КРИСТАЛЛОГРАФИЯ, 2012, том 57, № 6, с. 886–896

УДК 548.55

ОПТИЧЕСКИЕ ОСИ В РАЗЛИЧНЫХ ПОГЛОЩАЮЩИХ КРИСТАЛЛАХ

© 2012 г. Т. Г. Головина, А. Ф. Константинова, Е. А. Евдищенко, Б. В. Набатов, К. К. Константинов

Институт кристаллографии РАН, Москва
E-mail: tatgolovina@mail.ru

Поступила в редакцию 24.05.2012 г.

Найдены аналитические выражения для компонент комплексного тензора диэлектрической проницаемости в зависимости от количества оптических осей, существующих в поглощающих моноклинных кристаллах. Рассмотрены особенности ориентации этих осей. Рассчитаны эллиптичности собственных волн для таких кристаллов, а также эллиптичности прошедшего света при нормальном падении на кристалл волны правой или левой круговой поляризации. Показано существенное отличие частных случаев поглощающих моноклинных кристаллов от общего случая кристалла с четырьмя круговыми осями.

ВВЕДЕНИЕ

Теория распространения света в поглощающих одноосных кристаллах развита достаточно давно [1]. Основы теории распространения света в поглощающих ромбических кристаллах были заложены В. Фойгтом и П. Друде [2, 3]. В этих работах использовалась система главных осей. Для ромбического кристалла такое упрощение всегда применимо. Но для моноклинного и триклинного кристаллов такой подход применим не всегда. В общем случае “направления главных осей” комплексного симметричного тензора диэлектрической проницаемости являются комплексными и не имеют прямого геометрического и физического смысла. К тому же возможны случаи, когда комплексный симметричный тензор вообще не приводится к диагональному виду. В книге Ф.И. Федорова [4] построена общая теория распространения света в поглощающих кристаллах с помощью ковариантных методов. В [4] были рассмотрены различные варианты поглощающих низкосимметричных кристаллов при разном виде тензора ε^{-1}. Исследования продолжил А.М. Гончаренко, его результаты отражены в [5–7], где в частности рассмотрены сечения поверхностей рефракции и абсорбции для таких кристаллов.

Ранее были изучены положение оптических осей и изменение эллиптичностей собственных волн в их окрестности для случая существования четырех круговых оптических осей в моноклинных и ромбических кристаллах [8–11]. В предлагаемой работе рассматривается эллиптичность собственных волн для различных нетривиальных вариантов поглощающих моноклинных кристаллов, а также эллиптичность прошедшего света для правой и левой круговых поляризаций падающего света.

Приведенные ниже результаты получены с помощью матричного метода Д. Берремана [12], в котором введена дифференциальная матрица распространения Δ. Компоненты матрицы зависят от компонент тензоров, описывающих оптические свойства кристалла, и ориентации главных направлений тензоров в лабораторной системе координат. Характеристическое уравнение матрицы Δ определяет при нормальном падении света показатели преломления N распространяющихся в кристалле собственных волн, а при наклонном падении – проекции векторов рефракции этих волн на ось Z (направление нормали к пластинке). Собственные векторы $\{E_x, H_y, E_y, -H_x\}$ матрицы Δ являются обобщенными векторами полей собственных волн, распространяющихся внутри кристалла (преломленных и отраженных). Отношения E_y/E_x и H_y/H_x определяют состояния поляризации **E**- и **H**-полей собственных волн. Эллиптичность прошедшего света *Elt* вычислена из решения граничной задачи с учетом многократных отражений.

Для обоснования полученных результатов приведем необходимые сведения, изложенные в [4].

ОПТИЧЕСКИЕ ОСИ ПОГЛОЩАЮЩЕГО МОНОКЛИННОГО И РОМБИЧЕСКОГО КРИСТАЛЛОВ

К моноклинным относятся кристаллы классов 2, *m*, 2/*m*, к ромбическим – классы 222, *mm*2, *mmm*. Пусть для моноклинного кристалла ось 2 параллельна оси Z, а плоскость *m* перпендикулярна оси Z, тогда тензор ε можно представить в виде [4, 13]:

$$\begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}. \quad (1)$$

В общем случае комплексный симметричный тензор, каким является ε или ε^{-1}, приводится к диагональному виду. Но возможны варианты, когда тензор не приводится к диагональному виду [4, 14].

Тензор ε^{-1} для моноклинного кристалла в бескоординатной форме записывается в виде [4]:

$$\varepsilon^{-1} = a + b(\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}'' + \mathbf{c}'' \cdot \mathbf{c}'), \quad (2)$$

где a – одно из собственных значений тензора ε^{-1}, $\mathbf{c}' \cdot \mathbf{c}''$ – диада [14], $\mathbf{c}'$, $\mathbf{c}''$ – комплексные векторы, определяющие положения оптических осей кристалла. Векторы $\mathbf{c}'$ и $\mathbf{c}''$ лежат в основной плоскости. Под основной плоскостью моноклинного кристалла понимается плоскость симметрии m или плоскость, перпендикулярная оси симметрии второго порядка. Далее для моноклинного кристалла всегда рассматривается только случай, когда основная плоскость – плоскость XOY, поэтому векторы $\mathbf{c}'$ и $\mathbf{c}''$ записываются в виде

$$\mathbf{c}' = \{c_1', c_2', 0\}, \quad \mathbf{c}'' = \{c_1'', c_2'', 0\}. \quad (3)$$

Направляющие векторы $\mathbf{n}_\pm$ оптических осей кристалла определяются формулой

$$\mathbf{n}_\pm = \frac{\sqrt{(\mathbf{c}^*)^2}\mathbf{c} + \sqrt{\mathbf{c}^2}\mathbf{c}^* \pm i \cdot [\mathbf{c}\mathbf{c}^*]}{|\mathbf{c}|^2 + |\mathbf{c}^2|}, \quad (4)$$

где $\mathbf{c} = \mathbf{c}'$ или $\mathbf{c} = \mathbf{c}''$.

Оптические оси $\mathbf{n}_\pm$, отвечающие одному и тому же вектору ($\mathbf{c}'$ или $\mathbf{c}''$), называются сопряженными оптическими осями.

Вектор $\mathbf{c}$, т.е. любой из векторов $\mathbf{c}'$ и $\mathbf{c}''$, является линейным, если $[\mathbf{c}\mathbf{c}^*] = 0$; круговым, если $\mathbf{c}^2 = 0$; эллиптическим, если $[\mathbf{c}\mathbf{c}^*] \neq 0$ и $\mathbf{c}^2 \neq 0$ [4].

Из (4) видно, что линейному вектору $\mathbf{c}$ соответствует изотропная оптическая ось, лежащая в основной плоскости, круговому – круговая оптическая ось, перпендикулярная основной плоскости, а эллиптическому вектору $\mathbf{c}$ соответствуют две круговые оси, симметричные относительно основной плоскости [4]. В общем случае векторы $\mathbf{c}'$ и $\mathbf{c}''$ эллиптические, и моноклинный кристалл имеет четыре круговые оси. Но при определенных соотношениях между компонентами комплексного тензора диэлектрической проницаемости ε может быть и одна, и две, и три круговые оптические оси, а может быть одна изотропная оптическая ось при наличии одной или двух круговых осей [4]. Количество осей и их свойства (круговая ось или изотропная) зависят от того, к какому типу относится каждый из векторов $\mathbf{c}'$ и $\mathbf{c}''$.

Для ромбического кристалла комплексный тензор диэлектрической проницаемости приводится к диагональному виду. Формулы (2), (4) применимы и в этом случае. Векторы $\mathbf{c}'$ и $\mathbf{c}''$ лежат в одной из трех главных плоскостей и являются либо оба линейными, либо оба эллиптическими [4], соответственно в таком кристалле есть либо две изотропные, либо четыре круговые оси, симметрично расположенные относительно главных плоскостей.

Ниже рассмотрим различные случаи (I–VI) поглощающих моноклинных кристаллов, предложенные Ф.И. Федоровым [4]. Для случая I вид тензора ε^{-1} определен в [4], а для случаев II–VI получен следующим образом.

Обозначив $\beta = \varepsilon^{-1}$, запишем (2) и (3) в координатной форме, учитывая, что тензор ε^{-1} для моноклинных кристаллов имеет тот же вид (1), что и тензор ε [4]:

$$\begin{pmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & 0 \\ \beta_{12} & \beta_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \beta_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2bc_1'c_1'' & b(c_1'c_2'' + c_2'c_1'') & 0 \\ b(c_1'c_2'' + c_2'c_1'') & a + 2bc_2'c_2'' & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}. \quad (5)$$

Приравнивая соответствующие компоненты правой и левой частей, принимая во внимание, что $\beta_{33} = a$, получим три уравнения

$$\beta_{12} = b(c_2'c_1'' + c_1'c_2''); \quad \beta_{11} - \beta_{33} = 2bc_1'c_1''; \\ \beta_{22} - \beta_{33} = 2bc_2'c_2''. \quad (6)$$

Еще два соотношения для компонент векторов $\mathbf{c}'$ и $\mathbf{c}''$ получаются при задании типа этих векторов, т.е. зависят от того, является ли каждый из них линейным, круговым или эллиптическим.

Эти соотношения и (4) определяют, каким должен быть тензор ε^{-1}, чтобы векторы $\mathbf{c}'$ и $\mathbf{c}''$, определяющие его оптические оси, были именно того типа, который задан для каждого из них. Определяется при этом и значение b.

Если тензор ε^{-1} уже задан, из этих пяти соотношений определяются компоненты векторов $\mathbf{c}'$ и $\mathbf{c}''$ и величина b.

I. Одна круговая оптическая ось

Пусть $\mathbf{c}' = \mathbf{c}'' = \mathbf{c}$, $\mathbf{c}$ – круговой вектор. Тензор ε^{-1} для такого кристалла записывается в виде:

$$\varepsilon^{-1} = a + b(\mathbf{c} \cdot \mathbf{c}), \quad \mathbf{c} = \{c_1, c_2, 0\}, \quad \mathbf{c}^2 = 0. \quad (7)$$

Из (4) видно, что в этом случае круговая оптическая ось перпендикулярна основной плоскости (параллельна оси Z).

Обозначим $\varepsilon^{-1} = \beta$ и, используя (2), (3), запишем систему уравнений

$$\beta_{12} = bc_1c_2, \quad \beta_{11} - \beta_{33} = bc_1^2, \\ \beta_{22} - \beta_{33} = bc_2^2, \quad \mathbf{c}^2 = 0. \quad (8)$$

Тензор ε, удовлетворяющий системе уравнений (8), можно представить в виде [4] (α, γ – комплексные числа):

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \alpha - \gamma & \pm i\gamma & 0 \\ \pm i\gamma & \alpha + \gamma & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}. \qquad (9)$$

Все три главных значения тензора ε одинаковы, и он не приводится к диагональному виду. В таком же виде (9) можно записать и тензор ε^{-1}. Разумеется, значения α и γ станут другими.

Для тензора ε вида (9) при нормальном падении найдем выражения для собственных значений и собственных векторов матрицы Δ в зависимости от угла поворота θ плоскости *YOZ* вокруг оси *X*. В этом случае собственные значения совпадают с показателями преломления волн в кристалле и имеют вид:

$$\xi(\theta) = \{-n, n_1, -n_2, n_2\}, \qquad (10)$$

где $n_1 = \sqrt{\alpha}$, $n_2 = \dfrac{\sqrt{2}\alpha}{\sqrt{2\alpha + \gamma - \gamma\cos 2\theta}}$.

Собственным значениям с положительной действительной частью отвечают волны прямого хода, а с отрицательной – волны обратного хода, отраженные от выходной грани обратно в кристалл [12]. Из (10) видно, что в таком кристалле распространяются обыкновенная (ее показатель преломления не зависит от θ) и необыкновенная волны.

Собственные векторы $\mathbf{u}_i = \{E_{xi}, H_{yi}, E_{yi}, -H_{xi}\}$ матрицы Δ, соответствующие собственным значениям (10), имеют вид:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{u}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mp i\cos\theta/n_1 & \pm i\cos\theta & -1/n_1 & 1 \\ \pm i\cos\theta/n_1 & \pm i\cos\theta & 1/n_1 & 1 \\ \mp i\sec\theta/n_2 & \pm i\sec\theta & -1/n_2 & 1 \\ \pm i\sec\theta/n_2 & \pm i\sec\theta & 1/n_2 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (11)$$

Эллиптичности собственных волн в кристалле определяются из соотношения:

$$k_i = \mathrm{tg}[\arcsin(2\,\mathrm{Im}\,\tau_i/(1 + |\tau_i|^2))/2], \quad \tau_i = E_{yi}/E_{xi} \quad \text{или} \quad \tau_i = H_{yi}/H_{xi}. \qquad (12)$$

При нормальном падении световой волны эллиптичности k_i, рассчитанные для **E**- и **H**-полей, равны.

Из (11) и (12) видно, что величины эллиптичностей собственных волн в таком кристалле зависят только от угла θ и не зависят от конкретных значений α и γ. Эллиптичности равны ±1 вдоль оптической оси θ = 0 и равны нулю при θ = 90° (положение, перпендикулярное к оптической оси).

Собственные значения матрицы Δ при θ = 0 в зависимости от угла падения ϕ, т.е. при косом падении:

$$\xi = \{-\xi_1, \xi_1, -\xi_2, \xi_2\}, \quad \xi_1 = \sqrt{\alpha - \sin^2\phi}, \quad \xi_2 = \sqrt{\frac{\alpha^2 - \alpha\sin^2\phi + \gamma\sin^2\phi}{\alpha}}. \qquad (13)$$

При косом падении собственные значения ξ_i уже не равны показателям преломления.

Собственные векторы $\mathbf{u}_i = \{E_{xi}, H_{yi}, E_{yi}, -H_{xi}\}$ матрицы Δ, соответствующие собственным значениям (13):

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{u}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mp i/\xi_1 & \pm i\alpha/\xi_1^2 & -1/\xi_1 & 1 \\ \pm i/\xi_1 & \pm i\alpha/\xi_1^2 & 1/\xi_1 & 1 \\ \mp i\xi_1^2/(\alpha\xi_2) & \pm i & -1/\xi_2 & 1 \\ \pm i\xi_1^2/(\alpha\xi_2) & \pm i & 1/\xi_2 & 1 \end{pmatrix}. \qquad (14)$$

Из (14) видно, что при косом падении для одной собственной волны проекция вектора **E** на плоскость *XOY* имеет круговую поляризацию, а вектора **H** – эллиптическую. Для другой собственной волны, наоборот, проекция вектора **H** на плоскость *XOY* имеет круговую поляризацию, а вектора **E** – эллиптическую. Это обусловлено тем, что при косом падении волны в кристалле являются неоднородными (в поглощающем кристалле волны однородны только при нормальном падении). Под эллиптичностью собственных волн при косом падении подразумевается эллиптичность проекций эллипсов поляризации собственных волн на плоскость *XOY*.

На приведенных ниже рисунках представлены следующие результаты:

а, а' – зависимости эллиптичностей собственных волн k_1, k_2 от угла падения ϕ и угла поворота φ кристалла вокруг оси *Z* в цилиндрической системе координат, при этом ϕ отсчитывается по радиусу, а φ – как угол поворота этого радиуса;

б, б' – зависимость эллиптичностей собственных волн k_1, k_2 от угла поворота θ плоскости *YOZ* вокруг оси *X*;

в, в' – зависимость эллиптичностей прошедшего света *Elt* от угла θ при правой (сплошная кривая) и левой (пунктирная кривая) круговой поляризации падающего света.

При правой круговой поляризации эллиптичность волны равна +1, при левой соответственно –1. Зависимости были вычислены в результате решения граничной задачи о прохождении света через пластинку из поглощающего низкосимметричного кристалла с учетом многократных отражений.

Эллиптичности собственных волн вычислялись по компонентам вектора **E**.

Сравним на рис. 1 одноосный поглощающий кристалл и поглощающий моноклинный кристалл, имеющий только одну круговую оптическую ось. На рис. 1а видно, что эллиптичность одной из собственных волн при разных углах паде-

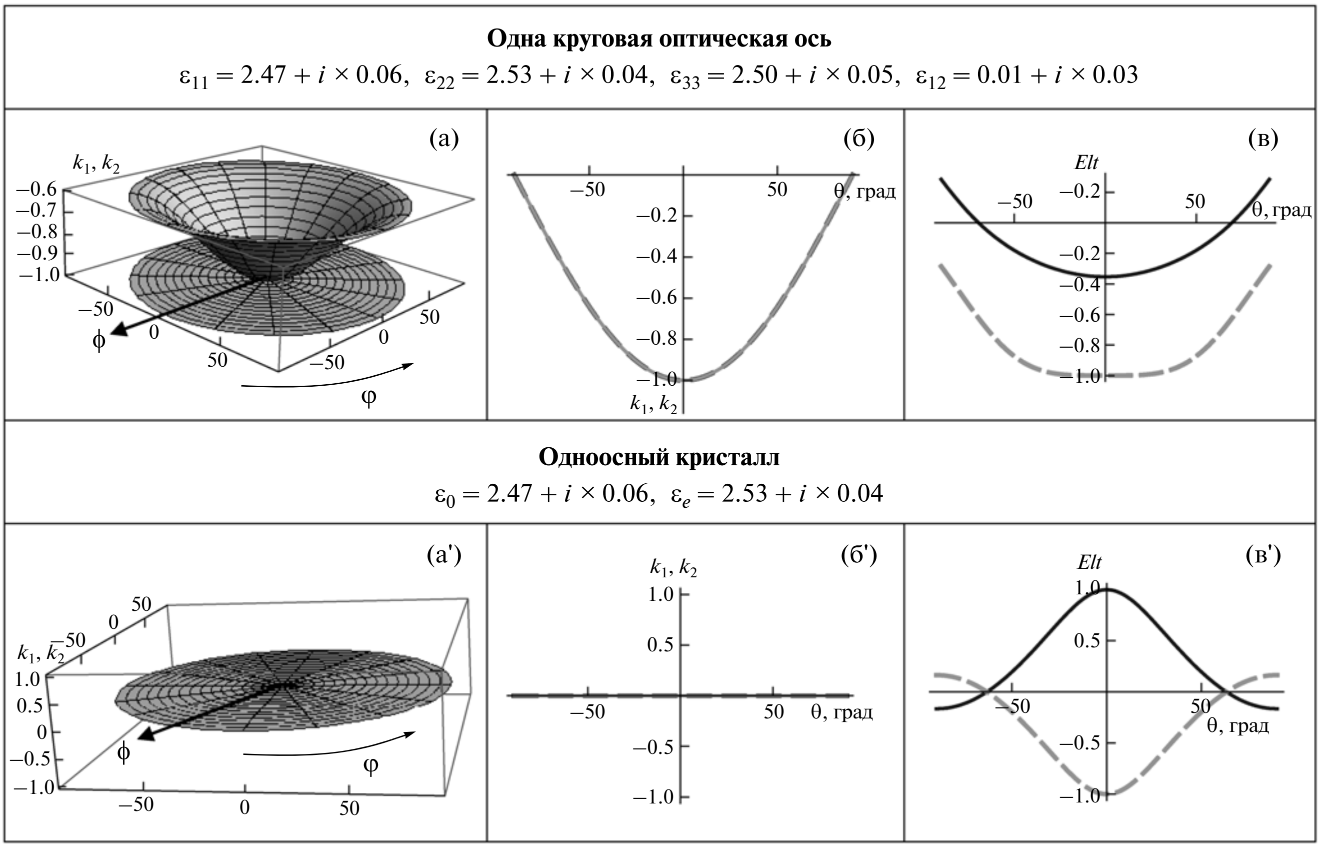

Рис. 1. Зависимость k_1, k_2 от углов ϕ и φ (а, а') и от угла θ (б, б'), зависимость эллиптичности прошедшего света *Elt* от угла θ (в, в'); толщина кристалла $d = 10$ мкм.

ния всегда равна -1, а эллиптичность другой собственной волны меняется и равна -1 только в точке оптической оси. В одноосном кристалле вдоль оптической оси распространяется одна собственная волна с линейной поляризацией, а эллиптичность собственных волн всегда равна нулю (рис. 1а'). Но при нормальном падении в зависимости от угла θ эллиптичности обеих собственных волн всегда равны между собой и равны -1 только в точке оптической оси $\theta = 0$ (рис. 1б). В случае одноосного кристалла эллиптичность собственных волн всегда равна нулю (рис. 1б'). При падении волны левой круговой поляризации вдоль оптической оси ($\theta = 0$) ее эллиптичность остается без изменений, т.е. эллиптичность прошедшей волны также равна -1. При падении волны правой круговой поляризации при $\theta = 0$ прошедший свет имеет эллиптическую поляризацию (рис. 1в). В одноосном кристалле вдоль оптической оси в обоих случаях прошедшая волна имеет круговую поляризацию (рис. 1в').

Если поменять знак компоненты β_{12} в выражении (9) на противоположный, эллиптичности собственных волн и эллиптичности прошедшего света также поменяют знак.

II. Одна круговая и одна изотропная оптические оси

В этом случае один из векторов **c**' и **c**'' круговой, а другой – линейный. Тензор ε не приводится к диагональному виду. Из (2) и (3) получим систему уравнений

$$\beta_{12} = b(c_1'c_2'' + c_1''c_2'), \quad \beta_{11} - \beta_{33} = 2bc_1'c_1'',$$
$$\beta_{22} - \beta_{33} = 2bc_2'c_2'', \quad \mathbf{c}'^2 = 0, \quad \mathbf{c}'' = \mathbf{c}''^*. \tag{15}$$

Круговая оптическая ось параллельна оси Z, а изотропная – лежит в плоскости XOY. Будем считать, что изотропная ось параллельна оси X, так как этого всегда можно добиться поворотом вокруг оси Z. Тогда тензор ε^{-1} можно представить в виде (α, γ – комплексные числа):

$$\varepsilon^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha+\gamma & \pm i\gamma/2 & 0 \\ \pm i\gamma/2 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}, \tag{16}$$

Если считать, что изотропная ось параллельна оси Y, получаем тензор ε^{-1} в виде

$$\varepsilon^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha & \pm i\gamma/2 & 0 \\ \pm i\gamma/2 & \alpha+\gamma & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}. \tag{17}$$

Одна круговая оптическая ось

$\varepsilon_{11} = 3.333 + i \times 0.0445$, $\varepsilon_{22} = 3.31 + i \times 0.0548$, $\varepsilon_{33} = 3.333 + i \times 0.0444$, $\varepsilon_{12} = 0.00519 + i \times 0.0112$

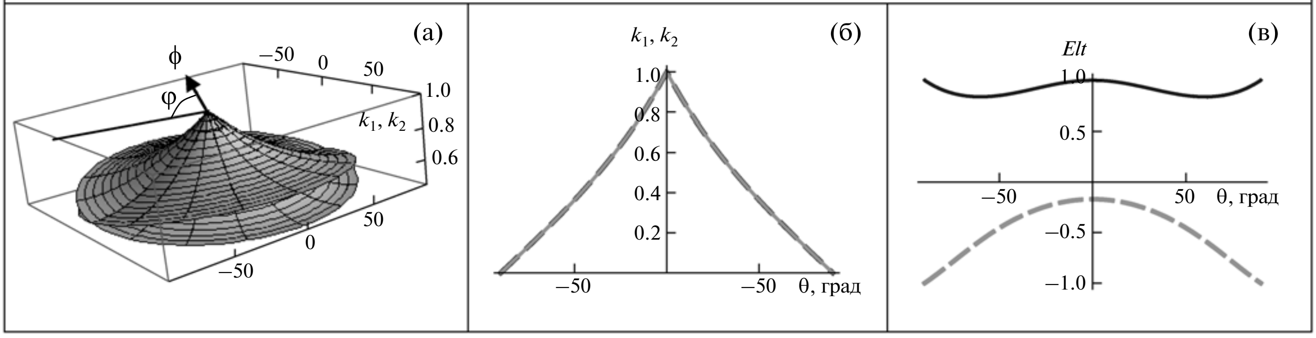

Рис. 2. Зависимость k_1, k_2 от углов ϕ и φ (а) и от угла поворота θ вокруг оси X в плоскости, содержащей круговую и изотропную оптические оси (б); зависимость эллиптичностей прошедшего света *Elt* от угла θ (в); толщина кристалла $d = 10$ мкм.

Для расчета эллиптичностей возьмем тензор ε^{-1} в виде (17) со знаком "–". Как и в случае I, определяем в зависимости от θ собственные значения матрицы Δ

$$\xi(\theta) = \{-n_1,\ n_1,\ -n_2,\ n_2\}, \tag{18}$$

где $n_{1,2} = \sqrt{\dfrac{4\alpha + \gamma(1 + e^{\mp 2i\theta})}{4\alpha^2 + \gamma(4\alpha + \gamma)\cos^2\theta}}$,

и соответствующие им собственные векторы $\mathbf{u}_i$

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{u}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (i\cos\theta + \sin\theta)/n_1 & -i\cos\theta - \sin\theta & -1/n_1 & 1 \\ -(i\cos\theta + \sin\theta)/n_1 & -i\cos\theta - \sin\theta & 1/n_1 & 1 \\ (i\cos\theta - \sin\theta)/n_2 & -i\cos\theta + \sin\theta & -1/n_2 & 1 \\ -(i\cos\theta - \sin\theta)/n_2 & -i\cos\theta + \sin\theta & 1/n_2 & 1 \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Эллиптичность собственных волн, согласно (12), выражается в виде

$$k_{1,2} = \mathrm{tg}[\arcsin(\cos\theta)/2]. \tag{20}$$

Из выражения (20) видно, что в этом случае, как и в случае только одной круговой оси, эллиптичность собственных волн не зависит от компонент ε. Если взять тензор (17) со знаком "+", эллиптичность собственных волн (20) меняет знак. Направлению круговой оси соответствует $\theta = 0$, а изотропной – $\theta = 90°$.

На рис. 2а видна круговая оптическая ось при $\phi = 0$. Видно, что при $\phi \neq 0$ эллиптичности для разных собственных волн разные. Эллиптичности собственных волн вдоль круговой оптической оси ($\theta = 0$) равны +1, вдоль изотропной ($\theta = 90°$) равны нулю (рис. 2б). Эллиптичность прошедшего света при $\theta = 0$ равна +1 для правой круговой поляризации падающего света. В точке изотропной оси ($\theta = 90°$) прошедший свет имеет правую и левую круговые поляризации соответственно для правой и левой круговых поляризаций падающего света (рис. 2в).

III. Три круговые оптические оси

В этом случае один из векторов **c**' и **c**'' круговой, а другой – эллиптический. Тензор ε не приводится к диагональному виду. Из (2) и (3) получим систему уравнений

$$\beta_{12} = b(c_1'c_2'' + c_1''c_2'), \quad \beta_{11} - \beta_{33} = 2bc_1'c_1'', \quad \beta_{22} - \beta_{33} = 2bc_2'c_2'', \quad \mathbf{c}'^2 = 0, \quad \mathbf{c}''^2 = 1, \tag{21}$$

из которой получаем

$$\beta_{12} = \pm i(\beta_{11} - \beta_{22})/2, \quad c_1''^2 = \frac{-(\beta_{11} - \beta_{33})^2}{(\beta_{22} - \beta_{33})^2 - (\beta_{11} - \beta_{33})^2}, \quad c_2''^2 = \frac{(\beta_{22} - \beta_{33})^2}{(\beta_{22} - \beta_{33})^2 - (\beta_{11} - \beta_{33})^2}. \tag{22}$$

Из (4) следует, что оптическая ось, отвечающая круговому вектору **c**', направлена вдоль оси Z, и все три круговые оси лежат в одной плоскости, содержащей ось Z.

Обозначим $\beta_{33} = \alpha$, $\beta_{11} - \beta_{33} = \delta$, $(\beta_{22} - \beta_{33})/(\beta_{11} - \beta_{33}) = \eta$, $\delta \neq 0$. Тогда тензор ε^{-1} с учетом (22) принимает вид (α, δ, η – в общем случае комплексные числа):

$$\varepsilon^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha + \delta & \pm i\delta(1 - \eta)/2 & 0 \\ \pm i\delta(1 - \eta)/2 & \alpha + \eta\delta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Используя систему уравнений (21) и формулы (3) и (4), можно показать, что если η – вещественное число и $|\eta| > 1$, то все три оптические оси кристалла лежат в плоскости YOZ. Рассмотрим именно

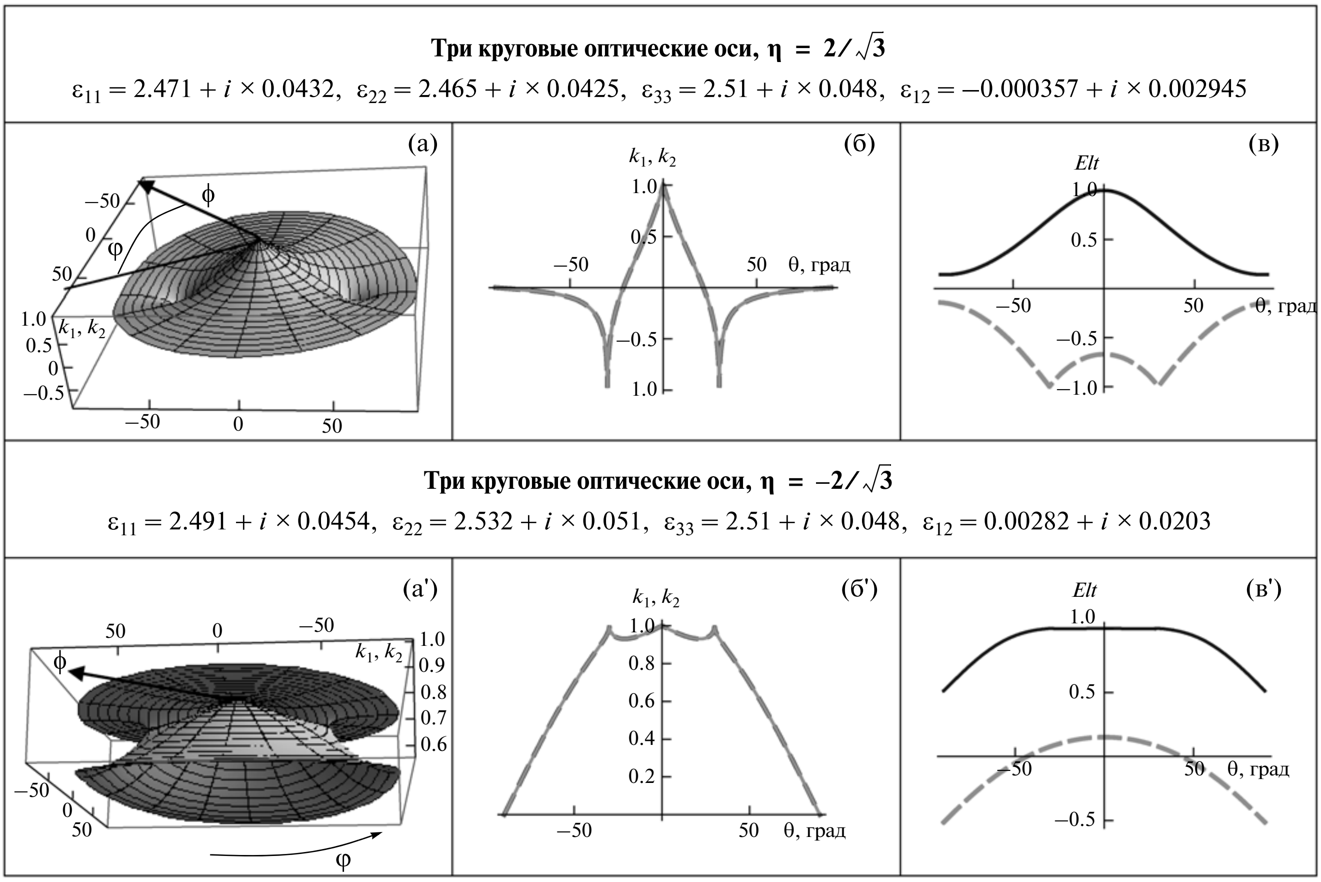

Рис. 3. Зависимость k_1, k_2 от углов ϕ и φ (а, а') и от угла поворота θ вокруг оси X в плоскости, содержащей три круговые оптические оси (б, б'); зависимость эллиптичностей прошедшего света *Elt* от угла θ (в, в'); толщина кристалла $d = 10$ мкм.

этот вариант. Это не ограничивает общности, так как оптические оси кристалла расположены в одной плоскости, содержащей ось Z, и кристалл всегда можно повернуть вокруг оси Z так, чтобы они оказались в плоскости YOZ.

Как и в случае I, определяем в зависимости от θ собственные значения матрицы Δ

$$\xi(\theta) = \{-n_1(\theta), n_1(\theta), -n_2(\theta), n_2(\theta)\}, \tag{24}$$

где $n_{1,2} = \sqrt{\dfrac{4\alpha + 2\delta(1+\eta\cos^2\theta) \mp 2\delta\sin\theta\sqrt{\eta^2\cos^2\theta - 1}}{4\alpha^2 + \delta^2(1+\eta)^2\cos^2\theta + 4\alpha\delta(1+\eta\cos^2\theta)}}$,

и соответствующие им собственные векторы $\mathbf{u}_i$

$$\begin{pmatrix}\mathbf{u}_1\\ \mathbf{u}_2\\ \mathbf{u}_3\\ \mathbf{u}_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\pm A_+/n_1 & \mp A_+ & -1/n_1 & 1\\ \mp A_+/n_1 & \mp A_+ & 1/n_1 & 1\\ \pm A_-/n_2 & \mp A_- & -1/n_2 & 1\\ \mp A_-/n_2 & \mp A_- & 1/n_2 & 1\end{pmatrix}, \tag{25}$$

где $A_\pm = \dfrac{i(\eta\cos^2\theta - 1) \pm \sin\theta\sqrt{\eta^2\cos^2\theta - 1}}{(\eta - 1)\cos\theta}$.

Для эллиптичностей собственных волн, согласно (12), в зависимости от угла поворота θ вокруг оси X получаем

$$k = \pm\mathrm{tg}(\arcsin(R)/2), \tag{26}$$

$R = (\eta\cos^2\theta - 1)/((\eta - 1)\cos\theta)$ при $\cos\theta > 1/|\eta|$,
$R = ((\eta - 1)\cos\theta)/(\eta\cos^2\theta - 1)$, при $\cos\theta < 1/|\eta|$.

При углах $\theta = 0$, $\theta = \pm\arccos(1/|\eta|)$ получаем $k = \pm 1$. Это положения круговых осей. Если $\eta > 0$, то при $\theta = \pm\arccos(1/\eta^{1/2})$ эллиптичность собственных волн меняет знак. Если $\eta < 0$, то эллиптичность одного знака при $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ и равна нулю только при $\theta = \pm\pi/2$.

На рис. 3а–3в представлены зависимости эллиптичностей собственных волн и эллиптичности прошедшего света для случая $\eta = 2/\sqrt{3}$. Из рис. 3а, 3б видно, что эллиптичность собственных волн для оптической оси, параллельной оси Z, равна +1, а для двух других равна –1. При этом при косом падении эллиптичности для двух собственных волн незначительно различаются, и только для одной из волн в точках оптических осей равны –1. На рис. 3в эллиптичность прошедшего света для одной оптической оси ($\theta = 0$) равна +1 для правой круговой поляризации, а для двух других осей ($\theta = \pm 30°$) равна –1 для левой круговой поляризации падающего света. При изменении знака ε_{12} на противоположный знаки эллиптичностей собственных волн и эллиптичностей прошедшего света также меняются на противоположные.

На рис. 3а'–3в' представлены те же зависимости, что и на рис. 3а–3в, для случая $\eta = -2/\sqrt{3}$. Эллиптичности собственных волн при $\phi \neq 0$ значительно различаются (рис. 3а') и только при $\phi = 0$ равны единице. При нормальном падении эллиптичность собственных волн равна +1 для всех трех круговых осей (рис. 3б', $\theta = 0$, $\theta = \pm 30°$). При этом рисунки для случая $\eta < 0$ (рис. 3а'–3в') имеют некоторое сходство с соответствующими рисунками для случая одной круговой оси (рис. 1а–1в).

IV. Две круговые оптические оси

Если $\mathbf{c}' = \mathbf{c}'' = \mathbf{c}$, $\mathbf{c}$ – эллиптический вектор, тензор ε^{-1} приводится к диагональному виду и существуют две круговые оптические оси. Для этого случая из (2) и (3) получаем систему уравнений

$$\begin{gathered}\beta_{12} = bc_1c_2, \quad \beta_{11} - \beta_{33} = bc_1^2, \\ \beta_{22} - \beta_{33} = bc_2^2, \ \ \mathbf{c}^2 = 1.\end{gathered} \tag{27}$$

Чтобы она имела решение, необходимо выполнение условия

$$\beta_{12} = \pm\sqrt{(\beta_{11} - \beta_{33})(\beta_{22} - \beta_{33})}. \tag{28}$$

Запишем тензор ε^{-1} в виде (α, δ, η – в общем случае комплексные числа):

$$\varepsilon^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha+\delta & \pm\delta\sqrt{\eta} & 0 \\ \pm\delta\sqrt{\eta} & \alpha+\eta\delta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}. \tag{29}$$

Повернем кристалл так, чтобы две круговые оси оказались в плоскости *YOZ*. Тогда из (27) и (3), (4) получим, что η – вещественное число и $\eta < -1$. Рассмотрим эллиптичности собственных волн для данного случая.

Как и в I, определим в зависимости от θ собственные значения матрицы Δ

$$\begin{gathered}\xi(\theta) = \left\{-\frac{1}{\sqrt{\alpha}}, \frac{1}{\sqrt{\alpha}}, -\frac{1}{\sqrt{\alpha+\delta+\delta\eta\cos^2\theta}},\right. \\ \left.\frac{1}{\sqrt{\alpha+\delta+\delta\eta\cos^2\theta}}\right\} = \{-n_1,\ n_1,\ -n_2,\ n_2\}\end{gathered} \tag{30}$$

и соответствующие им собственные вектора $\mathbf{u}_i$

$$\begin{pmatrix}\mathbf{u}_1\\ \mathbf{u}_2\\ \mathbf{u}_3\\ \mathbf{u}_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm i\sqrt{|\eta|}\cos\theta/n_1 & \mp i\sqrt{|\eta|}\cos\theta & -1/n_1 & 1 \\ \mp i\sqrt{|\eta|}\cos\theta/n_1 & \mp i\sqrt{|\eta|}\cos\theta & 1/n_1 & 1 \\ \mp 1/(in_2\sqrt{|\eta|}\cos\theta) & \pm 1/(i\sqrt{|\eta|}\cos\theta) & -1/n_2 & 1 \\ \pm 1/(in_2\sqrt{|\eta|}\cos\theta) & \pm 1/(i\sqrt{|\eta|}\cos\theta) & 1/n_2 & 1 \end{pmatrix}. \tag{31}$$

Из (30) видно, что в таком кристалле существуют обыкновенная (показатель преломления не зависит от θ) и необыкновенная волны.

Для эллиптичности собственных волн, согласно (12), получаем

$$k_{1,2} = \pm\mathrm{tg}\left[\arcsin\left(\frac{2\sqrt{|\eta|}\cos\theta}{1+|\eta|\cos^2\theta}\right)/2\right]. \tag{32}$$

При $\theta = \pm\arccos(1/\sqrt{|\eta|})$ получаем $k_{1,2} = \pm 1$, что соответствует положению круговых оптических осей. Эллиптичность собственных волн, согласно (32), равна нулю только при $\theta = \pm\pi/2$.

На рис. 4а, 4а' показаны эллиптичности двух собственных волн. Эллиптичность одной из собственных волн меняется и в точках оптических осей равна +1, а для другой собственной волны эллиптичность остается постоянной при любом угле падения и для выбранных данных равна $k = 0.81$. На рис. 4б видны положения двух круговых оптических осей, для которых эллиптичности равны +1. Эллиптичность прошедшего света при правой круговой поляризации падающего света в точках оптических осей равна +1 (рис. 4в).

V. Две круговые и одна изотропная оптические оси

Если один из векторов $\mathbf{c}'$ и $\mathbf{c}''$ эллиптический, а другой – линейный, то тензор ε приводится к диагональному виду, и у такого кристалла есть две круговые и одна изотропная оптические оси. Используя (2) и (3), получим систему уравнений

$$\begin{gathered}\beta_{12} = b(c_1'c_2'' + c_1''c_2'), \quad \beta_{11} - \beta_{33} = 2bc_1'c_1'', \\ \beta_{22} - \beta_{33} = 2bc_2'c_2'', \quad \mathbf{c}'^2 = 1, \quad \mathbf{c}'' = \mathbf{c}''^*.\end{gathered} \tag{33}$$

Изотропная оптическая ось, соответствующая линейному вектору $\mathbf{c}''$, лежит в плоскости *XOY*. Эллиптическому вектору $\mathbf{c}'$ соответствуют, согласно (4), две круговые оптические оси. В общем случае круговые и изотропная оптические оси лежат в разных плоскостях. Будем считать, что изотропная ось параллельна оси *X*, так как этого всегда можно добиться поворотом вокруг оси *Z*. Тогда получаем:

$$\beta_{12} = bc_2', \quad \beta_{11} - \beta_{22} = 2bc_1', \quad \beta_{22} = \beta_{33}, \quad \mathbf{c}'^2 = 1.$$

Для моноклинного кристалла в общем случае можно записать тензор ε^{-1} в виде (α, δ, η, γ – комплексные числа, $\delta \neq 0$):

$$\varepsilon^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha+\delta & \gamma & 0 \\ \gamma & \alpha+\eta\delta & 0 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}. \tag{34}$$

Как и в I, определим в зависимости от θ собственные значения матрицы Δ

$$\xi(\theta) = \{-n_1, n_1, -n_2, n_2\}, \tag{35}$$

Две круговые оптические оси

$\varepsilon_{11} = 3.325 + i \times 0.0499,\ \varepsilon_{22} = 3.33 + i \times 0.0299,\ \varepsilon_{33} = 3.31 + i \times 0.04,\ \varepsilon_{12} = -0.01013 + i \times 0.01236$

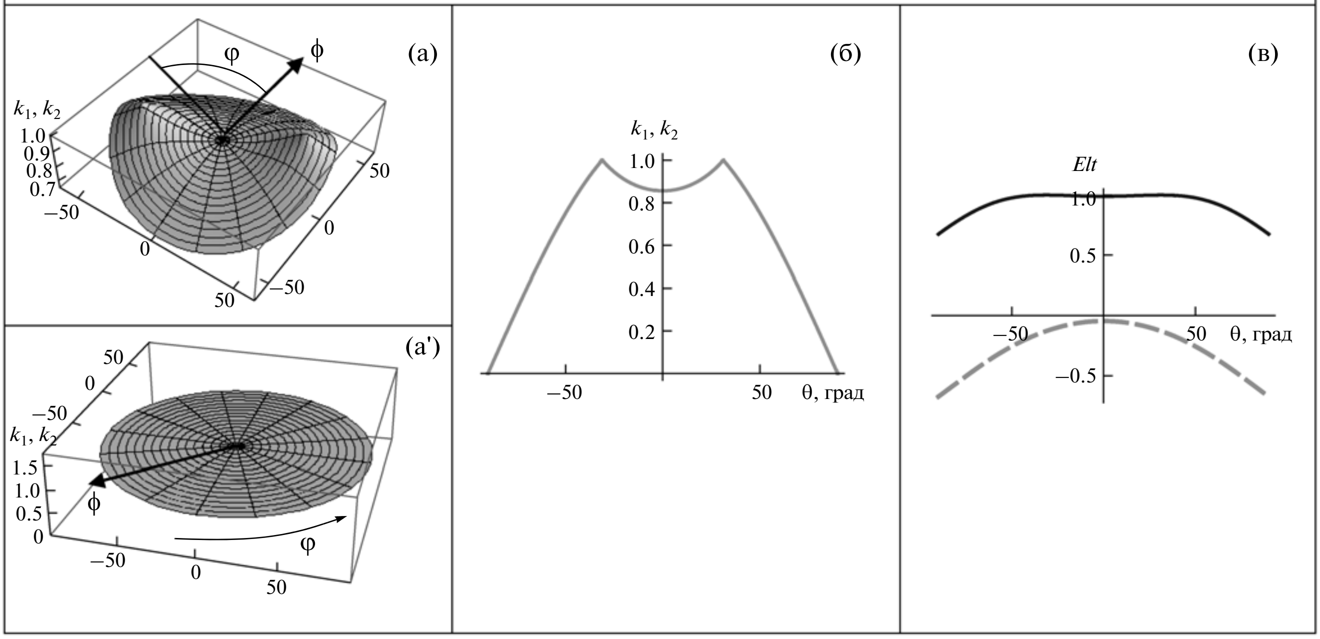

Рис. 4. Зависимость k_1, k_2 от углов ϕ и φ (а, а') и от угла поворота θ вокруг оси X в плоскости, содержащей две круговые оптические оси (б); зависимость эллиптичностей прошедшего света *Elt* от угла θ (в); толщина кристалла $d = 10$ мкм.

Две круговые и одна изотропная оптические оси

$\varepsilon_{11} = 3.3 + i \times 0.034,\ \varepsilon_{22} = 3.35 + i \times 0.03,\ \varepsilon_{33} = 3.35016 + i \times 0.029998,\ \varepsilon_{12} = -i \times 0.023$

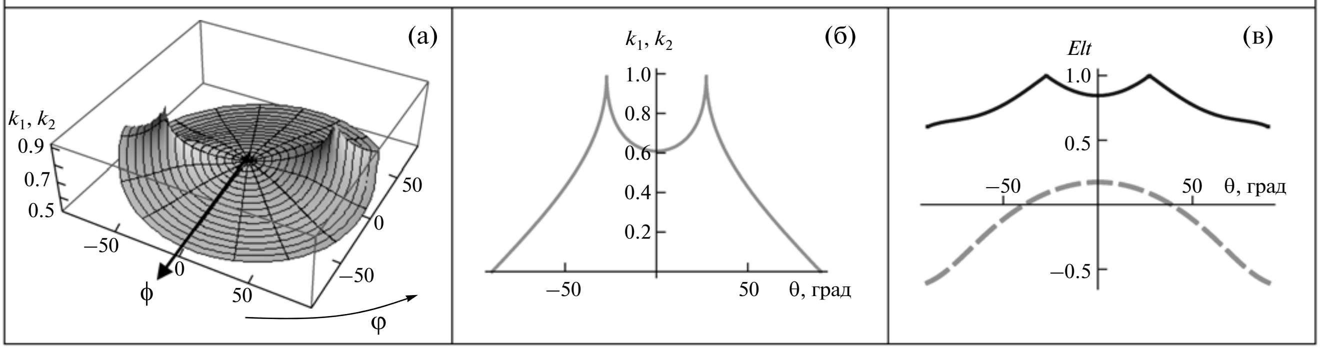

Рис. 5. Зависимость k_1, k_2 от углов ϕ и φ (а) и от угла поворота θ вокруг оси X в плоскости, содержащей две круговые оптические оси (б); зависимость эллиптичностей прошедшего света *Elt* от угла θ (в); толщина кристалла $d = 10$ мкм.

где $n_{1,2} =$

$$= \sqrt{\frac{2\alpha + \delta(1+\eta\cos^2\theta) \mp \sqrt{\delta^2(\eta\cos^2\theta - 1)^2 + 4\gamma^2\cos^2\theta}}{2(\alpha^2 + \alpha\delta + (\delta^2\eta + \alpha\delta\eta - \gamma^2)\cos^2\theta)}}$$

и соответствующие им собственные векторы

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \\ \mathbf{u}_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -(A+\sqrt{A^2+1})/n_1 & A+\sqrt{A^2+1} & -1/n_1 & 1 \\ (A+\sqrt{A^2+1})/n_1 & A+\sqrt{A^2+1} & 1/n_1 & 1 \\ -(A-\sqrt{A^2+1})/n_2 & A-\sqrt{A^2+1} & -1/n_2 & 1 \\ (A-\sqrt{A^2+1})/n_2 & A-\sqrt{A^2+1} & 1/n_2 & 1 \end{pmatrix}, \quad (36)$$

где $A = \delta(1 - \eta\cos^2\theta)/(2\gamma\cos\theta)$.

Для эллиптичности собственных волн, согласно (12), получаем

$$k_{1,2} = \mathrm{tg}\left[\arcsin\left(\frac{2\,\mathrm{Im}\,A}{|A^2+1| + |A|^2 + 1}\right)/2\right]. \quad (37)$$

При нормальном падении света эллиптичность собственных волн одинакова для векторов **E** и **H** и также одинакова для обеих собственных волн каждого из полей. Если две круговые оси попадают в плоскость YOZ, то η – чисто мнимая величина, и при некотором угле θ значение $A = \pm i$.

На рис. 5а показана эллиптичность одной из собственных волн. На этом рисунке видны две

Четыре круговые оптические оси

$\varepsilon_{11} = 2.372 + i \times 0.0331$, $\varepsilon_{22} = 2.381 + i \times 0.0378$, $\varepsilon_{33} = 2.471 + i \times 0.06288$, $\varepsilon_{12} = i \times 0.00403$

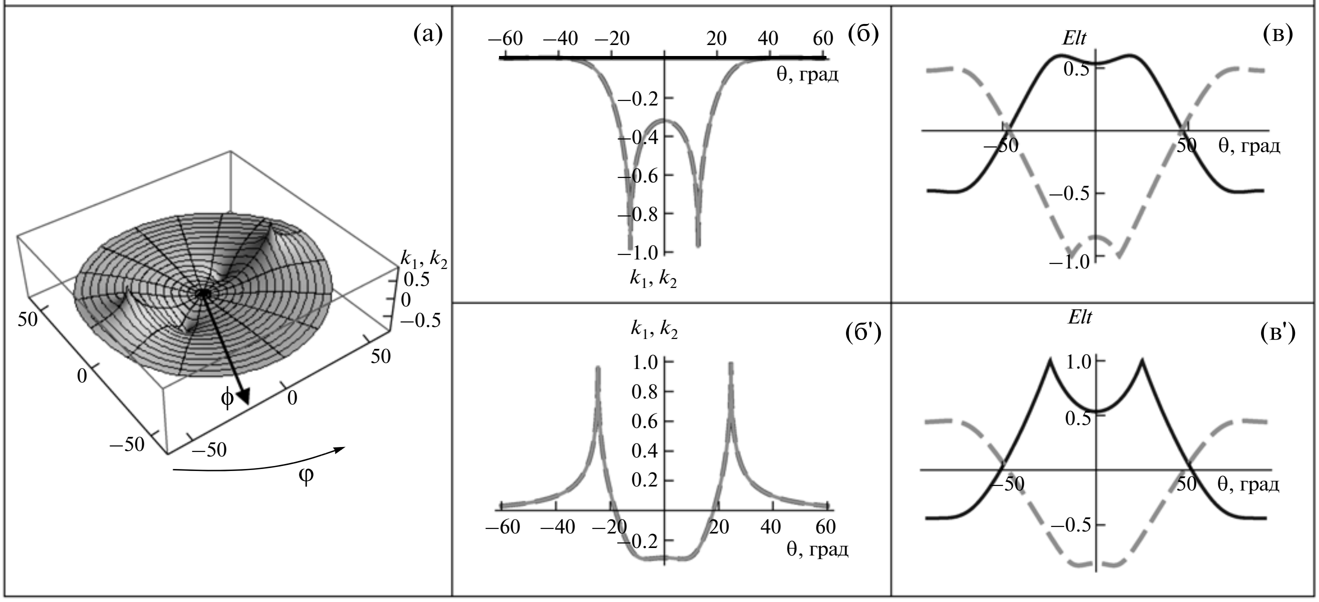

Рис. 6. Зависимость k_1, k_2 от углов ϕ и φ (а) и от угла поворота θ вокруг оси X в двух плоскостях, содержащих сопряженные круговые оптические оси (б, б'); зависимость эллиптичностей прошедшего света *Elt* от угла θ (в, в'); толщина кристалла $d = 10$ мкм.

круговые оптические оси. При распространении вдоль оптических осей, соответствующих положению двух максимумов, эллиптичность собственных волн равна +1 (рис. 5б). При распространении вдоль оптических осей волны с правой круговой поляризацией эллиптичность прошедшего света (*Elt*) также равна +1 (рис. 5в). При изменении знака ε_{12} эллиптичность собственных волн и эллиптичность прошедшего света так же меняют знак, как и во всех других случаях.

VI. Четыре круговые оптические оси

Это самый общий и самый распространенный случай. Оба вектора **c**' и **c**'' эллиптические, тензор ε приводится к диагональному виду, кристалл имеет четыре круговые оси. Используя (2) и (3), запишем систему уравнений

$$\beta_{12} = b(c'_1c''_2 + c''_1c'_2), \quad \beta_{11} - \beta_{33} = 2bc'_1c''_1, \quad \beta_{22} - \beta_{33} = 2bc'_2c''_2, \quad \mathbf{c}'^2 = 1, \quad \mathbf{c}''^2 = 1. \tag{38}$$

Поскольку **c**' и **c**'' эллиптические, каждый из них, согласно (4), определяет две круговые оптические оси.

Если записать тензор β в виде (34), то собственные значения и собственные векторы матрицы Δ в зависимости от угла θ записываются в общем виде (35), (36). Эллиптичность собственных волн определяется из (37).

На рис. 6а показана в цилиндрической системе координат зависимость эллиптичности одной из собственных волн от угла падения ϕ и угла поворота φ кристалла вокруг оси Z. На этом рисунке видны четыре круговые оси. Показаны эллиптичности собственных волн (рис. 6б, 6б') и эллиптичности прошедшего света для круговой поляризации падающего света (рис. 6в, 6в') в двух плоскостях, содержащих сопряженные оптические оси. Для разных пар оптических осей ход кривых разный.

РОМБИЧЕСКИЙ КРИСТАЛЛ

В ромбическом кристалле комплексный тензор ε приводится к диагональному виду в вещественной ортогональной системе координат. Возможно существование либо двух изотропных, либо четырех круговых оптических осей. Чтобы кристалл имел две изотропные оптические оси, необходимо, чтобы величина $\varepsilon_2(\varepsilon_1 - \varepsilon_3)/(\varepsilon_3(\varepsilon_2 - \varepsilon_1))$, где ε_i – главные значения тензора ε, была вещественной.

Для кристалла с двумя изотропными оптическими осями эллиптичность собственных волн при нормальном падении равна нулю.

Приведем для сравнения соответствующие зависимости для ромбического кристалла с четырьмя круговыми оптическими осями.

Ромбический кристалл

$\varepsilon_{11} = 2.372 + i \times 0.0308$, $\varepsilon_{22} = 2.381 + i \times 0.04012$, $\varepsilon_{33} = 2.471 + i \times 0.06288$

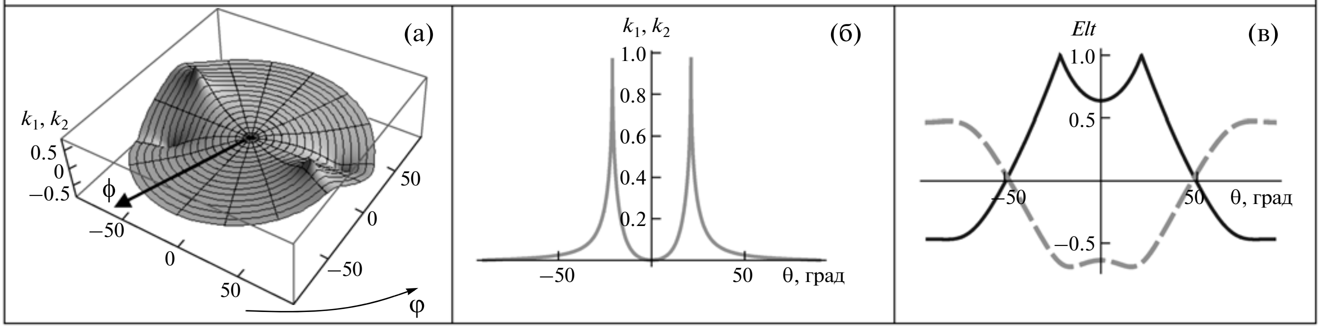

Рис. 7. Зависимость k_1, k_2 от углов ϕ и φ (а) и от угла поворота θ вокруг оси X в одной из плоскостей, проходящих через сопряженные оптические оси (б); зависимость эллиптичностей прошедшего света Elt от угла θ (в); толщина кристалла $d = 10$ мкм.

На рис. 7а показана зависимость эллиптичности одной из собственных волн от угла падения ϕ и угла поворота φ кристалла вокруг оси Z. На этом рисунке видны четыре круговые оси. На рис. 7б, 7в показаны соответственно эллиптичности собственных волн и прошедшего света в зависимости от угла θ в плоскости, содержащей одну из пар сопряженных оптических осей. Для другой пары осей эллиптичности различаются только знаком.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрены частные случаи моноклинных поглощающих кристаллов классов 2, m, $2/m$. Проведено их сравнение с ромбическими кристаллами классов 222, $mm2$, mmm. Рассмотрены эллиптичности собственных волн в таких кристаллах, а также эллиптичности прошедшего света при падении на кристалл света правой и левой круговой поляризации.

Показано, что если поглощающий моноклинный кристалл имеет только одну круговую оптическую ось, то эллиптичность собственных волн при нормальном падении света и при любой ориентации кристалла не зависит от компонент тензора диэлектрической проницаемости. При этом при косом падении света для одной собственной волны проекция вектора **E** на плоскость XOY имеет круговую поляризацию, а вектора **H** – эллиптическую. Для другой собственной волны, наоборот, проекция вектора **H** на плоскость XOY имеет круговую поляризацию, а вектора **E** – эллиптическую. В таком кристалле имеются обыкновенная и необыкновенная волны. Проведено сравнение с одноосными поглощающими кристаллами.

Если поглощающий моноклинный кристалл имеет одну круговую и одну изотропную оптические оси, то эллиптичность собственных волн при нормальном падении, как и в случае одной круговой оси, не зависит от компонент тензора диэлектрической проницаемости.

Если поглощающий моноклинный кристалл имеет три круговые оси, то они лежат в одной плоскости. Эллиптичность собственных волн может иметь для разных оптических осей и одинаковые, и разные знаки.

Если поглощающий моноклинный кристалл имеет две круговые оси, то в таком кристалле имеются обыкновенная и необыкновенная волны. При косом падении эллиптичность одной из собственных волн остается константой (не равной единице), а для другой собственной волны меняется. В точках оптических осей эллиптичности одного знака. Случай, когда имеются две круговые и одна изотропная оптические оси, принципиально отличается от случая двух круговых осей только тем, что уже нет обыкновенной и необыкновенной волн.

Моноклинный поглощающий кристалл с четырьмя круговыми оптическими осями отличается от поглощающего ромбического кристалла тем, что оптические оси в моноклинном кристалле расположены несимметрично.

Таким образом, рассмотрены шесть вариантов поглощающих моноклинных кристаллов, в которых в зависимости от вида комплексного тензора диэлектрической проницаемости возможно существование разного количества оптических осей. Так как существует много композитных материалов и так как показатели преломления и поглощения кристалла меняются в зависимости от различных параметров внешних воздействий, можно предположить, что материалы с такими нестандартными характеристиками могут существовать или могут быть специально созданы. Поэтому рассмотрение таких экзотических, на первый взгляд, случаев в подобных материалах представляется весьма актуальным и является необходимой составляющей оптики поглощающих анизотропных кристаллических сред.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гречушников Б.Н.* // Современная кристаллография / Под ред. Вайнштейна Б.К. М.: Наука, 1981. Т. 4. С. 338.
2. *Voigt W.* Kompendium der theoretische Physik. Leipzig, 1896.
3. *Друде П.* Оптика. ОНТИ. 1935.
4. *Федоров Ф.И.* Оптика анизотропных сред. Минск: изд-во АН БССР, 1958. 380 с.
5. *Гончаренко А.М.* Дис. "Исследование оптических свойств поглощающих кристаллов на основе инвариантного метода" канд. физ.-мат. Наук. Минск, 1960. 159 с.
6. *Гончаренко А.М.* // Кристаллография. 1959. Т. 4. Вып. 3. С. 393.
7. *Гончаренко А.М.* // Кристаллография. 1959. Т. 4. Вып. 5. С. 727.
8. *Окорочков А.И., Константинова А.Ф.* // Кристаллография. 1984. Т. 29. Вып. 5. С. 841.
9. *Константинова А.Ф., Головина Т.Г., Набатов Б.В. и др.* // Кристаллография. 2011. Т. 56. № 3. С. 412.
10. *Константинова А.Ф., Головина Т.Г., Евдищенко Е.А. и др.* // Проблемы физики, математики и техники. 2011. № 4(9). С. 38.
11. *Константинова А.Ф., Головина Т.Г., Евдищенко Е.А. и др.* // Кристаллография. 2012. Т. 57. № 3. С. 484.
12. *Berreman D.W.* // J. Opt. Soc. Am. 1972. V. 62. № 4. P. 502.
13. *Сиротин Ю.И., Шаскольская М.П.* Основы кристаллофизики. М.: Наука, 1975. 680 с.
14. *Кочин Н.Е.* Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М.: Наука, 1965. 428 с.