КРИСТАЛЛОГРАФИЯ, 2013, том 58, № 3, с. 357–365

КРИСТАЛЛОГРАФИЧЕСКАЯ СИММЕТРИЯ

УДК 548.1

Посвящается А.М. Заморзаеву

ИССЛЕДОВАНИЕ ПЯТИМЕРНЫХ ТОЧЕЧНЫХ ГРУПП СИММЕТРИИ С ИНВАРИАНТНОЙ ТРЕХМЕРНОЙ ПЛОСКОСТЬЮ И НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ НА НЕЙ

А. Ф. Палистрант

Молдавский государственный университет, Кишинёв
E-mail: mepalistrant@yandex.ru

Поступила в редакцию 26.01.2012 г.

Для выявления структуры пятимерных точечных групп симметрии с инвариантной трехмерной плоскостью и неподвижной точкой на ней дан подробный обзор каталога исследуемых 1208 трехмерных точечных групп 10 розеточных P-симметрий при $P \simeq G_{20}$, которыми с точностью до строения интерпретируются упомянутые группы симметрии пятимерного евклидова пространства категории G_{530}, где цифры 530 индекса указывают последовательно размерность пространства и размерности инвариантных подпространств в нем.

DOI: 10.7868/S002347611303017X

ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Необходимость вывода многомерных дискретных групп симметрии и их возможных подгрупп диктуется не только математическими задачами n-мерной геометрической кристаллографии, но и потребностями современной физики. Так, в работах Яннера и Янссена 1969–1979 гг. приведены примеры конкретных соединений, симметрия которых описывается многомерными группами. В частности, в [1] отмечено, что симметрия периодически искаженного кристалла с иррациональными периодами искажения описывается 6-мерными фёдоровскими группами.

Что касается n-мерных групп симметрии и их всевозможных подгрупп, то их вывод при $n \geq 4$, как показали исследования 4-мерных фёдоровских групп в [2], осуществлять таким путем, как это делалось в трехмерном пространстве [3] (после предварительного полного вывода n-мерных точечных “кристаллографических” групп G_{no} и всех типов n-мерных решеток Бравэ), становится уже невозможным.

Основным методом вывода n-мерных групп симметрии при $n \geq 5$ является подробно описанный в [4] так называемый арифметический метод применения конечных групп целочисленных $(n \times n)$-матриц, давший возможность расширить теорию трехмерных решеток на n-мерные и создать методы их полных исследований при любом конкретном значении n. Однако сам процесс вывода всевозможных различных пятимерных точечных групп G_{50} и пятимерных решеток Бравэ, как следует из [4], является довольно сложной и трудоемкой задачей, требующей глубоких теоретических исследований и использования мощных вычислительных средств.

Наряду с важными универсальными методами геометрической теории чисел, развитыми в [4] московской школой Б.Н. Делоне, для исследования многомерных групп симметрии особую роль в совершенствовании принципиального метода решения задачи n-мерной геометрической кристаллографии имеют разработанные в [5, 6] принципы применения одно-, двух-, и трехмерных групп P-симметрии для подсчета и моделирования субпериодических n-мерных групп симметрии.

В этих работах показано, что, например, r-мерными группами l-кратной антисимметрии G_r^l при их полной классификации, согласно общей теории, описанной в [7], полностью интерпретируются с точностью до строения все различные многомерные плоскостные группы симметрии категории $G_{(r+l)(r+l-1)\ldots(r+1)r}$, сохраняющие в $(r+l)$-мерном пространстве последовательно включающие друг в друга плоскости размерностей $r+l-1$, $r+l-2$, ..., $r+1$, r, а группами G_r^p десяти розеточных P-симметрий при $P \simeq G_{20}$, исчерпывающихся p- и (p')-симметриями при $p = 1, 2, 3, 4, 6$, – группы симметрии категории $G_{(r+2)r}$ [8, 9]. Далее группами G_r^p таблеточных P-симметрий при $P \simeq G_{320}$ исчерпывающихся $(p, 2)$- и $(p', 2)$-симметриями, интерпретируются с точностью до строения все различные группы симметрии категории $G_{(r+3)(r+2)r}$ [8, 9], а группами G_r^p гипертаблеточных P-симметрий 1-го порядка при $P \simeq G_{4320}$ исчерпывающихся $(p, 2, 2)$- и $(p', 2, 2)$- симметриями – группы симметрии категории $G_{(r+4)(r+3)(r+2)r}$ [9].

Аналогичным образом группами G_r^p 32 кристаллографических P-симметрий при $P \simeq G_{30}$ моделируются с точностью до строения все различные $(r+3)$-мерные группы симметрии категории $G_{(r+3)r}$ [10]. В свою очередь группами G_r^p 122 гиперкристаллографических P-симметрий первого порядка при $P \simeq G_{430}$ интерпретируются все различные группы симметрии категории $G_{(r+4)(r+3)r}$ [11], а группами G_r^p 624 гиперкристаллографических P-симметрий 2-го порядка при $P \simeq G_{5430}$ – все различные группы симметрии категории $G_{(r+5)(r+4)(r+3)r}$ [12]. Наконец, группами G_r^p бирозеточных P-симметрий, соответствующих группам подстановок $P \simeq G_{420}$, моделируются все различные с точностью до строения группы симметрии категории $G_{(r+4)(r+2)r}$ [13].

С помощью отмеченных способов использования r-мерных групп G_r^p данной P-симметрии (где $0 \leq r \leq 3$) для исследования интерпретируемых ими многомерных групп симметрии удается выявить не только количество самих многомерных групп симметрии данной категории, но и установить структуру каждой из них, ибо между группами G_r^p и моделируемыми или многомерными группами симметрии устанавливается не только взаимно однозначное, но и сильно изоморфное соответствие, что означает, согласно [14], что каждая конкретная группа из множества групп категории G_r^p и интерпретируемая ею многомерная группа симметрии имеют одинаковое строение.

Что касается пятимерных групп симметрии (так как они на очереди после исследованных в [15] четырехмерных), то структура каждой из них не просто усматривается. Выходом из этого положения является имеющийся способ использования обобщенных классических групп P-симметрии, которыми моделируется рассматриваемая категория пятимерных групп симметрии, для нахождения их структуры. Выявлению количества пятимерных групп симметрии с инвариантной трехмерной плоскостью и неподвижной точкой на ней, т.е. пятимерных групп симметрии категории G_{530} в краткой записи, а также структуры каждой отдельной группы симметрии этой категории и посвящается настоящая работа. Таким образом, для решения задачи понадобится каталог трехмерных точечных групп G_{30}^p розеточных P-симметрий при $P \simeq G_{20}$ и доказательство факта, что отмеченными группами G_{30}^p интерпретируются с точностью до строения все различные группы симметрии категории G_{530}.

КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ P-СИММЕТРИИ

Напомним некоторые необходимые для решения поставленной задачи понятия и факты заморзаевской теории P-симметрии, изложенной в [5, 6]. Приписывая каждой точке фигуры F хотя бы один индекс $i = 1, 2, ..., p$ и фиксируя некоторую группу P подстановок этих индексов, называем преобразованием P-симметрии индексированной фигуры F ее изометрическое преобразование, переводящее каждую точку с индексом i в точку с индексом k_i так, чтобы подстановка $\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 & 2 & p \\ k_1 & k_2 & k_p \end{pmatrix} \in P$; такие преобразования g разлагаются на преобразования симметрии s рассматриваемой фигуры F и подстановки ε из группы P подстановок p качеств, наделенных точками преобразуемой фигуры F. Преобразования P-симметрии $g = s\varepsilon = \varepsilon s$ составляют мультипликативную группу G, входящие в них преобразования симметрии s – ее порождающую группу S, подстановки индексов ε – группу P_1; при $P_1 = P$ называем G группой полной P-симметрии, при $e \subset P_1 \subset P$ неполной P-симметрии, а при $P_1 = e$ группа $G = S$.

Если G – группа полной P-симметрии, то $H = G \cap S$ – ее подгруппа симметрии, а $Q = G \cap P$ – подгруппа подстановок индексов. Группу G называем старшей при $Q = P$ (тогда $H = S$, а $G = S \times P$), младшей при $Q = e$ (тогда G изоморфна S, что соответствует символической записи $G \cong S$) и Q-средней при $e \subset Q \subset P$. Всякую группу G полной P-симметрии, как указано в основной теореме А.М. Заморзаева [5, 6], можно вывести из ее порождающей S путем нахождения в S и P таких нормальных делителей H и Q, для которых существует изоморфизм фактор-группы S/H на P/Q, попарным перемножением соответствующих по изоморфизму смежных классов и объединением полученных произведений. Совокупность всех групп P-симметрии с общей порождающей назовем порожденным ею семейством (ср. с [5, 6]).

Вывод старших групп P-симметрии тривиален, так как они соответствуют случаю $Q = P$, поэтому изоморфизм фактор-группы S/H на P/Q возникает только в том случае, когда нормальный делитель H группы S совпадает с ней. Это означает, что старшая группа G P-симметрии является прямым произведением порождающей группы S и группы подстановок P, характеризующей рассматриваемую P-симметрию ($G = S \times P$). Младшие группы данной P-симметрии выводятся из определенной порождающей группы S, согласно основной теореме, только в том случае, если S обладает таким нормальным делителем H, что $S/H \cong P$, ввиду того, что для этого типа групп P-симметрии $Q = e$. Практически младшие группы P-симметрии, где $P/Q \simeq P$, удобно выводить методом Шубникова–Заморзаева, т.е. поочередной заменой в системе образующих исходной группы S ее преобразований симметрии соответствующими преобразованиями P-симметрии таким образом, чтобы полученная при этом новая группа G была изоморфна взятой группе S, а подстановки индексов, входящие в преобразования полученной группы G, составляли отмеченную группу P.

Изучение Q-средних групп P-симметрии, согласно основной теореме, связано с перебором нетривиальных нормальных делителей Q групп подстановок P, характеризующих рассматриваемые P-симметрии, а сам подсчет этих групп становится возможным, если предварительно выявлены младшие группы P-симметрии, ибо, как показано в [14], число Q-средних групп P-симметрии в данном семействе равно числу младших групп P_o-симметрии с той же порождающей, если фактор-группа P/Q сильно изоморфна P_o ($P/Q \cong P_o$).

Широта понятия P-симметрии и ее многообразная применимость [5] вызвали к жизни различные принципы классификации P-симметрий [6], из которых понадобится так называемый геометрический способ, позволяющий выявить десять розеточных P-симметрий, записанных в [9] в виде групп, задающих p- и (p')-симметрию при $p = 1, 2, 3, 4, 6$, в случае, когда группа подстановок качеств P изоморфна последовательно каждой из десяти двумерных кристаллографических точечных групп симметрии категории G_{20}.

ТРЕХМЕРНЫЕ ТОЧЕЧНЫЕ ГРУППЫ РОЗЕТОЧНЫХ P-СИММЕТРИЙ

Приведем каталог нужных для решения поставленной задачи трехмерных точечных групп G_{30}^p десяти розеточных P-симметрий. Для этого обобщим 32 трехмерные точечные группы G_{30} с упомянутыми в конце предыдущего раздела 10 розеточными P-симметриями, распределенными в [9] по девяти классам сильной изоморфности следующим образом: 1; 2; 1/; 3; 4; 6; 2/; 3/; 4/; 6/.

При 1-симметрии, задаваемой тождественным преобразованием e, получим 32 классические группы G_{30}, которые назовем порождающими, так как точкам преобразуемого трехмерного пространства приписывается один и тот же индекс, следовательно, симметрия рассматриваемой фигуры сохраняется. Перечислим эти группы по сингониям, записанным в [16, 18–21] в смешанной шубниковской и заморзаевской символиках. Сингония T: $1, \tilde{2}$. Сингония M: $2, m, 2 : m$. Сингония O: $2 \cdot m, 2 : 2, m \cdot 2 : m$ $(= 2 \cdot m : 2)$. Сингония Q: $4, \tilde{4}, 4 : 2, \tilde{4} \cdot m$ $(= \tilde{4} : 2)$, $4 \cdot m, 4 : m, m \cdot 4 : m$ $(= 4 \cdot m : 2)$. Сингония K: $3/2, 3/4, 6/\tilde{2} (= 3/2 \cdot m)$, $3/\tilde{4}, \tilde{6}/4$ $(= 3/4 \cdot m)$. Сингония R: $3, \tilde{6} = 3 \times \tilde{2}, 3 : 2$, $3 \cdot m, \tilde{6} \cdot m$ $(= 3 \cdot m : 2)$. Сингония H: $6, 6 : 2, 3 : m$, $6 \cdot m, 6 : m, m \cdot 3 : m$ $(= 3 : m \cdot 2)$, $m \cdot 6 : m$ $(= 6 : m \cdot 2 = 6 \cdot m : 2)$.

Так как из каждой порождающей группы при обобщении ее с любой нетривиальной P-симметрией выводится только одна старшая, разлагающаяся в прямое произведение рассматриваемой классической группы и группы подстановок P, задающей использованную P-симметрию, то таких групп при обобщении 32 кристаллографических точечных групп с 9 нетривиальными розеточными P-симметриями будет $288 = 32 \times 9$. Список этих групп исчерпывается следующим рядом: $1 \times 1^{(2)}$, ..., $(6 : m \cdot 2) \times 1^{(2)}$, ...; $1 \times 1^{(6')}$, ..., $(6 : m \cdot 2) \times 1^{(6')}$ – всего 288 групп.

Для получения полного каталога трехмерных точечных групп розеточных P-симметрий не хватает младших и Q-средних групп этой категории при 9 нетривиальных розеточных P-симметриях.

При 2- и (1/)-симметриях группы G_{30} порождают по 58 младших [7] ввиду того, что 2- и (1/)-симметрия совпадают с антисимметрией А.В. Шубникова [17]. Список младших трехмерных точечных групп 2-симметрии следующий: $\tilde{2}^{(2)}$; $2^{(2)}$; $m^{(2)}$; $2^{(2)} : m$, $2 : m^{(2)}$, $2^{(2)} : m^{(2)}$; $2^{(2)} \cdot m$, $2 \cdot m^{(2)}$; $2^{(2)} : 2$; $2^{(2)} \cdot m : 2$, $2 \cdot m^{(2)} : 2$, $2^{(2)} \cdot m^{(2)} : 2$; $4^{(2)}$; $\tilde{4}^{(2)}$; $4^{(2)} : 2$, $4 : 2^{(2)}$; $\tilde{4}^{(2)} : 2$, $\tilde{4} : 2^{(2)}$, $\tilde{4}^{(2)} : 2^{(2)}$; $4^{(2)} \cdot m$, $4 \cdot m^{(2)}$; $4^{(2)} : m$, $4 : m^{(2)}$, $4^{(2)} : m^{(2)}$; $4^{(2)} \cdot m : 2$, $4 \cdot m^{(2)} : 2$, $4 \cdot m : 2^{(2)}$, $4^{(2)} \cdot m^{(2)} : 2$, $4 \cdot m^{(2)} : 2^{(2)}$; $3/4^{(2)}$; $3/2 \cdot m^{(2)}$; $3/\tilde{4}^{(2)}$; $3/4^{(2)} \cdot m$, $3/4 \cdot m^{(2)}$, $3/4^{(2)} \cdot m^{(2)}$; $\tilde{6}^{(2)}$; $3 : 2^{(2)}$; $3 \cdot m^{(2)}$; $3 \cdot m^{(2)} : 2$, $3 \cdot m : 2^{(2)}$, $3 \cdot m^{(2)} : 2^{(2)}$; $6^{(2)}$; $6^{(2)} : 2$; $6 : 2^{(2)}$; $3 : m^{(2)}$; $6^{(2)} \cdot m$, $6 \cdot m^{(2)}$; $6^{(2)} : m$, $6 : m^{(2)}$, $6^{(2)} : m^{(2)}$; $3 : m^{(2)} \cdot 2$, $3 : m \cdot 2^{(2)}$, $3 : m^{(2)} \cdot 2^{(2)}$; $6^{(2)} : m \cdot 2$, $6 : m^{(2)} \cdot 2$, $6 : m \cdot 2^{(2)}$, $6^{(2)} : m^{(2)} \cdot 2$, $6 : m^{(2)} \cdot 2^{(2)}$ – всего 58 групп.

Если в списке выписанных 58 младших трехмерных точечных групп 2-симметрии индекс “(2)” заменить соответственно символом “/”, то получим список 58 младших трехмерных точечных групп (*1/*)-симметрии: $\tilde{2}^{/}, 2^{/}, m^{/}, \ldots, 6 : m^{/} \cdot 2^{/}$. Всего при 2- и (*1/*)-симметрии группы G_{30} порождают 116 младших и ни одной средней группы, ибо группы 2 и 1/, задающие две рассмотренные розеточные P-симметрии, не имеют нетривиальных нормальных делителей.

При 3-симметрии группы G_{30} порождают 7 младших групп, список которых таков: $3^{(3)}/2$; $3^{(3)}/2 \cdot m = \tilde{6}^{(3)}/2$; $3^{(3)}$; $\tilde{6}^{(3)}$; $6^{(3)}$; $3^{(3)} : m$; $6^{(3)} : m$ и ни одной средней по той же причине, что и при 2- и (1/)-симметриях.

При 4-симметрии группы G_{30} порождают четыре младшие группы $4^{(4)}$; $\tilde{4}^{4}$; $4^{(4)} : m$ и $4^{(4)} : m^{(2)}$, а также 58 два-средних ввиду того, что фактор-группа $4/2 \simeq 2$. Следовательно, таких групп при обобщении G_{30} с 4-симметрией будет столько, согласно предыдущему разделу, сколько младших групп порождает категория G_{30} при ее обобщении с 2-симметрией, т.е. 58. Список этих групп таков: $\tilde{2}^{(4)}$; $2^{(4)}$; $m^{(4)}$; $2^{(4)} : m$, $2 : m^{(4)}$, $2^{(4)} : m^{(4)}$; $2^{(4)} \cdot m$, $2 \cdot m^{(4)}$; $2^{(4)} : 2$; $2^{(4)} \cdot m : 2$, $2 \cdot m^{(4)} : 2$, $2^{(4)} \cdot m^{(4)} : 2$; $4^{(4)} \times 1^{(2)}$; $\tilde{4}^{(4)} \times 1^{(2)}$; $4^{(4)} : 2$, $4 : 2^{(4)}$; $\tilde{4}^{(4)} : 2$, $\tilde{4} : 2^{(4)}$, $\tilde{4}^{(4)} : 2^{(4)}$; $4^{(4)} \cdot m$, $4 \cdot m^{(4)}$; $(4^{(4)} : m) \times 1^{(2)}$, $4 : m^{(4)}$, $4^{(4)} : m^{(4)}$; $4^{(4)} \cdot m : 2$, $4 \cdot m^{(4)} : 2$, $4 \cdot m : 2^{(4)}$, $4^{(4)} \cdot m^{(4)} : 2$, $4 \cdot m^{(4)} : 2^{(4)}$; $3/4^{(4)}$; $3/2 \cdot m^{(4)} = \tilde{6}^{(4)}/2$; $3/\tilde{4}^{(4)}$; $3/4^{(4)} \cdot m$, $3/4 \cdot m^{(4)}$, $3/4^{(4)} \cdot m^{(4)}$; $\tilde{6}^{(4)}$; $3 : 2^{(4)}$; $3 \cdot m^{(4)}$; $3 \cdot m^{(4)} : 2$, $3 \cdot m : 2^{(4)}$, $3 \cdot m^{(4)} : 2^{(4)}$; $6^{(4)}$; $6^{(4)} : 2$, $6 : 2^{(4)}$; $3 : m^{(4)}$; $6^{(4)} \cdot m$, $6 \cdot m^{(4)}$; $6^{(4)} : m$, $6 : m^{(4)}$, $6^{(4)} : m^{(4)}$; $3 : m^{(4)} \cdot 2$, $3 : m \cdot 2^{(4)}$, $3 : m^{(4)} \cdot 2^{(4)}$; $6^{(4)} : m \cdot 2$, $6 : m^{(4)} \cdot 2$, $6 : m \cdot 2^{(4)}$, $6^{(4)} : m^{(4)} \cdot 2$, $6 : m^{(4)} \cdot 2^{(4)}$ (ср. с табл. 1.1 и 1.2 в [5]).

При 6-симметрии группы G_{30} порождают младшие, а также 2- и 3-средние, ибо группа 6, задающая 6-симметрию имеет два нетривиальных нормальных делителя 2 и 3, в прямое произведение групп которых она и разлагается ($6 = 2 \times 3$). Список младших G_{30}^6 содержит 7 групп и выглядит следующим образом: $3^{(3)}/2 \cdot m^{(2)} = \tilde{6}^{(6)}/2$; $\tilde{6}^{(6)}$; $6^{(6)}$; $3^{(3)} : m^{(2)}$; $6^{(3)} : m^{(2)}$, $6^{(6)} : m$, $6^{(6)} : m^{(2)}$. Что касается 2-средних групп категории G_{30}^6, то их будет столько, сколько точечных групп G_{30} порождают младших при их обобщении с 3-симметрией, т.е. семь, так как фактор-группа $6/2 \simeq 3$. Чтобы выписать эти группы, нужно каждую младшую точечную группу G_{30}^3 при 3-симметрии умножить на группу 2-тождественного преобразования $1^{(2)}$. Следовательно, список 2-средних точечных групп G_{30}^6 таков: $(3^{(2)}/2) \times 1^{(2)}$; $(3^{(3)}/2 \cdot m) \times 1^{(2)}$; $3^{(6)} = 3^{(3)} \times 1^{(2)}$; $\tilde{6}^{(3)} \times 1^{(2)}$; $6^{(3)} \times 1^{(2)}$; $(3^{(3)} : m) \times 1^{(2)}$; $(6^{(3)} : m) \times 1^{(2)}$. Чтобы выписать 3-средние группы категории G_{30}^6 по аналогичной причине, нужно каждую из 58 младших групп, которые порождают точечные группы G_{30} при их обобщении с 2-симметрией, умножить на группу $1^{(3)}$ 3-тождественного преобразования ввиду того, что фактор-группа $6/3 \simeq 2$. Следовательно, список 3-средних групп категории G_{30}^6 выглядит так: $\tilde{2}^{(2)} \times 1^{(3)}, 2^{(2)} \times 1^{(3)}$, $m^{(2)} \times 1^{(3)}$, ..., $(6 : m^{(2)} \cdot 2^{(2)}) \times 1^{(3)}$ (ср. с табл. 1.2 в [5]) – всего 58 групп.

При (2/)-симметрии трехмерные группы G_{30} порождают 64 младшие группы, список которых следующий: $2^{(2} : m^{/)}$, $2^{/)} : m^{(2}$, $\tilde{2}^{(2/} : m^{/)} = \tilde{2}^{(2} : m^{/)}$; $2^{(2} \cdot m^{/)}$, $2^{/)} \cdot m^{(2}$; $2^{(2} : 2^{/)}$; $m^{(2} \cdot 2 : m^{/)}$, $m^{/)} \cdot 2 : m^{(2}$, $m^{/)} \cdot 2^{(2} : m^{/)}$, $m \cdot 2^{(2} : m^{/)}$, $m^{/)} \cdot 2^{(2} : m$; $m^{/)} \cdot 2^{(2} : m^{(2}$; $4^{(2} : 2^{/)}$, $4^{/)} : 2^{(2}$; $\tilde{4}^{(2} \cdot m^{/)}$, $\tilde{4}^{/)} \cdot m^{/2}$, $\tilde{4}^{/)} \cdot m^{(2/} = \tilde{4}^{/)} : 2^{(2}$; $4^{(2} \cdot m^{/)}$, $4^{/)} \cdot m^{(2}$; $4^{(2} : m^{/)}$, $4^{/)} : m^{(2}$, $4^{(2/} : m^{/)} = \tilde{4}^{(2} : m^{/)}$; $m^{(2/} \cdot 4 : m^{/)}$, $m^{(2} \cdot 4 : m^{/)}$, $m^{/)} \cdot 4 : m^{(2}$, $m \cdot 4^{(2} : m^{/)}$, $m \cdot 4^{/)} : m^{(2}$, $m \cdot 4^{(2} : m^{/)}$, $m^{/)} \cdot 4^{(2} : m$, $m^{(2} \cdot 4^{/)} : m$, $m^{/)} \cdot 4^{(2} : m^{/)}$, $m^{(2} \cdot 4^{/)} : m^{(2}$, $m^{/)} \cdot 4^{(2} : m^{/)}$, $m^{/)} \cdot 4^{(2} : m^{(2}$, $m^{(2} \cdot 4^{/)} : m^{/)}$; $\tilde{6}^{(2}/4^{/)}$, $\tilde{6}^{/)}/4^{(2}$, $\tilde{6}^{/)}/4^{(2/} = \tilde{6}^{/)}/\tilde{4}^{(2}$; $\tilde{6}^{(2} \cdot m^{/)}$, $\tilde{6}^{/)} \cdot m^{(2}$, $\tilde{6}^{/)} \cdot m^{(2/} = \tilde{6}^{/)} : 2^{(2}$; $6^{(2} : 2^{/)}$, $6^{/)} : 2^{(2}$; $6^{(2} \cdot m^{/)}$, $6^{/)} \cdot m^{(2}$; $6^{(2} : m^{/)}, 6^{/)} : m^{(2}, 6^{(2/} : m^{/)} = \tilde{6}^{(2} : m^{/)}$; $m^{(2} \cdot 3 : m^{/)}, m^{/)} \cdot 3 : m^{(2}$, $m^{(2/} \cdot 3 : m^{/)}$; $m^{(2/} \cdot 6 : m^{/)}, m^{(2} \cdot 6 : m^{/)}, m^{/)} \cdot 6 : m^{(2}, m \cdot 6^{(2} : m^{/)}$, $m \cdot 6^{/)} : m^{(2}$, $m \cdot 6^{(2/} : m^{/)}$, $m^{/)} \cdot 6^{(2} : m$, $m^{(2} \cdot 6^{/)} : m$, $m^{/)} \cdot 6^{(2} : m^{/)}$, $m^{(2} \cdot 6^{/)} : m^{(2}$, $m^{/)} \cdot 6^{(2/} : m^{/)}$, $m^{/)} \cdot 6^{(2} : m^{(2}$, $m^{(2} \cdot 6^{/)} : m^{/)}$ (ср. с табл. 1.3 в [5]).

Но так как группа, задающая (2/)-симметрию, имеет два нетривиальных нормальных делителя *2* и (1/), то группы G_{30} при (2/)-симметрии кроме выписанных 64 младших будут порождать 2-средние и (1/)-средние. Ввиду того, что фактор-группа $(2/)/2 \simeq 1/$, то 2-средних точечных групп (2/)-симметрии будет столько, согласно утверждению предыдущего пункта, сколько младших групп порождают трехмерные точечные группы при (1/)-симметрии, т.е. 58. Чтобы выписать 2-средние трехмерные точечные группы при (2/)-симметрии, нужно каждую младшую группу этой симметрии умножить на группу 2-тождественных преобразований $1^{(2}$. Следовательно, список *2*-средних трехмерных точечных групп при (2/)-симметрии выглядит так: $\tilde{2}^{/)} \times 1^{(2}$; $2^{/)} \times 1^{(2}$; $\mathrm{m}^{/)} \times 1^{(2}$;..., $(6 : m^{/)} \cdot 2^{/)}) \times 1^{(2}$ – всего 58 групп.

Так как фактор-группа $(2/)/(1/) \simeq 2$, то (1/)-средних трехмерных точечных групп при (2/)-симметрии будет также 58, ибо младших групп при обобщении групп G_{30} с 2-симметрией 58. Если каждую младшую группу категории G_{20}^2 умножить на группу $1^{/)}$, то получим список (1/)-средних групп при (2/)-симметрии в следующем виде: $\tilde{2}^{(2} \times 1^{/)}$; $2^{(2} \times 1^{/)}$; $m^{(2} \times 1^{/)}$; ... , $(6 : m^{(2} \cdot 2^{(2)}) \times 1^{/)}$ – всего 58 групп.

При (3/)-симметрии трехмерные точечные группы G_{30} порождают 10 младших групп, список которых таков: $3^{(3}/4^{/)}$; $3^{(3}/\tilde{4}^{\prime)}$; $\tilde{6}^{(3}/4^{\prime)}$; $3^{(3} : 2^{/)}$; $3^{(3} \cdot m^{/)}$; $\tilde{6}^{(3} \cdot m^{\prime)}$; $6^{(3} : 2^{/)}$; $6^{(3} \cdot m^{/)}$; $m^{/)} \cdot 3^{(3} : m$; $m^{/)} \cdot 6^{(3} : m$. В связи с тем, что группа, задающая (3/)-симметрию, имеет нетривиальный нормальный делитель 3, то кроме выписанных 10 младших группы G_{30} при их обобщении с (3/)-симметрией будут порождать 58 три-средних групп, ибо фактор-группа $(3/)/3 \simeq 1/$. Если каждую младшую трехмерную точечную группу (1/)-симметрии умножить на группу 3-тождественного преобразования $1^{(3}$, то получим список 58 три-средних групп при (3/)-симметрии в следующем виде: $\tilde{2}^{\prime)} \times 1^{(3}$; $2^{/)} \times 1^{(3}$; $m^{/)} \times 1^{(3}$; ..., $(6 \cdot m^{/)} : 2^{/)}) \times 1^{(3}$ – всего 58 групп.

При (4')-симметрии трехмерные точечные группы G_{30} порождают 5 младших групп, список которых выглядит следующим образом: $4^{(4} : 2^{/)}$; $\tilde{4}^{(4} \cdot m^{\prime)}$; $4^{(4} \cdot m^{/)}$; $m^{/)} \cdot 4^{(4} : m$, $m^{/)} \cdot 4^{(4} : m^{(2}$. Но так как группа, задающая (4/)-симметрию, имеет 3 нетривиальных нормальных делителя (2/), 4 и 2, то кроме выписанных пяти младших групп группы G_{30} будут порождать (2/)-, 4- и 2-средние группы при их обобщении с (4/)-симметрией.

Перечень (2/)-средних трехмерных точечных групп при (4/)-симметрии содержит 58 групп (фактор-группа $(4/)/(2/) \simeq 2$) и выглядит так: $\tilde{2}^{(4} \cdot 1^{/)}$; $2^{(4} \cdot 1^{/)}$; $m^{(4} \times 1^{/)}$; $(2^{(4} : m) \cdot 1^{/)}$, $(2 : m^{(4)}) \cdot 1^{/)}$, $(2^{(4} : m^{(4)}) \cdot 1^{/)}$; $(2^{(4} \cdot m) \cdot 1^{/)}$, $(2 \cdot m^{(4)}) \cdot 1^{/)}$; $(2^{(4} : 2) \cdot 1^{/)}$; $(2^{(4} \cdot m : 2) \cdot 1^{/)}$, $(2 \cdot m^{(4} : 2) \cdot 1^{/)}$, $(2^{(4} \cdot m^{(4} : 2) \cdot 1^{/)}$; $4^{(4} \cdot (1^{(2} \cdot 1^{/)}$; $\tilde{4}^{(4} \cdot (1^{(2} \cdot 1^{/)}$; $(4^{(4} : 2) \cdot 1^{/)}$, $(4 : 2^{(4)}) \cdot 1^{/)}$; $(\tilde{4}^{(4} : 2) \cdot 1^{/)}$, $(\tilde{4} : 2^{(4)}) \cdot 1^{/)}$, $(\tilde{4}^{(4} : 2^{(4)}) \cdot 1^{/)}$; $(4^{(4} \cdot m) \cdot 1^{/)}$, $(4 \cdot m^{4)}) \cdot 1^{/)}$; $(4^{(4} : m) \cdot (1^{(2} \cdot 1^{/)})$, $(4 : m^{(4)}) \cdot 1^{/)}$, $(4^{(4} : m^{(4)}) \cdot 1^{/)}$; $(4^{(4} \cdot m : 2) \cdot 1^{/)}$, $(4 \cdot m^{(4} : 2) \cdot 1^{/)}$, $(4 \cdot m : 2^{(4)}) \cdot 1^{/)}$, $(4^{(4} \cdot m^{(4} : 2) \cdot 1^{/)}$, $(4 \cdot m^{(4} : 2^{(4)}) \cdot 1^{/)}$; $(3/4^{(4)}) \cdot 1^{/)}$; $(\tilde{6}^{(4}/2) \cdot 1^{/)}$; $(3/\tilde{4}^{(4)}) \cdot 1^{/)}$; $(3/4 \cdot m^{(4)}) \cdot 1^{/)}$, $(3/4^{(4} \cdot m) \cdot 1^{/)}$, $(3/4^{(4} \cdot m^{(4)}) \cdot 1^{/)}$; $\tilde{6}^{(4} \cdot 1^{/)}$; $(3 : 2^{(4)}) \cdot 1^{/)}$; $(3 \cdot m^{(4)}) \cdot 1^{/)}$; $(3 \cdot m^{(4} : 2) \cdot 1^{/)}$, $(3 \cdot m : 2^{(4)}) \cdot 1^{/)}$, $(3 \cdot m^{(4} : 2^{(4)}) \cdot 1^{/)}$; $6^{(4} \cdot 1^{/)}$; $(6^{(4} : 2) \cdot 1^{/)}$, $(6 : 2^{(4)}) \cdot 1^{/)}$; $(3 : m^{(4)}) \cdot 1^{/)}$; $(6^{(4} \cdot m) \cdot 1^{/)}$, $(6 \cdot m^{(4)}) \cdot 1^{/)}$; $(6^{(4} : m) \cdot 1^{/)}$, $(6 : m^{(4)}) \cdot 1^{/)}$, $(6^{(4} : m^{(4)}) \cdot 1^{/)}$; $(3 : m^{(4} \cdot 2) \cdot 1^{/)}$, $(3 : m \cdot 2^{(4)}) \cdot 1^{/)}$, $(3 : m^{(4} \cdot 2^{(4)}) \cdot 1^{/)}$; $(6^{(4} : m \cdot 2) \cdot 1^{/)}$, $(6 : m^{(4} \cdot 2) \cdot 1^{/)}$, $(6 : m \cdot 2^{(4)}) \cdot 1^{/)}$, $(6^{(4} : m^{(4} \cdot 2) \cdot 1^{/)}$, $(6 : m^{(4} \cdot 2^{(4)}) \cdot 1^{/)}$.

Перечень 4-средних точечных групп $G_{30}^{4/}$ содержит также 58 групп, ибо фактор-группа $(4')/4 \simeq$ $\simeq 1/$. Умножив каждую младшую трехмерную точечную группу при (1/)-симметрии на группу 4-тождественных преобразований $1^{(4}$, получим искомый список 58 четыре-средних групп в следующем виде: $\tilde{2}^{/)} \cdot 1^{(4}$; $2^{/)} \cdot 1^{(4}$; $m^{/)} \cdot 1^{(4}$; ..., $(6 : m^{/)} \cdot 2^{/)}) \cdot 1^{(4}$ — всего 58 групп.

Список оставшихся 2-средних трехмерных точечных групп при (4/)-симметрии содержит 64 группы(фактор-группа $(4/)/2 \simeq 2/$) и выглядит следующим образом: $2^{(4} : m^{/)}$, $2^{/)} : m^{(4}$, $\tilde{2}^{(4} : m^{/)}$; $2^{(4} \cdot m^{/)}$, $2^{/)} \cdot m^{(4}$, $2^{(4} : 2^{/)}$; $m^{(4} \cdot 2 : m^{/)}$, $m^{/)} \cdot 2 : m^{(4}$, $m^{/)} \cdot 2^{(4} : m^{/)}$, $m \cdot 2^{(4} : m^{/)}$, $m^{/)} \cdot 2^{(4} : m$, $m^{/)} \cdot 2^{(4} : m^{(4}$; $(4^{(4} : 2^{/)}) \cdot 1^{(2}$, $4^{/)} : 2^{(4}$; $\tilde{4}^{(4} \cdot m^{/)} \cdot 1^{(2}$, $\tilde{4}^{/)} \cdot m^{(4}$, $\tilde{4}^{/)} : 2^{(4}$; $(4^{(4} \cdot m^{/)}) \cdot 1^{(2}$, $4^{/)} \cdot m^{(4}$; $4^{(4} : m^{/)}$, $4^{/)} : m^{(4}$, $\tilde{4}^{(4} : m^{/)}$; $4 : m^{/)} \cdot 2^{(4}$, $m^{(4} \cdot 4 : m^{/)}$, $m^{/)} \cdot 4 : m^{(4}$, $m \cdot 4^{(4} : m^{/)}$, $m \cdot 4^{/)} : m^{(4}$, $\tilde{4}^{(4} : m) \cdot 2^{/)}$, $(m^{/)} \cdot 4^{(4} : m) \cdot 1^{(2}$, $m^{(4} \cdot 4^{/)} : m$, $m^{/)} \cdot 4^{(4} : m^{/)}$, $m^{(4} \cdot 4^{/)} : m^{(4}$, $\tilde{4}^{(4} : m^{/)} \cdot 2$, $m^{/)} \cdot 4^{(4} : m^{(4}$, $m^{(4} \cdot 4^{/)} : m^{/)}$; $\tilde{6}^{(4}/4^{/)}$, $\tilde{6}^{/)}/4^{(4}$, $\tilde{6}^{/)}/\tilde{4}^{(4}$; $\tilde{6}^{(4} \cdot m^{/)}$, $\tilde{6}^{/)} \cdot m^{(4}$; $\tilde{6}^{/)} : 2^{(4}$; $6^{(4} : 2^{/)}$, $6^{/)} : 2^{(4}$; $6^{(4} \cdot m^{/)}$, $6^{/)} \cdot m^{(4}$; $6^{(4} : m^{/)}$, $6^{/)} : m^{(4}$, $\tilde{6}^{(4} : m^{/)}$; $m^{(4} \cdot 3 : m^{/)}$, $m^{/)} \cdot 3 : m^{(4}$, $3 : m^{/)} \cdot 2^{(4}$; $6 : m^{/)} \cdot 2^{(4}$, $m^{(4} \cdot 6 : m^{/)}$, $m^{/)} \cdot 6 : m^{(4}$, $m \cdot 6^{(4} : m^{/)}$, $m \cdot 6^{/)} : m^{(4}$, $\tilde{6}^{(4} : m^{/)} \cdot 2^{/)}$, $m^{/)} \cdot 6^{(4} : m$, $m^{(4} \cdot 6^{/)} : m$, $m^{/)} \cdot 6^{(4} : m^{/)}$, $m^{(4} \cdot 6^{/)} : m^{(4}$, $\tilde{6}^{(4} : m^{/)} \cdot 2$, $m^{/)} \cdot 6^{(4} : m^{(4}$, $m^{(4} \cdot 6^{/)} : m^{/)}$ — всего 64 группы.

Таким образом, группы G_{30} при (4/)-симметрии порождают 185 новых групп, из которых 5 младших и 180 Q-средних, при указанных значениях Q.

При заключительной розеточной (6/)-симметрии используемые группы G_{30} порождают младшие, а также 2-, 3-, 6- и (3/)-средние вследствие того, что группа, задающая (6/)-симметрию, обладает соответствующими четырьмя нетривиальными нормальными делителями.

Список нужных младших групп при (6/)-симметрии исчерпывается следующими 8 группами: $\tilde{6}^{(6}/4^{/)}$; $\tilde{6}^{(6} \cdot m^{/)}$; $6^{(6} : 2^{/)}$; $6^{(6} \cdot m^{/)}$; $m^{/)} \cdot 3^{(3} : m^{(2}$; $m^{/)} \cdot 6^{(3} : m^{(2}$, $m^{/)} \cdot 6^{(6} : m$, $m^{/)} \cdot 6^{(6} : m^{(2}$. Ввиду того, что фактор-группа $(6/)/2 \simeq 3/$, то 2-средних трехмерных точечных групп, согласно предыдущему разделу, будет столько, сколько младших порождают группы G_{30} при их обобщении с (3/)-симметрией, а именно 10 групп. Если каждую младшую трехмерную точечную группу при (3')-симметрии умножить на группу 2-тождественного преобразования $1^{(2}$, то получим список 2-средних трехмерных точечных групп при (6/)-симметрии в следующем виде: $(3^{(3}/4^{/)}) \times 1^{(2}$; $(3^{(3}/\tilde{4}^{/)}) \times 1^{(2}$; $(\tilde{6}^{(3}/4^{/)}) \times 1^{(2}$; $(3^{(3} : 2^{/)}) \times$ $\times 1^{(2}$; $(3^{(3} \cdot m^{/)}) \times 1^{(2}$; $(\tilde{6}^{(3} \cdot m^{/)} \times 1^{(2}$; $(6^{(3} : 2^{/)} \times 1^{(2}$; $(6^{(3} \cdot m^{/)} \times 1^{(2}$; $(m^{/)} \cdot 3^{(3} : m) \times 1^{(2}$; $(m^{/)} \cdot 6^{(3} : m) \times 1^{(2}$ — всего 10 групп.

При фактор-группе $(6/)/3 \simeq 2/$3-средних трехмерных точечных групп при (6/)-симметрии будет 64, ибо группы G_{30} порождают столько младших, когда они обобщаются с (2/)-симметрией. Если каждую младшую трехмерную точечную группу при (2/)-симметрии умножить на группу 3-тождественного преобразования $1^{(3}$, то получим список искомых 64 3-средних точечных групп при (6/)-симметрии в следующем виде: $(2^{(2} : m^{/)}) \times 1^{(3}$; $(2^{/)} : m^{(2}) \times 1^{(3}$; ..., $(m^{(2} \cdot 6^{/)} : m^{/)}) \times 1^{(3}$ — всего 64 группы.

Поскольку фактор-группа $(6/)/6 \simeq 1/$, то 6-средних трехмерных точечных групп при (6/)-симметрии будет 58, ибо столько младших группы G_{30} порождают при их обобщении с (1/)-симметрией. Умножив каждую младшую трехмерную точечную группу при (1/)-симметрии на группу 6-тождественных преобразований $1^{(6}$, получим список 58 6-средних трехмерных точечных групп при (6/)-симметрии в таком виде: $\tilde{2}^{/)} \times 1^{(6}$; $2^{/)} \times 1^{(6}$; $m^{/)} \times 1^{(6}$; $(2^{/)} : m) \times 1^{(6}$, $(2 : m^{/)}) \times 1^{(6}$, $(2^{/)} : m^{/)}) \times 1^{(6}$; ..., $(6 : m^{/)} \cdot 2^{/)}) \times 1^{(6}$ — всего 58 групп.

Если фактор-группа $(6/)/(3/) \simeq 2$, то (3/)-средних трехмерных точечных групп при (6/)-симметрии будет также 58, так как столько младших групп порождают группы G_{30} при их обобщении с 2-симметрией. Если каждую младшую трехмерную точечную группу при 2-симметрии умножить на группу $1^{(3/)} = 1^{(3} \cdot 1^{/)}$, то получим (3/)-средние трехмерные точечные группы при (6/)-симмет-

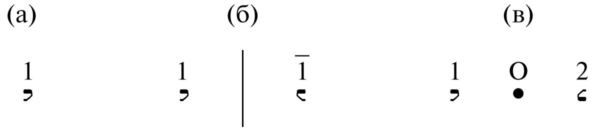

Рис. 1. Наглядные геометрические схемы: а – 1-симметрия ($P = 1$), б – (1')-симметрия ($P = \{(1, \bar{1}\})$, в – 2-симметрия ($P = (\{(1, 2)\})$.

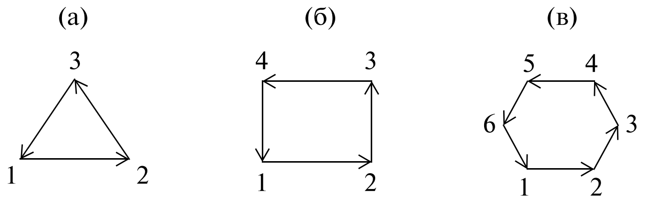

Рис. 2. Наглядные геометрические схемы p-симметрий: а – 3-симметрия ($P = \{(1, 2, 3)\}$), б – 4-симметрия ($P = \{(1, 2, 3, 4)\}$), в – 6-симметрия ($P = \{(1, 2, 3, 4, 6)\}$).

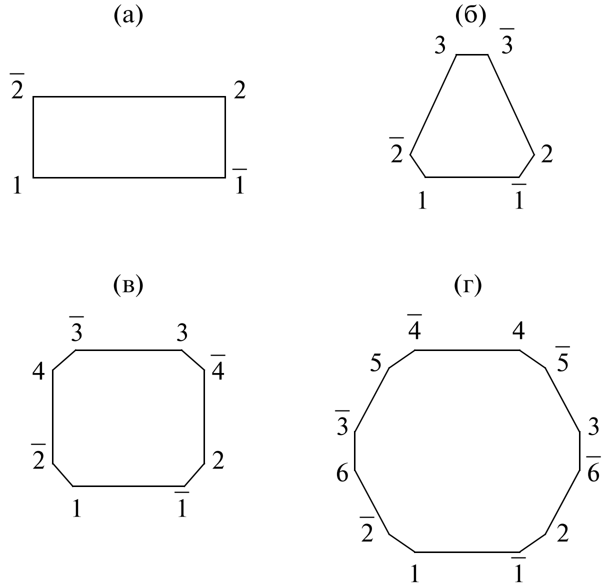

Рис. 3. Наглядные геометрические схемы (p')-симметрий: а – (2')-симметрия ($P = \{(1, 2)(\bar{2}, \bar{1}), (1, \bar{1})(2, \bar{2})\}$), б – (3')-симметрия ($P = \{(1, 2, 3)(\bar{3}, \bar{2}, \bar{1}), (1, \bar{1})(2, \bar{2})(3, \bar{3})\}$), в – (4')-симметрия ($P = \{(1, 2, 3, 4)(\bar{4}, \bar{3}, \bar{2}, \bar{1}), (1, \bar{1})(2, \bar{2})(3, \bar{3})(4, \bar{4})\}$), г – (6') симметрия ($P = \{(1, 2, 3, 4, 6)(\bar{6}, \bar{5}, \bar{4}, \bar{3}, \bar{1}),(1, \bar{1})(2, \bar{2})(3, \bar{3})(4, \bar{4})(6, \bar{6})\}$).

рии в следующем виде: $\tilde{2}^{(2} \times 1^{(3} \cdot 1^{/)}$; $2^{(2} \times (1^{(3} \cdot 1^{/)})$; $m^{(2} \times (1^{(3} \cdot 1^{/)}; \ldots, (6 : m^{(2} \cdot 2^{(2)}) \times (1^{(2} \cdot 1^{/)})$ – всего 58 групп.

В итоге при обобщении групп G_{30} с розеточной (6/)-симметрией приходим к 198 новым группам, из которых 8 младших и 190 Q-средних при отмеченных значениях Q. А при обобщении всех классических 32 трехмерных точечных групп категории G_{30} с розеточными P-симметриями при $P \simeq G_{20}$ получается 1208 новых групп, из которых 32 порождающих, 288 старших, 221 младшая и 667 Q-средних. Отметим, что при выписывании этих Q-средних групп при 6-, (2/)-, (3/)- и (6/)- симметриях использована возможность применения сокращенного метода их записи благодаря тому, что Q-средние группы отмеченных P-симметрий разлагаются в произведение младшей группы и группы, характеризующей Q-тождественные преобразования, а при 4- и (4/)-симметриях не для всех видов Q-средних групп отмеченное условие выполняется, поэтому в этих случаях пришлось приводить полный список Q-средних трехмерных точечных групп указанных P-симметрий.

СООТНОШЕНИЕ МЕЖДУ ТРЕХМЕРНЫМИ ТОЧЕЧНЫМИ ГРУППАМИ РОЗЕТОЧНЫХ P-СИММЕТРИЙ И ПЯТИМЕРНЫМИ ГРУППАМИ СИММЕТРИИ КАТЕГОРИИ G_{530}

Покажем, что представленными трехмерными точечными группами G_{30}^{p} розеточных P-симметрий, исчерпывающихся p- и (p/)-симметриями при $p = 1, 2, 3, 4, 6$, интерпретируются с точностью до строения все различные группы симметрии категории G_{530}, т.е. пятимерные группы симметрии с инвариантными трехмерной плоскостью и неподвижной точкой на ней. Для этого рассмотрим единственную группу 1 нульмерного пространства E_0, порожденную тождественным преобразованием e. При ее обобщении с 10 розеточными P-симметриями, следуя общей теории P-симметрии [5, 6], получаем одну порождающую группу 1 и девять старших $1 \times 1^{(2)}$, $1 \times 1^{(3)}$, $1 \times 1^{(4)}$, $1 \times 1^{(6)}$, $1 \times 1^{/}$, $1 \times (1^{(2} \cdot 1^{/)})$, $1 \times (1^{(3} \cdot 1^{/)})$, $1 \times (1^{(4} \cdot 1^{/)})$, $1 \times (1^{(6} \cdot 1^{/)})$, т.е. 10 групп G_0^p, не отличающихся от самих групп P подстановок индексов, задающих розеточные P-симметрии. Но наглядные геометрические схемы этих 10 групп P на плоскости (асимметричная точка с индексом 1 (рис. 1а), пара симметричных относительно оси асимметричных точек с индексами 1 и $\bar{1}$ (рис. 1б), пара симметричных друг другу относительно центра асимметричных точек с индексами 1 и 2 (рис. 1в) для 1-, (1/)- и 2-симметрии; ориентированные правильный треугольник, квадрат и правильный шестиугольник, вершины которых пронумерованы последовательно индексами 1, 2, 3 (рис. 2а), 1, 2, 3, 4 (рис. 2б), 1, 2, 3, 4, 5, 6 (рис. 2в), а также равноугольно полуправильные 4-угольник, 6-угольник, 8-угольник и 12-угольник, вершины которых последовательно обозначены индексами 1, $\bar{1}$, 2, $\bar{2}$ (рис. 3а), 1, $\bar{1}$, 2, $\bar{3}$, 3, $\bar{2}$ (рис. 3б), 1, $\bar{1}$, 2, $\bar{4}$, 3,

$\bar{3}$, 4, $\bar{2}$ (рис. 3в), 1, $\bar{1}$, 2, $\bar{6}$, 3, $\bar{5}$, 4, $\bar{4}$, 5, $\bar{3}$, 6, $\bar{2}$ (рис. 3г) таким образом, чтобы полная группа симметрии каждого равноугольно-полуправильного $2p$-угольника при $p = 2$, 3, 4 и 6 задавалась группой $P = \{(1, 2, \ldots, p)(\bar{p}, \ldots, \bar{2}, \bar{1}), \quad (1, \bar{1})\ldots(p, \bar{p})\}$ подстановок их вершин, характеризующей (p')-симметрию) явно дают их интерпретацию в виде кристаллографических групп симметрии односторонних розеток G_{20}, благодаря чему p- и ($p/$)-симметрии при $p = 1$, 2, 3, 4, 6 в [8] были названы розеточными.

Таким образом, между нульмерными группами G_0^P десяти розеточных P-симметрий и кристаллографическими точечными группами симметрии розеток G_{20} (рис. 1–3), извлеченных из [8], устанавливается не только взаимно однозначное, но и сильно изоморфное соответствие, из которого следует, что первая цифра индекса групп симметрии G_{20}, интерпретируемых нульмерными группами G_0^P 10 розеточных P-симметрий, равна сумме размерности пространства, в котором розеточные P-симметрии задают двумерные кристаллографические группы симметрии G_{20}, и размерности нульмерного пространства, в котором находится группа 1, используемая при ее обобщении с розеточными P-симметриями для получения упомянутых нульмерных групп G_0^P розеточных P-симметрий, а второй индекс символа G_{20} совпадает с символом нульмерного пространства, в котором содержится порождающая группа 1, а также, что группы подстановок индексов, приписываемых точкам трехмерной плоскости при исследовании трехмерных точечных групп G_{30}^P розеточных P-симметрий при $P \simeq G_{20}$, интерпретируют с точностью до строения в пространстве E_2 двумерные точечные группы G_{20} розеток.

Точно такое же соответствие, как между нульмерными группами G_0^P розеточных P-симметрий и группами симметрии односторонних розеток G_{20}, устанавливается между трехмерными кристаллографическими точечными группами G_{30}^P розеточных P-симметрий и пятимерными группами симметрии категории G_{530}, ибо отмеченные трехмерные точечные группы G_{30}^P базируются на 32 кристаллографических точечных группах симметрии G_{30}, преобразующих трехмерное пространство E_3, и на 10 розеточных P-симметриях, интерпретирующих в дополнительном двумерном пространстве E_2 10 двумерных кристаллографических точечных групп симметрии розеток G_{20}.

Опираясь на все сказанное выше, приходим к выводу, что порождающие группы категории G_{30}^P розеточных P-симметрий задают такие пятимерные группы симметрии, которые преобразуют трехмерное подпространство пятимерного подпространства, а дополняющее его двумерное подпространство до пятимерного оставляют нейтральным. Старшие группы категории G_{30}^P розеточных P-симметрий задают такие пятимерные группы симметрии, которые одновременно и независимо друг от друга преобразуют трехмерное и двумерное подпространства пятимерного пространства ввиду того, что каждая старшая группа из множества G_{30}^P розеточных P-симметрий разлагается в прямое произведение порождающей группы, преобразующей трехмерное подпространство E_3 пятимерного пространства E_5, и группы розеточной P-симметрии, преобразующей дополнительное двумерное подпространство E_2 того же пятимерного пространства. Младшие группы из множества G_{30}^P розеточных P-симметрий, изоморфные порождающим, задают пятимерные группы симметрии, которые целиком преобразуют пятимерное пространство E_5 как единое целое. Строение пятимерных групп симметрии категории G_{530}, задаваемых Q-средними группами из множества G_{30}^P розеточных P-симметрий, зависит от самой розеточной P-симметрии, при которой классические группы G_{30} порождают Q-средние.

Так, 2-средние группы при 4-симметрии категории G_{30}^P розеточных P-симметрий интерпретируют пятимерные группы симметрии, у которых к ранее полученным пятимерным группам симметрии, моделируемых младшими трехмерными точечными группами розеточных P-симметрий при 2-симметрии, добавляется в дополнительном двумерном пространстве поворот второго порядка вокруг инвариантной точки соответствующих пятимерных групп симметрии, действующий на преобразования симметрии исходных пятимерных групп.

(2/)-Средние трехмерные точечные группы G_{30}^P при (4/)-симметрии интерпретируют пятимерные группы симметрии G_{530}, у которых к пятимерным группам симметрии, связанным с 2-средними группами при 4-симметрии категории G_{30}^P, добавляется в дополнительном двумерном пространстве преобразование симметрии, порожденное отражением от прямой, проходящей через инвариантную точку группы G_{530}. В свою очередь 4-средние группы при (4/)-симметрии категории G_{30}^P розеточных P-симметрий интерпретируют пятимерные группы симметрии G_{530}, у которых к пятимерным группам симметрии, моделируемых младшими группами (1/)-симметрии категории G_{30}^P, добавляется в дополнительном двумерном пространстве группа симметрии, порожденная четвертным поворотом вокруг инвариантной точки пятимерной группы симметрии G_{530}. Наконец, 2-средними группами категории G_{30}^{P} при (4/)-симметрии моделируются такие пятимерные группы симметрии категории G_{530}, которые отличаются от групп симметрии, моделируемых младшими группами (2/)-симметрии категории G_{30}^{P}, группой второго порядка, порожденной двойным поворотом в дополнительном двумерном пространстве вокруг инвариантной точки группы G_{530}.

Что касается устройства пятимерных групп симметрии категории G_{530}, интерпретируемых остальными типами Q-средних трехмерных точечных групп G_{30}^{P} розеточных P-симметрий при 6-, (2/)-, (3/)- и (6/)-симметриях, то они в основном сходны между собой. Так, пятимерные группы симметрии, моделируемые 2-средними группами при 6-симметрии категории G_{30}^{P} розеточных P-симметрий, отличаются от пятимерных групп симметрии используемой категории, интерпретируемых младшими точечными группами G_{30}^{P} при 3-симметрии, только группой, порожденной поворотом второго порядка в дополнительном двумерном пространстве вокруг особенной точки сравниваемой группы.

Аналогичными свойствами обладают пятимерные группы симметрии G_{530}, интерпретируемые 3-средними группами категории G_{30}^{P} при 6-симметрии. Именно они отличаются от пятимерных групп симметрии G_{530}, интерпретируемых младшими группами G_{30}^{P} при 2-симметрии, только группой, порожденной в дополнительном двумерном пространстве поворотом третьего порядка вокруг особенной точки используемой группы симметрии.

Сходным образом группы симметрии, моделируемые 3-средними группами при (3/)-симметрии категории G_{30}^{P}, отличаются от пятимерных групп симметрии, интерпретируемых младшими трехмерными точечными группами при (1/)-симметрии категории G_{30}^{P}, только тройным поворотом в дополнительном двумерном пространстве вокруг инвариантной точки используемых групп симметрии.

В свою очередь 2-средние точечные группы при (6/)-симметрии категории G_{30}^{P} розеточных P-симметрий будут интерпретировать пятимерные группы симметрии G_{530}, которые отличаются от пятимерных групп симметрии, моделируемых младшими трехмерными точечными группами (3/)-симметрии, только поворотом второго порядка вокруг инвариантной точки упомянутых групп симметрии в дополнительном двумерном пространстве.

Пятимерные группы симметрии, моделируемые 3-средними трехмерными точечными группами G_{30}^{P} при (6/)-симметрии, будут отличаться от соответствующих групп симметрии, моделируемых младшими трехмерными точечными группами G_{30}^{P} при (2/)-симметрии, только поворотом третьего порядка в дополнительном двумерном пространстве вокруг инвариантной точки упомянутых групп симметрии.

Что касается групп симметрии, интерпретируемых 6-средними трехмерными точечными группами G_{30}^{P} при (6/)-симметрии, то они будут отличаться от пятимерных групп симметрии G_{530}, моделируемых младшими трехмерными точечными группами G_{30}^{P} (1/)- симметрии, только поворотом 6 порядка вокруг инвариантной точки упомянутых групп симметрии в дополнительном двумерном пространстве.

Наконец, (3/)-средние точечные группы G_{30}^{P} при (6/)-симметрии будут интерпретировать пятимерные группы G_{530}, которые отличаются от пятимерных групп симметрии, моделируемых младшими трехмерными точечными группами 2-симметрии, только группой 6 порядка $3 \cdot m$ в дополнительном двумерном пространстве.

Такое разнообразие структур пятимерных групп симметрии G_{530}, интерпретируемых разными типами трехмерных точечных групп G_{30}^{P} розеточных P-симметрий, объясняется тем, что порождающие, младшие и Q-средние группы G_{30}^{P} розеточных P-симметрий являются подгруппами старших групп этой категории.

В целом между выявленными 1208 трехмерными точечными группами розеточных P-симметрий и пятимерными группами симметрии категории G_{530} устанавливается не только взаимно однозначное, но и сильно изоморфное соответствие, означающее, что группа категории G_{30}^{P} розеточных P-симметрий и моделируемая ею группа симметрии категории G_{530} имеют одинаковое строение. Следовательно, пятимерных групп симметрии, сохраняющих в пятимерном евклидовом пространстве трехмерную плоскость и точку на ней, т.е. групп симметрии категории G_{530} насчитывается ровно 1208. Причем символику, в которой записаны трехмерные точечные группы G_{30}^{P} розеточных P-симметрий, можно использовать и для записи интерпретируемых ими пятимерных групп симметрии G_{530} при соответствующем геометрическом толковании в дополнительном двумерном пространстве индексов и знаков, приписываемых точкам трехмерного пространства при выводе трехмерных точечных групп розеточных P-симметрий. Последнее утверждение является весьма важным, так как до сих пор не выявлены пути создания символики для записи n-мерных групп симметрии при $n \geq 4$.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

С помощью приведенного каталога трехмерных точечных групп G_{30}^P 10 розеточных P-симметрий в геометрической классификации установлено, что имеется 1208 различных пятимерных групп симметрии с инвариантными трехмерной плоскостью и точкой на ней, т.е. групп симметрии категории G_{530}, которые интерпретируются с точностью до строения трехмерными точечными группами G_{30}^P розеточных P-симметрий при $P \simeq G_{20}$. Следовательно, используемая в настоящей работе смешанная шубниковская и заморзаевская символики для записи трехмерных точечных групп G_{30}^P розеточных P-симметрий задает одновременно и сами искомые пятимерные группы симметрии с инвариантными трехмерной плоскостью и точкой на ней, т.е. группы симметрии категории G_{530}, которые интерпретируются с точностью до строения трехмерными точечными группами G_{30}^P розеточных P-симметрий при $P \simeq G_{20}$.

При решении поставленной задачи получены важные побочные результаты:

– для всех групп P, задающих 10 розеточных кристаллографических P-симметрий, найдены их нетривиальные нормальные делители;

– составлены фактор-группы отмеченных групп P по всем их нетривиальным нормальным делителям и указаны группы P, задающие розеточные P-симметрии, которым эти фактор-группы сильно изоморфны, использованные при решении поставленной задачи.

Приведенное число различных пятимерных групп симметрии категории G_{530} является абсолютно точным. Уверенность в этом основывается на том факте, что групп симметрии категории G_{530} должно быть столько, как отмечено на стр. 97 в [6], сколько групп симметрии содержит категория G_{520}. Но группы симметрии категории G_{520} интерпретируются двумерными точечными группами G_{20}^P 32 кристаллографических P-симметрий в геометрической классификации, а таких групп, как указано в [6] на стр. 46, также 1208, из которых 10 порождающих, 310 старших, 79 младших и 809 Q-средних.

Таким образом, количество пятимерных групп симметрии категории G_{530} подсчитано двумя независимыми способами – с помощью трехмерных точечных групп G_{30}^P розеточных P-симметрий, с одной стороны, и с помощью двумерных точечных групп G_{20}^P кристаллографических P-симметрий, с другой. Совпадение результатов подсчета количества пятимерных групп симметрии совпадающих категорий G_{530} и G_{520} двумя отмеченными независимыми методами говорит о том, что поученное число 1208 групп симметрии категории G_{530} не вызывает сомнения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Janner A., Janssen T.* // Phys. Rev. B. Solid State. 1977. V. 15. № 2. P. 643.
2. *Brown H., Bulow R., Neubuser J. et al.* Crystallographic groups of four-dimensional space. New-York: Jonn Wiley and Sons, 1978. 438 p.
3. *Делоне Б., Падуров Н., Александров А.* Математические основы структурного анализа кристаллов. Л.; М.: ОНТИ. ГТТИ, 1934. 337 с.
4. *Делоне Б.Н., Галиулин Р.В., Штогрин М.И. О. Браве.* Избранные научные труды. М.: Наука, 1974. 419 с.
5. *Заморзаев А.М., Галярский Э.И., Палистрант А.Ф.* Цветная симметрия, ее обобщения и приложения. Кишинёв: Штиинца, 1978. 275 с.
6. *Заморзаев А.М., Карпова Ю.С., Лунгу А.П., Палистрант А.Ф.* P-симметрия и ее дальнейшее развитие: Кишинёв: Штиинца, 1986. 156 с.
7. *Заморзаев А.М.* Теория простой и кратной антисимметрии. Кишинёв: Штиинца, 1976. 283 с.
8. *Палистрант А.Ф.* // Алгебраические структуры и геометрия. Кишинёв: Штиинца, 1991. С. 92.
9. *Палистрант А.Ф.* // Кристаллография. 2000. Т. 45. № 6 . С. 967.
10. *Палистрант А.Ф.* // Докл. АН СССР. 1981. Т. 260. № 4. С. 884.
11. *Заморзаев А.М., Палистрант А.Ф.* // Кристаллография. 1999. Т. 44. № 6. С. 976.
12. *Палистрант А.Ф., Заморзаев А.М.* // Кристаллография. 2000. Т. 45. № 1. С. 7.
13. *Палистрант А.Ф.* // Studia Universitatis. Revista Ştiinăşţifică. Seria: Ştiinţe exacte şi economice (Matematică. Informatică. Economie): nr. 7 (27). Chişinău: Universitatea de Stat din Moldova. 2009. P. 12.
14. *Заморзаев А.М.* // Изв. АН РМ. Математика. 1994. № 1(14). С. 75.
15. *Палистрант А.Ф.* // Кристаллография. 2012. Т. 57. № 4. С. 562.
16. *Заморзаев А.М., Палистрант А.Ф.* Теория дискретных групп симметрии. Кишинёв: Изд-во КГУ, 1977. 100 с.
17. *Шубников А.В.* Симметрия и антисимметрия конечных фигур. М.: Изд-во АН СССР, 1951. 172 с.