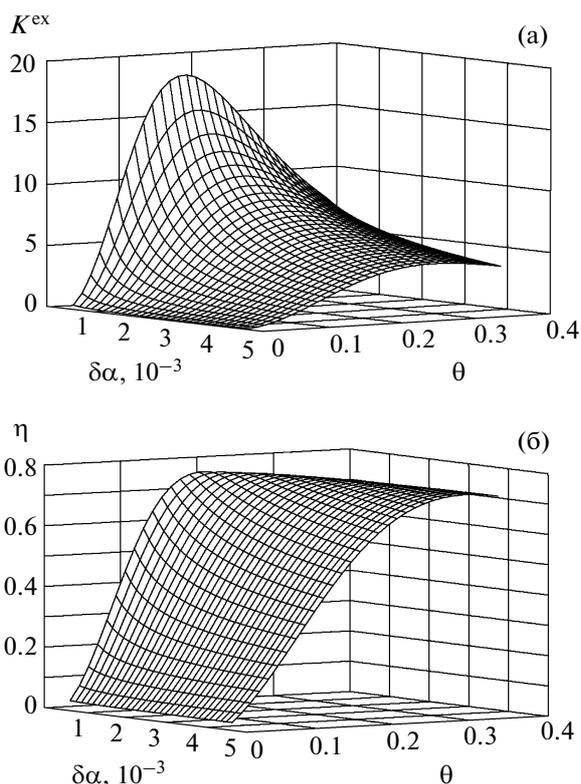


Рис. 8. Трехмерные поверхности коэффициента усиления K^{ex} (а) и доли энергии в возбуждаемом пучке η (б) в зависимости от угла падения $\delta\alpha$ и угла отклонения плоскости поверхности θ в кристалле SiC.

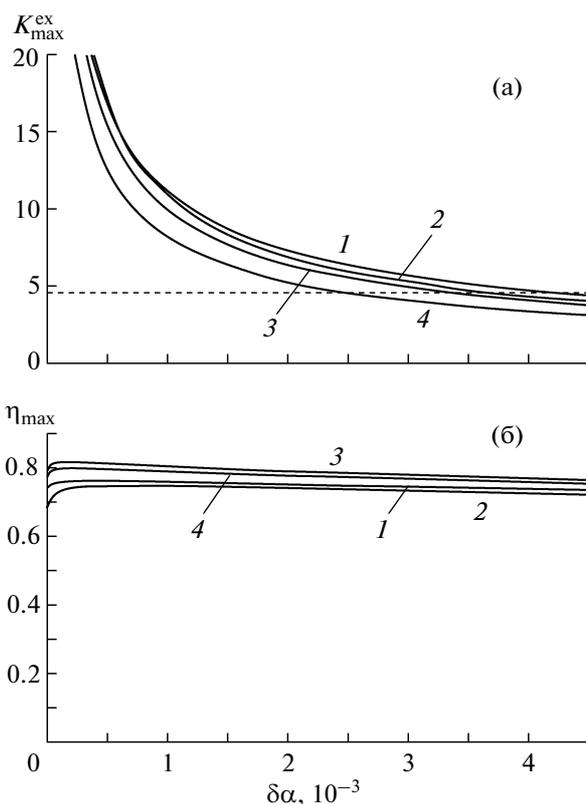
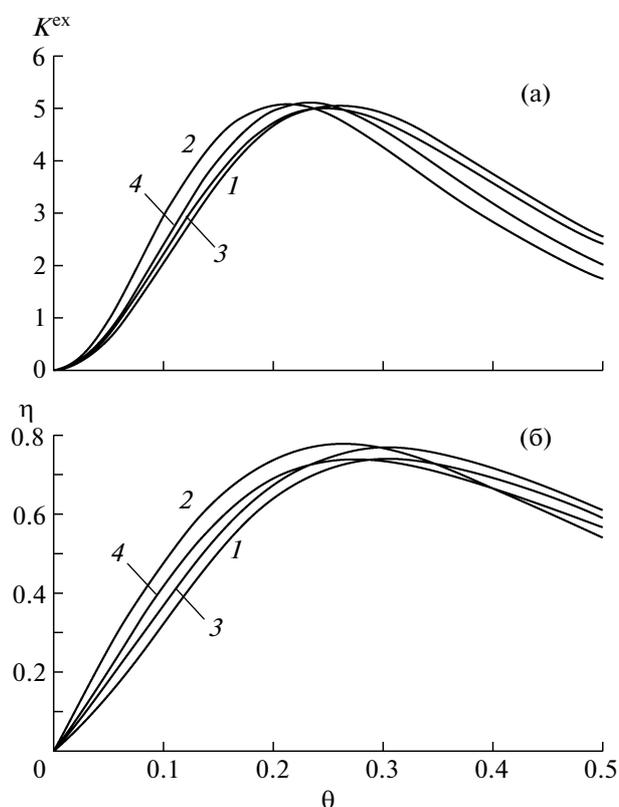


Рис. 9. Зависимости функций $K_{\text{max}}^{\text{ex}}(\delta\alpha)$ (а) и $\eta_{\text{max}}(\delta\alpha)$ (б) от угла падения для серии кристаллов: 1 – SiC, 2 – CaCO_3 , 3 – Co–32%Ni, 4 – ZnSe.

На рис. 9а построены зависимости коэффициентов усиления $K_{\text{max}}^{\text{ex}}(\delta\alpha)$ для серии кристаллов ($c_{44} < c_{66}$), представленных в таблице. Из рисунка видно, что профили резонанса для всех рассмотренных кристаллов имеют сходный вид. При этом ширина пика по углу падения $\delta\alpha$ оказывается несколько меньше, чем в случае резонанса первого типа (рис. 6а). На рис. 9б показаны зависимости $\eta_{\text{max}}(\delta\alpha)$ для той же группы кристаллов. Видно, что в рассматриваемом интервале углов $\delta\alpha$ все кристаллы сохраняют достаточно высокую эффективность, близкую к 70–80%, которая в соответствии с предсказанием развитой выше простой теории слабо зависит от угла падения. Таким образом, можно говорить о целом наборе кристаллов с приемлемыми характеристиками резонанса второго типа.

На рис. 10 показаны профили функций $K^{\text{ex}}(\theta)$ и $\eta(\theta)$, построенных для тех же кристаллов на срезе $K_{\text{max}}^{\text{ex}} = 5$.

Рис. 10. Сечения поверхностей $K^{\text{ex}}(\theta, \delta\alpha)$ (а) и $\eta(\theta, \delta\alpha)$ (б) плоскостями, ортогональными оси $\delta\alpha$ при $K_{\text{max}}^{\text{ex}}(\delta\alpha) = 5$, для серии кристаллов: 1 – SiC, 2 – Co–32%Ni, 3 – ZnSe, 4 – CaCO_3 .



ОБСУЖДЕНИЕ

Для всех описанных случаев резонанса проанализированы его ключевые параметры и выявлены условия, при которых данный резонанс оказывается особенно эффективным. Ряд исходных параметров допускает регулирование – это выбор поверхности кристалла, направления распространения волнового поля, угла падения волны накачки. Однако в значительной степени эффективность резонанса зависит и от соотношения между модулями упругости кристалла, как это показали приведенные выше компьютерные расчеты. Диапазон вариаций ограничен данными по конкретным гексагональным кристаллам [4].

Как было показано, чем выше интенсивность возбуждаемого пучка, тем он уже. Однако чем уже пучок, тем выше его дифракционная расходимость $\delta\psi^{\text{ex}} \sim \lambda/D^{\text{ex}}$ (здесь λ – длина волны). Величина $\delta\psi^{\text{ex}}$ тесно связана с расходимостью падающего пучка волны накачки $\delta\psi^i \sim \lambda/D^i$. Действительно, с учетом формул (27), (28) имеем

$$\delta\psi^{\text{ex}}/\delta\psi^i \sim D^i/D^{\text{ex}} = \sin \alpha^i/\delta p^i \sim K^{\text{ex}}. \quad (38)$$

Другими словами, расходимость возбуждаемого пучка в K^{ex} раз выше расходимости падающего пучка волны накачки. Это одна из причин того, что коэффициент K^{ex} бессмысленно выбирать слишком большим.

Тонкая настройка резонанса осуществляется за счет регулировки угла падения волны накачки $\alpha^i = \alpha_0^i + \delta\alpha$ путем изменения величины $\delta\alpha$ (рис. 2б). Чтобы дифракционная расходимость не нарушила резонанс, должно выполняться неравенство $\delta\psi^i \ll \delta\alpha$. Полагая для оценки $\delta\alpha \sim 10^{-2}$, выберем для пороговой расходимости падающего пучка уровень

$$\delta\psi^i = 2 \times 10^{-3}. \quad (39)$$

Тогда пороговая длина волны будет $\lambda_c \sim D^i\delta\psi^i$, а пороговая частота $\nu_c = c_s/\lambda_c$ (здесь c_s – скорость звука) определится оценкой

$$\nu_c = c_s/D^i\delta\psi^i. \quad (40)$$

Подставляя сюда (39) и $c_s/D^i \sim 2 \times 10^5 \text{ с}^{-1}$, получим искомую оценку для спектральной области, где можно реализовать рассматриваемый резонанс:

$$\nu > \nu_c \sim 100 \text{ МГц}. \quad (41)$$

Оценку величины $\delta\psi^{\text{ex}}$ можно получить из (38), (39). При $K^{\text{ex}} = 5$ это дает вполне приемлемую расходимость возбуждаемого пучка $\delta\psi^{\text{ex}} \approx 10^{-2}$.

На гиперзвуковых частотах, когда дифракционные расходимости пренебрежимо малы, по-видимому, можно достичь более высоких значений параметра $K^{\text{ex}} \sim 1/\theta^2$ (21) за счет уменьшения угла θ . Однако здесь лимитирующим фактором может оказаться естественное поглощение [5], как это продемонстрировано в [1].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Альшиц В.И., Бессонов Д.А., Любимов В.Н. // ЖЭТФ. 2013. Т. 143. С. 1077.
2. Альшиц В.И., Ломе Е. // Кристаллография. 1979. Т. 24. Вып. 6. С. 1122.
3. Федоров Ф.И. Теория упругих волн в кристаллах. М.: Наука, 1965.
4. Landolt H.H., Börnstein R. Zahlenwerte und Funktionen aus Naturwissenschaften und Technik. Neue Serie. III/11. Ed. K.-H. Hellwege. Berlin: Springer, 1979.
5. Ландау Л.Д., Лифшиц Е.М. Теория упругости. М.: Наука, 1987.