

ИНЖЕНЕРНАЯ КРИОЛОГИЯ

УДК 551.34:624.139

DOI: 10.21782/KZ1560-7496-2019-4(54-59)

**РАСЧЕТ ПОЛОЖЕНИЯ ВЕРХНЕЙ ГРАНИЦЫ
МНОГОЛЕТНЕМЕРЗЛЫХ ГРУНТОВ В ТЕЛЕ И ОСНОВАНИИ
ЗЕМЛЯНОГО ПОЛОТНА ПРИ НАЛИЧИИ ТЕПЛОИЗОЛЯЦИИ НА ОТКОСАХ****А.А. Чжан***Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова, геологический ф-т, кафедра геокриологии,
119991, Москва, Ленинские горы, 1, Россия; zhang.andrew.msu@gmail.com*

Представлен аналитический метод расчета положения верхней границы многолетнемерзлых грунтов в теле и основании дорог, разработанный на основе аппроксимации результатов численного решения двумерной задачи Стефана. С его помощью можно подобрать необходимую толщину теплоизоляции на откосы земляного полотна дороги, при которой будет происходить стабилизация мерзлотных условий в основании.

Земляное полотно, криолитозона, стабилизация, теплоизоляция, расчет, аппроксимация данных, метод Брандона

**CALCULATION OF THE LOCATION OF PERMAFROST TABLE IN ROADBED BODY AND SUBGRADE
IN THE PRESENCE OF HEAT INSULATION ON SLOPES****A.A. Zhang***Lomonosov Moscow State University, Faculty of Geology, Department of Geocryology,
1, Leninskie Gory, Moscow, 119991, Russia; zhang.andrew.msu@gmail.com*

Thaw depths in permafrost soils under road embankments are calculated analytically with a new method based on approximation of numerical solutions to the 2D Stefan problem. The method allows choosing the required thickness of heat insulation on the roadbed slopes to provide the stabilization of the underlying permafrost.

Roadbed, permafrost, stabilization, heat insulation, calculation, data approximation, Brandon method

ВВЕДЕНИЕ

Способ стабилизации мерзлотных условий в основании земляного полотна дорог с помощью теплоизолятора разработан в 2008 г. как средство борьбы с многолетним оттаиванием мерзлых грунтов в основании железнодорожных и автомобильных насыпей, вызванным тепловым влиянием откосов насыпи [Ашитиз и др., 2008; Дорожная насыпь..., 2008]. Он заключается в расположении синтетического изолятора по откосам насыпи, что приводит к увеличению мощности слоя сезонного промерзания откоса над слоем его сезонного оттаивания. В этом случае, как отмечал Н.А. Цытович [1928], появляется охлаждающий эффект. При малом количестве снега данное мероприятие малоэффективно. Синтетический теплоизолятор (экструзивный пенополистирол) укладывается под «одежду» откоса и крепится на откосе с помощью металлических диафрагм. Способ прошел успешное испытание на одном из участков Амуро-Якутской железнодорожной магистрали в 2009–2016 гг. [Чжан и др., 2018].

До настоящего времени расчет термического сопротивления теплоизоляции осуществлялся численным методом по известным компьютерным программам для решения двумерных задач Стефана, что в ряде случаев становится весьма трудоемким. В статье предлагается аналитический метод расчета, разработанный на основе аппроксимации результатов численного решения этой задачи.

**ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ
ДВУМЕРНОЙ ЗАДАЧИ СТЕФАНА**

Численное решение двумерной задачи Стефана производилось по разработанной на кафедре геокриологии МГУ компьютерной программе WARM [Программа..., 1994]. В качестве начальных и граничных условий использовались данные по трем метеостанциям, расположенным в различных районах криолитозоны (Чум, Салехард, Амга). В результате моделирования определялась глубина оттаивания у бровки откоса после уста-

Таблица 1. Исходные данные для расчета граничных условий на поверхности расчетной области и теплофизические свойства грунтов земляного полотна

Метеостанция	Ω_s	Ω_w	$R_{s,or}$	$R_{w,or}$	$R_{s,de}$	$R_{w,de}$	R_{ins}	T_0	λ_{th}	λ_f	L_v	T_{bf}
Чум	41 172	-76 504	0.102	0.243	0.102	4.14	0-3.5	-0.5	1.97	2.32	20 925	-0.1
Салехард	38 617	-84 607	0.050	0.227	0.050	4.06	0-2.5	-1.0	1.97	2.32	20 925	-0.1
Амга	73 146	-130 305	0.103	0.249	0.103	2.14	0-2.0	-2.5	1.97	2.32	20 925	-0.1

Примечание. Ω_s – сумма температур воздуха в летнее время с учетом поправки на солнечную радиацию, °С·ч; Ω_w – сумма температур воздуха в зимнее время, °С·ч; $R_{s,or}$, $R_{w,or}$, $R_{s,de}$, $R_{w,de}$ – термические сопротивления теплообмену воздуха с поверхностью летом и зимой в пределах основной площадки и летом и зимой в пределах откосов земляного полотна соответственно, м²·°С/Вт; R_{ins} – термическое сопротивление теплоизоляции, укладываемой на откосы земляного полотна, м²·°С/Вт; T_0 – расчетная температура поверхности грунта в естественных условиях, °С. Теплофизические свойства грунтов земляного полотна: λ_{th} , λ_f – коэффициенты теплопроводности грунта в теле земляного полотна в талом и мерзлом состояниях соответственно, Вт/(м·°С); L_v – объемная теплота фазовых переходов воды в грунте, Вт·ч/м³; T_{bf} – температура начала замерзания–оттаивания грунта в теле земляного полотна, °С.

новления стабильной среднегодовой температуры грунтов основания (стационарного состояния). Исходные данные для расчета граничных условий модели и теплофизические параметры грунтов земляного полотна представлены в табл. 1.

Предполагается, что термическое сопротивление изоляции на откосах должно быть таким, чтобы глубина оттаивания насыпи в критической точке не превышала высоту насыпи. В качестве критической принимается точка, ближайшая к теплоисточнику (откосу), а именно бровка откоса (см. рисунок). Глубина оттаивания в этой точке в случае стационарной задачи зависит от девяти параметров: размеров системы (B, H, L), граничных условий ($T_{bf}, T_{or}, T_{de}, T_0$) и коэффициентов теплопроводности (λ_{th}, λ_f):

$$H_{th} = f(T_{bf}, T_{or}, T_{de}, T_0, \lambda_{th}, \lambda_f, B, H, L), \quad (1)$$

где λ_{th}, λ_f – коэффициенты теплопроводности грунта земляного полотна в талом и мерзлом состояниях соответственно, Вт/(м·°С); T_{bf} – температура начала замерзания, °С; T_{or} – расчетная температура поверхности основной площадки железной дороги или проезжей части и обочин автомобильной дороги, °С; T_{de} – расчетная температура поверхности откоса, °С; T_0 – расчетная температура поверхности грунта в естественных условиях, °С; B – ширина гребня земляного полотна (основной площадки), м; H – высота земляного полотна, м; L – длина откоса земляного полотна, м.

За расчетную температуру поверхности грунтов T_0 принимается среднегодовая температура грунта на подошве слоя сезонного оттаивания при условии, что сама поверхность бесконечна.

С целью сокращения числа переменных зависимость (1) можно представить в безразмерном виде. Чтобы выполнить такую процедуру, отсчет температур будем вести от T_{bf} , в качестве масштабной температур выберем $T_{bf} - T_{or}$, в качестве масштаба линейных размеров берем H . Получаем, что

относительная глубина оттаивания под бровкой откоса земляного полотна ξ_{sh} равна

$$\xi_{sh} = \frac{H_{th}}{H} = f\left(\frac{2\lambda_{th}(T_{de} - T_{bf})L}{\lambda_f(T_{bf} - T_{or})B}, \frac{T_{bf} - T_0}{T_{bf} - T_{or}}, \frac{B}{H}, \frac{L}{H}\right). \quad (2)$$

Принимая наиболее распространенный в строительстве вариант крутизны откоса 1:n ($n = 1.5$), параметр L/H можем исключить из числа переменных, что позволяет искомую зависимость представить как функцию трех переменных:

$$\xi_{sh} = f(\alpha, \beta, \gamma), \quad (3)$$

$$\alpha = \frac{2\lambda_{th}(T_{de} - T_{bf})L}{\lambda_f(T_{bf} - T_{or})B}, \quad \beta = \frac{T_{bf} - T_0}{T_{bf} - T_{or}}, \quad \gamma = \frac{B}{H}.$$

Граничные условия T_{or} и T_{de} вычислялись по полученным ранее [Чжан и др., 2018] эмпирическим формулам применительно к двум районам: пурговому и морозному, которые разделены по величине средней зимней скорости ветра v_w [СП 121.13330.2012, 2012].

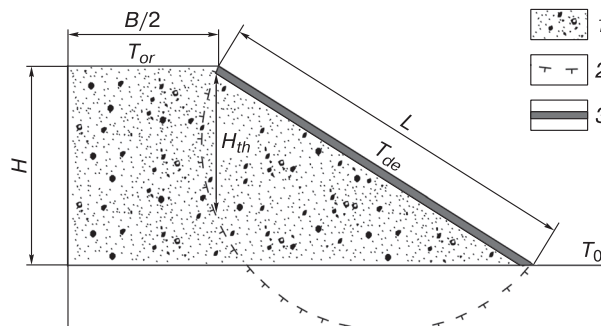


Схема земляного полотна.

1 – гравелисто-песчаный грунт; 2 – граница оттаивания грунта под откосом земляного полотна; 3 – теплоизоляционный материал, уложенный на откосе земляного полотна. Обозн. см. в тексте.

Для пурговых районов ($v_w > 4.6$ м/с) это выражение имеет вид

$$T_{or, de} = -5.513M_{or, de} + 6.64, \quad (4)$$

для морозных районов ($v_w \leq 4.6$ м/с):

$$T_{or, de} = -7.762M_{or, de} + 7.68, \quad (5)$$

Таблица 2. Результаты численного решения двумерной задачи Стефана по определению глубины многолетнего оттаивания грунтов у бровки откоса земляного полотна

α	β	γ	ξ_{sh}^m	ξ_{sh}^{cl}	δ
5.15	0.40	2	4.72	4.15	12.08
2.98	0.48	2	2.91	3.12	7.31
4.50	0.53	2	3.75	3.68	1.71
6.84	0.53	2	4.82	4.45	7.68
2.12	0.58	2	2.33	2.57	10.36
1.95	0.40	2	2.86	2.68	6.23
1.42	0.88	2	1.0	1.97	96.93
1.82	0.88	2	1.77	2.20	24.51
2.70	0.88	2	2.79	2.63	5.87
1.66	0.22	1.5	2.63	2.40	8.88
2.18	0.22	1.5	3.2	2.71	15.21
3.22	0.22	1.5	4.0	3.23	19.34
5.30	0.22	1.5	5.05	4.04	19.97
4.06	0.47	1.5	4.16	3.05	26.72
4.55	0.47	1.5	4.43	3.21	27.53
1.74	0.83	1.5	1.50	1.85	23.37
2.02	0.83	1.5	1.88	1.98	5.56
2.78	0.22	1	2.23	2.40	7.32
3.64	0.22	1	2.62	2.71	3.326
5.38	0.22	1	3.19	3.23	1.08
8.85	0.22	1	3.96	4.04	2.10
6.74	0.47	1	3.38	3.04	10.13
7.56	0.47	1	3.57	3.20	10.26
1.87	0.83	1	0.99	1.52	53.27
2.77	0.83	1	1.75	1.81	3.31
3.21	0.83	1	2.13	1.93	9.35
4.55	0.83	1	2.65	2.26	14.69
3.70	0.22	0.75	1.95	2.31	18.69
4.86	0.22	0.75	2.27	2.62	15.23
7.17	0.22	0.75	2.74	3.12	13.70
11.80	0.22	0.75	3.38	3.90	15.45
8.98	0.47	0.75	2.97	2.94	1.06
10.08	0.47	0.75	3.12	3.09	0.94
2.50	0.83	0.75	1.35	1.47	8.53
3.69	0.83	0.75	1.95	1.75	10.47
4.28	0.83	0.75	2.11	1.87	11.40
6.07	0.83	0.75	2.63	2.18	16.79

Примечание. α, β, γ – безразмерные параметры; $\xi_{sh}^m, \xi_{sh}^{cl}$ – относительная глубина оттаивания грунта у бровки откоса земляного полотна, найденная моделированием и вычисленная по формуле; δ – ошибка аппроксимации, %; средняя ошибка равна 14.77 %.

где v_w – средняя зимняя скорость ветра, м/с; 5.513, 6.64, 7.762, 7.68 – коэффициенты, °С; $M = d_f/d_{th}$ (безразмерный параметр M впервые ввел Н.А. Цытович [1928] для вычисления направленности мерзлотного процесса); d_f, d_{th} – максимальная возможная глубина сезонного промерзания и оттаивания земляного полотна, м.

Чтобы воспользоваться корреляционными зависимостями, надо знать глубины сезонного промерзания и оттаивания материала насыпи в районе строительства. В первом приближении они могут быть вычислены по формуле Стефана:

$$d_{th} = \sqrt{\frac{2\lambda_{th}\Omega_s}{L_v} + (\lambda_{th}R_s)^2} - \lambda_{th}R_s; \quad (6)$$

$$d_f = \sqrt{\frac{2\lambda_f(-\Omega_w)}{L_v} + (\lambda_fR_w)^2} - \lambda_fR_w; \quad (7)$$

$$R_s = \frac{1}{\alpha_s} + R_{ins}; \quad (8)$$

$$R_w = \frac{1}{\alpha_w} + R_{ins} + R_{snow}, \quad (9)$$

где L_v – объемная теплота фазовых переходов воды в грунте, Вт·ч/м³; Ω_w – сумма температур воздуха в зимний период (абсолютное значение), °С·ч; Ω_s – сумма температур поверхности земляного полотна в летний период [°С·ч], вычисляется согласно [СП 121.13330.2012, 2012]; R_s, R_w – среднелетнее и среднезимнее термическое сопротивление теплообмену на поверхности грунта в пределах гребня и откоса земляного полотна, м²·°С/Вт; α_s, α_w – коэффициенты теплообмена на поверхности гребня и откоса в летнее и зимнее время соответственно (конвективный теплообмен на поверхности), Вт/(м²·°С); R_{ins} – термическое сопротивление теплоизоляции, укладываемой на откос (на гребне R_{ins} принимается равным нулю), м²·°С/Вт; R_{snow} – среднее зимнее термическое сопротивление снежного покрова на гребне и откосе, м²·°С/Вт. Методика определения этих величин изложена в [Хрусталева, 2005].

Результаты численного решения в виде зависимости безразмерной величины ξ_{sh} от переменных α, β, γ представлены в табл. 2.

АПРОКСИМАЦИЯ РЕЗУЛЬТАТОВ КОМПЬЮТЕРНОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Следующим шагом является аппроксимация зависимости (2) в виде элементарной аналитической функции. Для этого был использован метод американского статистика Д.Б. Брандона [Brandon, 1959; Поляков, 2008]. Данный метод дает вполне приемлемую точность аппроксимации. Его полезно применять в случаях, когда нужно быстро и достаточно точно описать процесс на основе экс-

периментальных данных. Этот метод предполагает выполнение следующих действий.

1. Принимаем значение относительной глубины оттаивания грунта под бровкой откоса земляного полотна по результатам математического моделирования ξ_{sh}^m за y , а безразмерные коэффициенты α, β, γ за x_1, x_2, x_3 соответственно. Таким образом, $y = f(x_1, x_2, x_3)$.

2. Получаем нормализованные значения y для каждого из 37 вариантов: $y_0 = y/\bar{y}$, где $\bar{y} = \text{const}$ – среднеарифметическое значение y , равное 2.83 м.

3. Далее находим зависимость между y_0 и x_1 : $y_0 = f(x_1)$. Для этого рассчитываем три зависимости: $y = a + bx$ (линейная), $y = a + b \ln x$ (логарифмическая), $y = ax^b$ (степенная).

Выбираем зависимость с минимальным значением δ (ошибка аппроксимации), которое определяем по формуле

$$\delta = \frac{|y - y_0|}{y_0} \cdot 100 \%$$

В нашем случае наименьшую ошибку (26.42 %) дает степенная зависимость вида $f_1(x_1) = 0.577x_1^{0.45}$.

4. Определяем условный показатель y_1 для каждого x_2 : $y_1 = \frac{y_0}{f_1(x_1)}$. Этот остаточный показатель уже будет зависеть не от изменения x_1 , а от величин x_2 :

$$y_1 = \frac{y}{\bar{y}f_1(x_1)} = f_2(x_2).$$

Далее рассчитываем уравнение $y_1 = f_2(x_2)$ и выбираем зависимость с минимальным значением δ . Ей соответствует также степенная зависимость со средней ошибкой 25.15 %, которая имеет вид $f_2(x_2) = 0.745x_2^{-0.213}$.

5. Затем определяем новый показатель y_2 , который будет зависеть от изменения x_3 :

$$y_2 = \frac{y_1}{f_2(x_2)} = \frac{y}{\bar{y}f_1(x_1)f_2(x_2)} = f_3(x_3).$$

Далее рассчитываем уравнение $y_2 = f_3(x_3)$ и также выбираем зависимость с минимальным значением δ . Ей соответствует степенная зависимость со средней ошибкой 14.77 %, которая имеет вид $f_3(x_3) = 0.903x_3^{0.571}$.

6. Модель относительной глубины оттаивания грунта у бровки откоса земляного полотна имеет вид $y = \bar{y}f_1(x_1)f_2(x_2)f_3(x_3)$.

В итоге уравнение зависимости относительной глубины оттаивания грунта у бровки откоса

земляного полотна от безразмерных параметров α, β и γ принимает вид

$$\xi_{sh}^{cl} = 1.1\alpha^{0.45}\beta^{-0.213}\gamma^{0.571}. \quad (10)$$

Определяем глубину оттаивания под бровкой откоса по формуле

$$H_{th} = H\xi_{sh}^{cl}.$$

Ошибка аппроксимации δ результатов моделирования выражением (10) приведена в табл. 2.

ПРИМЕР РАСЧЕТА

Постановка задачи. Железнодорожная насыпь, расположенная в районе пос. Лабитнанги (метеостанция Салехард, пурговый район), имеет ширину основной площадки $B = 6$ м, высоту $H = 4$ м, $n = 1.5$. Коэффициент теплообмена между поверхностью насыпи и атмосферой в летнее время $\alpha_s = 20$ Вт/(м²·°С), в зимнее время $\alpha_w = 16.7$ Вт/(м²·°С). Среднее зимнее термическое сопротивление снега на основной площадке $R_{snow, or} = 0.167$ м²·°С/Вт, на откосе $R_{snow, de} = 4$ м²·°С/Вт. Сумма температур дневной поверхности насыпи в летнее время с учетом солнечной радиации $\Omega_s = 38\ 617$ °С·ч, в зимнее время $\Omega_w = -84\ 607$ °С·ч. Коэффициент теплопроводности материала насыпи в талом состоянии $\lambda_{th} = 1.97$ Вт/(м·°С), в мерзлом состоянии $\lambda_{th} = 2.32$ Вт/(м·°С), объемная теплота фазовых переходов воды в грунте $L_v = 20\ 925$ Вт·ч/м³, температура начала замерзания $T_{bf} = -0.1$ °С. Начальная температура грунта основания насыпи на подошве слоя сезонного оттаивания $T_0 = -1$ °С.

Требуется определить термическое сопротивление теплоизоляции, укладываемой на откос насыпи, при котором максимальное оттаивание грунта под основной площадкой (под бровкой откоса) H_{th} не превысит высоту насыпи H .

Последовательность расчета. Расчет проводим методом итераций, добиваясь выполнения условия $H_{th} \leq H$. На первом шаге итераций задаем значение термического сопротивления теплоизоляции равным $R_{ins} = 0$, т. е. отсутствие ее на поверхности откосов. Далее определяем:

1) длину откоса

$$L = \sqrt{H^2 + (nH)^2} = \sqrt{4^2 + (1.5 \cdot 4)^2} = 7.21 \text{ м};$$

2) по формулам (8) и (9) термическое сопротивление на дневной поверхности в летнее и зимнее время в пределах основной площадки и откоса:

$$R_{s, or} = R_{s, de} = \frac{1}{20} = 0.05 \text{ м}^2 \cdot \text{°С} / \text{Вт},$$

$$R_{w, de} = \frac{1}{16.7} + 4 = 4.06 \text{ м}^2 \cdot \text{°С} / \text{Вт},$$

$$R_{w, or} = \frac{1}{16.7} + 0.167 = 0.22 \text{ м}^2 \cdot \text{°С} / \text{Вт};$$

3) по формуле (6) глубину сезонного оттаивания грунта на основной площадке и откосе:

$$d_{th,or} = d_{th,de} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1.97 \cdot 38\,617}{20\,925} + (1.97 \cdot 0.05)^2} - 1.97 \cdot 0.05 = 2.6 \text{ м};$$

4) по формуле (7) глубину сезонного промерзания грунта на основной площадке и откосе:

$$d_{f,or} = \sqrt{\frac{-2 \cdot 2.32 \cdot (-84\,607)}{20\,925} + (2.32 \cdot 0.23)^2} - 2.32 \cdot 0.23 = 3.84 \text{ м};$$

$$d_{f,de} = \sqrt{\frac{-2 \cdot 2.32 \cdot (-84\,607)}{20\,925} + (2.32 \cdot 4.06)^2} - 2.32 \cdot 4.96 = 0.95 \text{ м};$$

5) безразмерный параметр M на основной площадке и откосе:

$$M_{or} = \frac{3.84}{2.6} = 1.48, \quad M_{de} = \frac{0.95}{2.6} = 0.36;$$

6) по формуле (4) расчетную температуру поверхности насыпи в пределах основной площадки и откоса: $T_{or} = -5.51 \cdot 1.48 + 6.64 = -1.49 \text{ }^\circ\text{C}$, $T_{de} = -5.51 \cdot 0.36 + 6.64 = 4.63 \text{ }^\circ\text{C}$;

7) по формуле (3) безразмерные параметры:

$$\alpha = \frac{2 \cdot 1.97 \cdot (4.63 - 0.1) \cdot 7.21}{2.32 \cdot (-0.1 + 1.49) \cdot 6} = 6.937,$$

$$\beta = \frac{-0.1 + 1}{-0.1 + 1.49} = 0.647, \quad \gamma = \frac{6}{4} = 1.5;$$

8) по формуле (10) безразмерную глубину оттаивания грунта у бровки откоса:

$$\xi_{sh} = 1.1 \cdot 6.937^{0.45} \cdot 0.647^{-0.213} \cdot 1.5^{0.571} = 3.61;$$

9) глубину оттаивания грунта у бровки откоса и сравниваем ее с высотой насыпи:

$$H_{th} = 3.61 \cdot 4 \text{ м} \gg 4 \text{ м}.$$

Поскольку условие не выполняется, укладываем на откос теплоизолятор, расчет повторяем при разных значениях R_{ins} до тех пор, пока условие $H_{th} \leq H$ не будет выполнено.

В заключение отметим, что условие $H_{th} \leq H$ выполняется при термическом сопротивлении теплоизоляции $R_{ins} = 4.55 \text{ м}^2 \cdot \text{ }^\circ\text{C} / \text{Вт}$, при этом $H_{th} = 3.7 \text{ м}$, что на 0.3 м меньше высоты насыпи.

ВЫВОДЫ

Представлен аналитический метод расчета положения верхней границы многолетнемерзлых грунтов в теле и основании земляного полотна дорог, разработанный на основе аппроксимации ме-

тодом Брандона результатов численного решения двумерной задачи Стефана. Согласно этому методу, зависимость глубины оттаивания от термического сопротивления изоляции на откосах можно представить в безразмерном виде для трех переменных: безразмерной температуры на поверхности гребня и откосов насыпи и отношения ширины гребня к высоте насыпи.

С помощью полученной зависимости можно подобрать необходимую толщину теплоизоляции на откосы земляного полотна дороги, при которой будет происходить стабилизация мерзлотных условий в теле и основании, что иллюстрируется примером расчета.

Литература

Ашпиз Е.С., Хрусталева Л.Н., Емельянова Л.В., Ведерникова М.А. Использование синтетических теплоизоляторов для сохранения мерзлотных условий в основании железнодорожной насыпи // Криосфера Земли, 2008, т. XII, № 2, с. 84–89.

Дорожная насыпь на вечномерзлых грунтах: Пат. 2242813 Рос. Федерация / Ашпиз Е.С., Лукин М.П., Хрусталева Л.Н., Шолин В.В. Опубл. 10.05.08; Бюл. № 13.

Поляков Б.Н. Некоторые особенности аппроксимации функций двух переменных в алгоритме "Метод Брандона" // Прикл. информатика, 2008, № 6, с. 103–105.

Программа расчета теплового взаимодействия инженерных сооружений с вечномерзлыми грунтами WARM: Свидетельство № 940281 / Емельянов Н.В., Хрусталева Л.Н., Пустовойт Г.П., Яковлев С.В. М., РосАПО, 1994.

СП 121.13330.2012. Аэродромы. Актуализированная редакция СНиП 32-03-96. М., Минрегион РФ, 2012, 97 с.

Хрусталева Л.Н. Основы геотехники в криолитозоне. М., Изд-во Моск. ун-та, 2005, 542 с.

Цытович Н.А. К вопросу расчета фундамента сооружений, возводимых на вечной мерзлоте // Науч.-исслед. работы Гипромеза. Л., 1928, вып. 2, 27 с.

Чжан А.А., Ашпиз Е.С., Хрусталева Л.Н., Шестернев Д.М. Новый способ защиты мерзлых грунтов основания насыпи от оттаивания // Криосфера Земли, 2018, т. XXII, № 3, с. 67–71.

Brandon D.B. Developing mathematical models for computer control // Instrument Soc. America (ISA) J., 1959, vol. 6, No. 7, p. 70–73.

References

Ashpiz E.S., Khrustaleva L.N., Emelyanova L.V., Vedernikova M.A. Using of synthetic thermal insulators for conservation of frozen soil conditions in the base of railway embankment. Kriosfera Zemli [Earth's Cryosphere], 2008, vol. XII, No. 2, p. 84–89 (in Russian).

Ashpiz E.S., Lukin M.P., Khrustaleva L.N., Sholin V.V. Dorozhnaya nasup' na vechnomerzlykh gruntakh [Railroad Embankment on Permafrost]. Patent 2242813 RF. Published 10.05.08; Bull. No. 13 (in Russian).

Polyakov B.N. Some features of Brandon approximation for functions of two variables. Prikladnaya Informatica [J. Appl. Informatics], 2008, No. 6, p. 103–105.

Emelyanov N.V., Khrustaleva L.N., Pustovoyt G.P., Yakovlev S.V. Programma rascheta teplovogo vzaimodeistviya

- inzhenernukh sooruzhenii s vechnomerzlumi gruntami WARM [The WARM Software for Modeling Thermal Interaction of Engineering Structures with Permafrost]. Certificate No. 940281. Published by RosAPO, 1994 (in Russian).
- SP 121.13330.2012 – Svod Pravil (construction norms and regulations). Airfields. Actual revision of SNIП 32-03-96. Moscow, Minregion RF, 2012, 97 p. (in Russian).
- Khrustalev L.N. Osnovy geotekhniki v kriolitozone [Foundations of Geotechnical Engineering in Permafrost Zone]. Moscow, Moscow University Press, 2005, 542 p. (in Russian).
- Tsytovich N.A. K voprosu rascheta fundamenta sooruzheniy, vozvodimykh na vechnoi merzlote [Design of Basements on Permafrost]. Research in Gipromez, Leningrad, 1928, issue 2, 27 p. (in Russian).
- Zhang A.A., Ashpiz E.S., Khrustalev L.N., Shesternev D.M. A new way for thermal stabilization of permafrost under railway embankment. Earth's Cryosphere, 2018, vol. XXII, No. 3, p. 59–62.
- Brandon D.B. Developing mathematical models for computer control. J. Instrument Soc. Amer. (ISA), 1959, vol. 6, No. 7, p. 70–73.

*Поступила в редакцию 8 июня 2018 г.,
после доработки – 28 февраля 2019 г.,
принята к публикации 5 марта 2019 г.*