

## СНЕЖНЫЙ ПОКРОВ И ЛЕДНИКИ

УДК 551.52+551.58

DOI: 10.21782/KZ1560-7496-2018-4(31-41)

**ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ СУТОЧНЫХ АМПЛИТУД  
ПРИЗЕМНОЙ ТЕМПЕРАТУРЫ ВОЗДУХА В ГРЕНЛАНДИИ  
ДЛЯ ПРИМЕНЕНИЯ В МАССОБАЛАНСОВЫХ РАСЧЕТАХ****А.П. Невечеря<sup>1,2</sup>, О.О. Рыбак<sup>1,3</sup>**<sup>1</sup>Институт вычислительной математики РАН, 119333, Москва, ул. Губкина, 8, Россия<sup>2</sup>Кубанский государственный университет, 350040, Краснодар, ул. Ставропольская, 149, Россия; [artiom1989@mail.ru](mailto:artiom1989@mail.ru)<sup>3</sup>Сочинский научно-исследовательский центр РАН, 354000, Сочи, ул. Театральная, 8а, Россия; [orybak@vub.ac.be](mailto:orybak@vub.ac.be)

Математическое моделирование поверхностного таяния (абляции) Гренландского щита – одна из актуальных задач современной гляциологии. Расчет абляции сводится к двум основным методам или их комбинации – индексно-температурному и энергобалансовому. Независимо от используемого подхода для точного расчета количества талой воды необходима хорошая аппроксимация суточных амплитуд приземной температуры воздуха и их среднеквадратических отклонений. В статье предложен метод построения аппроксимирующих уравнений для указанных характеристик. Итоговые аппроксимирующие модели позволили установить зависимость суточных амплитуд приземной температуры воздуха в Гренландии от времени и абсолютной высоты над уровнем моря. Оценена точность аппроксимации предложенных моделей.

*Гренландия, климат, статистические методы, ледниковый щит, приземная температура воздуха, абляция, баланс массы*

**PARAMETERIZATION OF DAILY AMPLITUDES OF SURFACE AIR TEMPERATURE  
IN GREENLAND FOR APPLICATION IN MASS BALANCE CALCULATIONS****A.P. Nevecherja<sup>1,2</sup>, O.O. Rybak<sup>1,3</sup>**<sup>1</sup>Institute of Numerical Mathematics, RAS, 8, Gubkina str., Moscow, 119333, Russia<sup>2</sup>Kuban State University, 149, Stavropolskaya str., Krasnodar, 350040, Russia; [artiom1989@mail.ru](mailto:artiom1989@mail.ru)<sup>3</sup>Sochi Research Centre, RAS, 8a, Theatralnaya str., Sochi, 354000, Russia; [orybak@vub.ac.be](mailto:orybak@vub.ac.be)

Mathematical modeling of melting (ablation) on the surface of the Greenland ice sheet is one of the challenging tasks of the modern glaciology. Normally, the ablation rate is evaluated by using one of the two methods – either by the index-temperature method or by the energy balance method (or by combination of both). The pitfall of either method is realistic approximation of the daily amplitudes of surface air temperatures and of the mean square errors of surface air temperatures. In the paper, an approach is proposed for approximating the equations of both characteristics. Final approximating models allowed us to establish the dependence of surface air temperatures daily amplitudes on time and on the absolute height above the sea level.

*Greenland, climate, statistical methods, ice sheet, surface air temperature, ablation, mass balance*

**ВВЕДЕНИЕ**

Методы математического моделирования получили широкое распространение в гляциологических исследованиях. Одна из областей их приложения – динамика ледниковых щитов. Структура современной математической модели предполагает, что в ней присутствует блок, описывающий баланс массы на поверхности ледникового щита [Рыбак, 2008] и имеющий приходную (аккумуляция) и расходную (абляция) части. Если расходная часть в условиях Антарктиды представлена главным образом процессом возгонки [van de Berg et al., 2005], то для Гренландии определяющую роль играет таяние [Ettema et al., 2010]. Для рас-

чета скорости таяния в современных моделях применяется два основополагающих подхода: индексно-температурный метод (или метод подсчета количества градусо-дней с положительной температурой, positive degree-day method – PDDM [Braithwaite, 1995]) и энергобалансовый метод (energy balance method, ЕВМ, в рамках которого количество талой воды определяется расчетом количества доступной энергии, затрачиваемой на таяние [Oerlemans, 1991]). Преимущества PDDM заключаются в его относительной простоте и прямой эмпирической привязке к температуре воздуха. Недостатками являются большой разброс зна-

чений эмпирически определяемой зависимости скорости таяния снега и льда от температуры воздуха и достаточно произвольный суточный и годовой ход приземной температуры воздуха [Rogozhina, Rau, 2014], а также вариации их статистических характеристик в случае, если в качестве исходной информации используется реконструируемая или модельная среднегодовая температура. К достоинствам ЕВМ следует отнести его строгую физическую обоснованность, а недостатки связаны прежде всего со сложностью формализации расчетов ряда ключевых переменных, в частности альбедо поверхности. В ряде случаев расче-

ты на ЕВМ также зависят от того, как описывается суточный ход приземной температуры воздуха [Rybak et al., 2016].

Несмотря на рост в последние десятилетия количества автоматических метеостанций (АМС) в Гренландии, их сеть все же довольно редка, особенно во внутренних районах (рис. 1, табл. 1). В связи с этим для целей математического моделирования часто прибегают к различным параметризациям поля приземной температуры воздуха (ПТВ) в зависимости от широты, долготы и абсолютной высоты места [Fausto et al., 2009]. Как правило, подобные параметризации строятся для среднегодовых и среднеиюльских значений ПТВ, а значения в остальные месяцы или дни восстанавливаются исходя из предположения о том, что годовой ход ПТВ представляет собой простую гармоническую функцию. Более детальная временная дискретизация в моделях абляции достигается с помощью статистических методов [Zweck, Huybrechts, 2005]. Проблема заключается в том, что используемые схемы строятся на гипотезе о гауссовском распределении аномалий ПТВ. Применяемые параметры распределения, прежде всего среднее квадратическое отклонение среднесуточной температуры, определяются с известной долей субъективности, что снижает надежность получаемых результатов [Rogozhina, Rau, 2014].

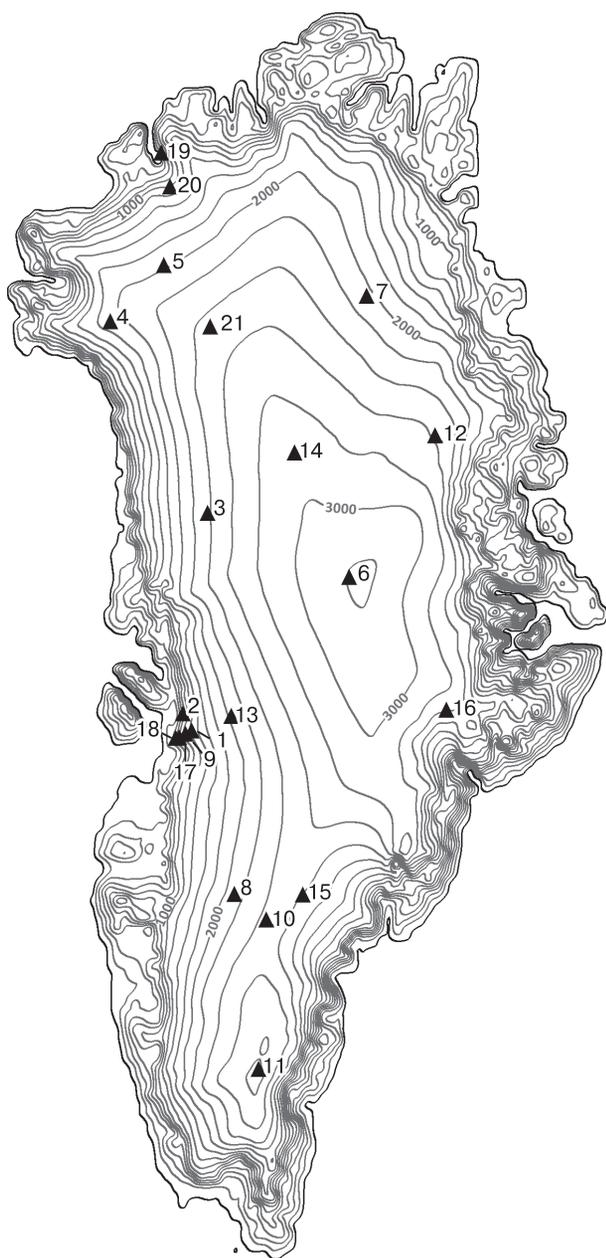


Рис. 1. Расположение автоматических метеостанций на территории Гренландии (см. табл. 1).

Таблица 1. Координаты и абсолютная высота расположения автоматических метеостанций в Гренландии из [Steffen, Box, 2001]

Но- мер	Название	Годы на- блюдений	Координаты		Высота, м над ур. моря
			сев. широта	зап. долгота	
1	Swiss Camp	1996–2014	69.56	49.33	1176
2	Crawford Point1	1995–2012	69.88	50.00	2022
3	NASA-U	1995–2014	73.84	49.51	2334
4	GITS	1995–2014	77.14	61.04	1869
5	Humboldt	1995–2014	78.53	56.83	1995
6	Summit	1996–2014	72.58	38.51	3199
7	Tunu-N	1996–2014	78.02	33.98	2052
8	DYE-2	1996–2014	66.48	46.28	2099
9	JAR 1	1997–2014	69.50	49.70	932
10	Saddle	1997–2014	66.00	44.50	2467
11	South Dome	1997–2014	63.15	44.82	2901
12	NASA-E	1997–2014	75.00	30.00	2614
13	Crawford P2	1996–2001	69.91	46.85	1990
14	NGRIP	2002–2010	75.10	42.33	2941
15	NASA-SE	1998–2014	66.48	42.50	2373
16	KAR	1999–2001	69.70	33.01	2579
17	JAR 2	1999–2013	69.41	50.09	507
18	JAR3	2000–2004	69.39	50.31	283
19	Petermann Gl.	2002–2006	80.68	60.29	37
20	Peterman ELA	2003–2014	80.08	58.07	965
21	NEEM	2006–2014	77.50	50.87	2454

В настоящей работе авторы приводят результаты статистического анализа рядов ПТВ, полученных путем измерений на АМС в Гренландии, и предлагают соответствующие аппроксимирующие уравнения, которые могут быть использованы в энерго- и массобалансовых расчетах.

**1. Постановка задачи и исходные данные**

В общем виде решаемая в настоящей работе задача состоит в следующем. Если каким-либо образом (например, в результате математического моделирования) на территории Гренландского шита задается поле среднесуточной ПТВ, то как можно рассчитать минимальные и максимальные значения ПТВ в течение суток, используя данные метеонаблюдений? Хотя ряды метеорологических наблюдений на немногочисленных АМС в Гренландии достаточно короткие, они позволяют обобщить в виде аппроксимирующих уравнений зависимость максимальных и минимальных средних многолетних значений ПТВ (соответственно, и амплитуд ПТВ) от календарного дня и абсолютной высоты над уровнем моря.

В качестве исходных данных были использованы ежечасные измерения ПТВ на 21 АМС ( $j = 1, \dots, 21$ ) (см. табл. 1) [Steffen, Box, 2001]. Станции расположены на территории Гренландии не вполне равномерно (см. рис. 1), что, разумеется, не может не влиять на конечные результаты расчетов. Длительность рядов также различная. Тем не менее в целом станции покрывают большую часть территории Гренландии и, что немаловажно, практически весь высотный диапазон – от побережья до самой высокой точки.

**2. Параметризация суточных максимумов и минимумов ПТВ**

Приведем некоторые формальные определения. Под среднесуточной аномалией ПТВ  $y_j(\lambda)$

на каждой  $j$ -й АМС (см. табл. 1) подразумевается отклонение среднесуточного значения от среднегодового многолетнего:

$$y_j(\lambda) = c_j(\lambda) - a_j. \tag{1}$$

Здесь  $a_j$  – среднее многолетнее значение ПТВ, т. е. результат осреднения исходных наблюдений по всем дням года  $\lambda = 1, \dots, \Lambda$  ( $\Lambda = 365$  или  $366$  – количество дней в году), по всем ежечасным значениям  $t = \overline{1, \dots, T}$  ( $T = 24$ ) и по всем годам наблюдений  $r = 1, \dots, M_j$ ,  $M_j$  – число лет наблюдений на  $j$ -й АМС:

$$a_j = \frac{1}{T \Lambda M_j} \sum_{r=1}^{r=M_j} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=\Lambda} \sum_{t=1}^{t=T} x_{j,r,\lambda,t}, \tag{2}$$

где  $x_{j,r,\lambda,t}$  – исходные данные наблюдений за ПТВ на  $j$ -й АМС в год  $r$ , день года  $\lambda$  и час  $t$ . В (1)  $c_j(\lambda)$  – среднесуточное среднемноголетнее значение ПТВ в день  $\lambda$  на  $j$ -й АМС:

$$c_j(\lambda) = \frac{1}{T M_j} \sum_{r=1}^{r=M_j} \sum_{t=1}^{t=T} x_{j,r,\lambda,t}. \tag{3}$$

Иначе говоря, в (1)–(3) формально определен среднемноголетний сезонный ход ПТВ на  $j$ -й АМС с суточным разрешением. Чтобы решить задачу, поставленную в п. 1, необходимо аппроксимировать средние многолетние минимальные и максимальные отклонения от среднесуточных значений. Будем называть их для краткости средними минимумами и средними максимумами:  $c_{\lambda,j}^{(\min)} = \min_t c_{j,\lambda,t}$  и  $c_{\lambda,j}^{(\max)} = \max_t c_{j,\lambda,t}$ , имея в виду, что это не абсолютные значения, отклонения от среднесуточных значений. На рис. 2, а, б приведены примеры их распределения  $c_{\lambda,j}^{(\min)}$  и  $c_{\lambda,j}^{(\max)}$  на АМС Tunu-N и Petermann Gl соответственно, рас-

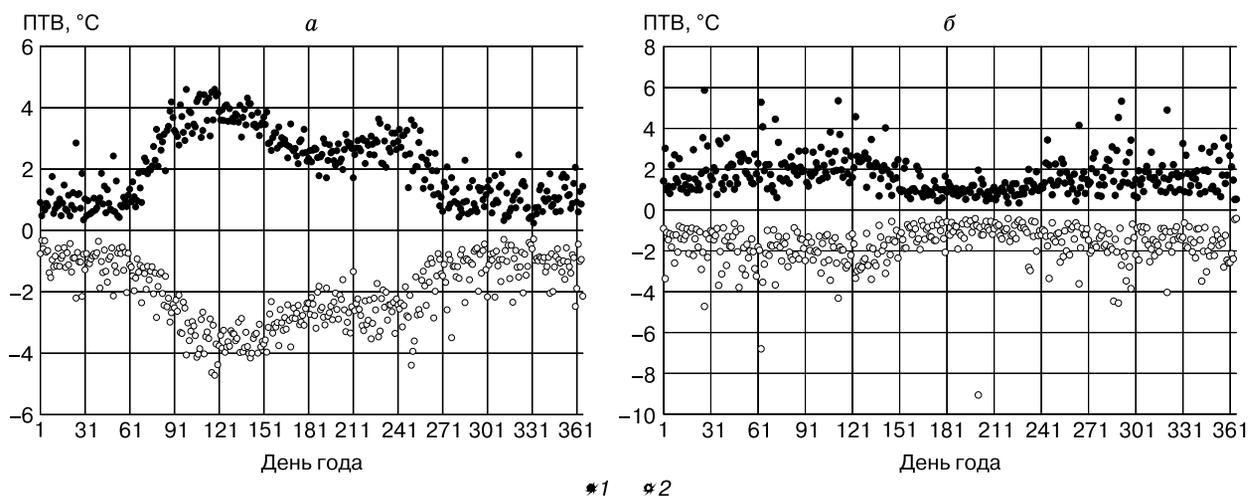


Рис. 2. Средние многолетние максимумы (1) и минимумы (2) ПТВ на станциях Tunu-N (а) и Petermann Gl (б).

Таблица 2. **Оценочные значения коэффициентов параметрических уравнений для аппроксимации средних минимумов ПТВ**

$j$	$b'_{0j}$	$b'_{1j}$	$b'_{2j}$	$b'_{3j}$	$b'_{4j}$	$b'_{5j}$
1	-0.92	$1.57 \cdot 10^{-2}$	$-7.6 \cdot 10^{-4}$	$6.63 \cdot 10^{-6}$	$-2.1 \cdot 10^{-8}$	$2.28 \cdot 10^{-11}$
2	-1.44	$3.09 \cdot 10^{-2}$	$-9.1 \cdot 10^{-4}$	$6.31 \cdot 10^{-6}$	$-1.7 \cdot 10^{-8}$	$1.5 \cdot 10^{-11}$
3	-1.66	$1.56 \cdot 10^{-2}$	$-7.8 \cdot 10^{-4}$	$6.32 \cdot 10^{-6}$	$-1.9 \cdot 10^{-8}$	$1.86 \cdot 10^{-11}$
4	-1.59	$2.72 \cdot 10^{-2}$	$-7.9 \cdot 10^{-4}$	$6.04 \cdot 10^{-6}$	$-1.8 \cdot 10^{-8}$	$1.78 \cdot 10^{-11}$
5	-1.40	$3.14 \cdot 10^{-2}$	$-8.7 \cdot 10^{-4}$	$5.95 \cdot 10^{-6}$	$-1.6 \cdot 10^{-8}$	$1.41 \cdot 10^{-11}$
6	-1.69	$5.76 \cdot 10^{-2}$	$-2.08 \cdot 10^{-3}$	$1.65 \cdot 10^{-5}$	$-4.9 \cdot 10^{-8}$	$5.03 \cdot 10^{-11}$
7	-1.01	$2.91 \cdot 10^{-2}$	$-1.02 \cdot 10^{-3}$	$7.36 \cdot 10^{-6}$	$-2.0 \cdot 10^{-8}$	$1.82 \cdot 10^{-11}$
8	-1.16	$3.94 \cdot 10^{-2}$	$-1.41 \cdot 10^{-3}$	$1.08 \cdot 10^{-5}$	$-3.1 \cdot 10^{-8}$	$3.16 \cdot 10^{-11}$
9	-0.79	$1.97 \cdot 10^{-2}$	$-7.9 \cdot 10^{-4}$	$6.9 \cdot 10^{-6}$	$-2.2 \cdot 10^{-8}$	$2.47 \cdot 10^{-11}$
10	-1.48	$2.61 \cdot 10^{-2}$	$-1.07 \cdot 10^{-3}$	$8.27 \cdot 10^{-6}$	$-2.4 \cdot 10^{-8}$	$2.35 \cdot 10^{-11}$
11	-0.87	$-1.45 \cdot 10^{-2}$	$-3.7 \cdot 10^{-4}$	$4.04 \cdot 10^{-6}$	$-1.3 \cdot 10^{-8}$	$1.43 \cdot 10^{-11}$
12	-1.31	$2.41 \cdot 10^{-2}$	$-1.17 \cdot 10^{-3}$	$9.43 \cdot 10^{-6}$	$-2.8 \cdot 10^{-8}$	$2.76 \cdot 10^{-11}$
13	-2.22	$1.93 \cdot 10^{-2}$	$-7.3 \cdot 10^{-4}$	$5.79 \cdot 10^{-6}$	$-1.7 \cdot 10^{-8}$	$1.81 \cdot 10^{-11}$
14	-1.78	$2.62 \cdot 10^{-2}$	$-9.3 \cdot 10^{-4}$	$7.34 \cdot 10^{-6}$	$-2.2 \cdot 10^{-8}$	$2.27 \cdot 10^{-11}$
15	-1.49	$3.16 \cdot 10^{-2}$	$-1.14 \cdot 10^{-3}$	$8.29 \cdot 10^{-6}$	$-2.2 \cdot 10^{-8}$	$2.1 \cdot 10^{-11}$
16	-3.17	$1.46 \cdot 10^{-2}$	$-7.0 \cdot 10^{-4}$	$5.47 \cdot 10^{-6}$	$-1.6 \cdot 10^{-8}$	$1.56 \cdot 10^{-11}$
17	-1.34	$9.66 \cdot 10^{-3}$	$-3.4 \cdot 10^{-4}$	$3.29 \cdot 10^{-6}$	$-1.2 \cdot 10^{-8}$	$1.35 \cdot 10^{-11}$
18	-1.27	$-2.14 \cdot 10^{-3}$	$-3.1 \cdot 10^{-4}$	$3.89 \cdot 10^{-6}$	$-1.5 \cdot 10^{-8}$	$1.82 \cdot 10^{-11}$
19	-1.23	$-2.86 \cdot 10^{-2}$	$2.24 \cdot 10^{-4}$	$8.16 \cdot 10^{-8}$	$-3.8 \cdot 10^{-9}$	$6.76 \cdot 10^{-12}$
20	-1.85	$2.86 \cdot 10^{-2}$	$-6.9 \cdot 10^{-4}$	$5.97 \cdot 10^{-6}$	$-2.0 \cdot 10^{-8}$	$2.39 \cdot 10^{-11}$
21	-2.18	$4.05 \cdot 10^{-2}$	$-1.38 \cdot 10^{-4}$	$1.11 \cdot 10^{-5}$	$-3.4 \cdot 10^{-8}$	$3.6 \cdot 10^{-11}$

Таблица 3. **Оценочные значения коэффициентов параметрических уравнений для аппроксимации средних максимумов ПТВ**

$j$	$b''_{0j}$	$b''_{1j}$	$b''_{2j}$	$b''_{3j}$	$b''_{4j}$	$b''_{5j}$	$b''_{6j}$	$b''_{7j}$	$b''_{8j}$
1	1.77	0	0.05	0.67	0	0.66	3.14	0.97	1.86
2	2.47	0	0.16	0.31	0.23	1.30	2.92	0.84	1.49
3	2.49	0	0	1.25	0.83	0	6.28	0.39	1.92
4	1.89	0	0.26	0.67	0.50	0	5.54	0.40	2.32
5	2.16	0	0.16	0.32	0	1.11	3.00	0.76	1.72
6	3.20	0	0.20	1.78	0.78	0	6.28	0.90	1.98
7	2.42	0	0	0.42	0	1.61	2.96	1.14	1.60
8	0.72	2.88	0	0	0	0	6.28	0.49	2.21
9	1.40	0	0.19	0.53	0	0.43	3.17	0.77	1.97
10	2.70	0	0.05	1.26	0.98	0	6.28	0.61	1.82
11	1.48	1.87	0.14	1.05	0.03	0	3.87	0.60	1.33
12	8.74	9.56	3.07	5.39	1.28	0	6.28	1.58	1.54
13	2.15	0.76	0	0.70	0.44	0	1.23	0	4.83
14	2.60	0	0.12	0.40	0	0.84	3.03	0.84	1.70
15	2.81	0	0.14	1.53	1.06	0	6.28	0.50	1.76
16	3.49	0.33	0	0.90	0.28	0.55	3.67	0.48	2.60
17	1.14	0	0	0.40	0	0	2.18	0.22	2.43
18	1.43	0.02	0.15	0.57	0	0.20	6.28	0.30	2.36
19	1.69	0	0	0	1.17	0	2.57	0.40	1.98
20	1.39	0	0.13	0.35	0	0.48	5.90	0.46	3.56
21	2.84	0	0.14	1.10	0.52	0	6.28	0.60	2.04

положенных во внутренней области и на побережье ( $j = 7$  и  $19$ ).

Рассчитаем аппроксимирующие функции для  $c_{\lambda,j}^{(\min)}$  и  $c_{\lambda,j}^{(\max)}$  для каждой АМС. Годовой ход  $c_{\lambda,j}^{(\min)}$  и  $c_{\lambda,j}^{(\max)}$  включает два локальных минимума и столько же локальных максимумов, что является типичным для всех АМС (см. рис. 2). В связи с этим временные ряды  $c_{\lambda,j}^{(\min)}$  и  $c_{\lambda,j}^{(\max)}$  рационально аппроксимировать либо периодической функцией, либо полиномиальной функцией 5-й степени. Предварительная прогонка данных временных рядов с помощью метода проекции градиента [Левитин, Поляк, 1966] показала, что значения  $c_{\lambda,j}^{(\min)}$  наименьшим образом отклоняются от полиномиальной функции

$$f_j^{(\min)}(t) = \sum_{i=0}^5 b_{ij}' t^i, \quad j = \overline{1, n}; \quad (4)$$

значения  $c_{\lambda,j}^{(\max)}$  лучше аппроксимируются периодической функцией

$$f_j^{(\max)}(t) = b_{0j}'' + \sum_{i=1}^4 b_{2i-1,j}'' \sin\left(\frac{t\pi}{365} - b_{2i,j}''\right), \quad (5)$$

$$b_{ij}'' \geq 0, \quad b_{2k,j}'' \leq 2\pi, \quad i = \overline{0, 8}, \quad k = \overline{1, 4}, \quad j = \overline{1, n},$$

где  $n$  – количество станций.

Для нахождения параметров  $b_{ij}'$  ( $i = \overline{0, 5}$ ,  $j = \overline{1, n}$ ) и  $b_{ij}''$  ( $i = \overline{0, 8}$ ,  $j = \overline{1, n}$ ) воспользуемся методом наименьших квадратов при решении следующих задач оптимизации:

$$F^{(\min)}(b') = \sum_{t=1}^{365} \left( c_{t,j}^{(\min)} - \sum_{i=0}^5 b_{ij}' t^i \right)^2 \rightarrow \min; \quad (6)$$

$$F^{(\max)}(b'') =$$

$$= \sum_{t=1}^{365} \left[ c_{t,j}^{(\max)} - b_{0j}'' - \sum_{i=1}^4 b_{2i-1,j}'' \sin\left(\frac{t\pi}{365} - b_{2i,j}''\right) \right]^2 \rightarrow \min,$$

$$b_{ij}'' \geq 0, \quad b_{2k,j}'' \leq 2\pi, \quad i = \overline{0, 8}, \quad k = \overline{1, 4}, \quad j = \overline{1, n}. \quad (7)$$

Для получения коэффициентов в (7) воспользуемся методом проекции градиента. Результаты расчетов сведены в табл. 2, 3. Таким образом, в результате решения задач (6) и (7) получаем 42 параметрических уравнения  $c_{\lambda,j}^{(\min)}$  и  $c_{\lambda,j}^{(\max)}$  для каждой из АМС (по 21 для среднего максимума и среднего минимума).

На следующем шаге необходимо обобщить полученные выше выражения (4) и (5) функция-ми  $f_{gen}^{(\min)}(t, h)$  и  $f_{gen}^{(\max)}(t, h)$ . Если (4) и (5) использовались для расчета средних минимумов и мак-

симумов ПТВ только в районе АМС, то  $f_{gen}^{(\min)}(t, h)$  и  $f_{gen}^{(\max)}(t, h)$  должны зависеть исключительно от высоты  $h$  и времени  $t$ . Таким образом, параметры средних минимумов и максимумов ПТВ по этим функциям могут быть рассчитаны всюду в Гренландии:

$$f_{gen}^{(\min)}(t, h) = \sum_{i=1}^5 \tilde{b}_i' t^i + \phi^{(\min)}(h); \quad (8)$$

$$f_{gen}^{(\max)}(t, h) = \sum_{i=1}^4 \tilde{b}_{2i-1}'' \sin\left(\frac{t\pi}{365} - \tilde{b}_{2i}''\right) + \phi^{(\max)}(h). \quad (9)$$

Алгоритмы расчета коэффициентов в (8) и (9) различны. Коэффициенты  $\tilde{b}_i'$  ( $i = \overline{1, 5}$ ) в правой части (8) определяются как средние значения соответствующих коэффициентов функций

$$f_j^{(\min)}(t), \quad j = \overline{1, n}: \quad \tilde{b}_i' = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n b_{ij}', \quad i = \overline{1, 5}. \quad \text{Первое сла-}$$

гаемое в правой части (9) найдем с помощью использованного ранее метода проекции градиентов, применяя его для среднесезонного сезонного хода температур в среднем по Гренландии.

Предположим, что характер изменения средних максимумов и средних минимумов ПТВ в течение года одинаков для всей территории Гренландии и линейно зависит только от абсолютной высоты АМС, на которой производились измерения ПТВ. Из уравнений (8) и (9) определим функции  $\phi^{(\min)}(h)$  и  $\phi^{(\max)}(h)$ , устанавливающие зависимость средних максимумов и средних минимумов ПТВ от абсолютной высоты:

$$\phi_j^{(\min)} = f_j^{(\min)}(t) - \sum_{i=1}^5 \tilde{b}_i' t^i,$$

$$\phi_j^{(\max)} = f_j^{(\max)}(t) - \sum_{i=1}^4 \tilde{b}_{2i-1}'' \sin\left(\frac{t\pi}{365} - \tilde{b}_{2i}''\right), \quad j = \overline{1, n}.$$

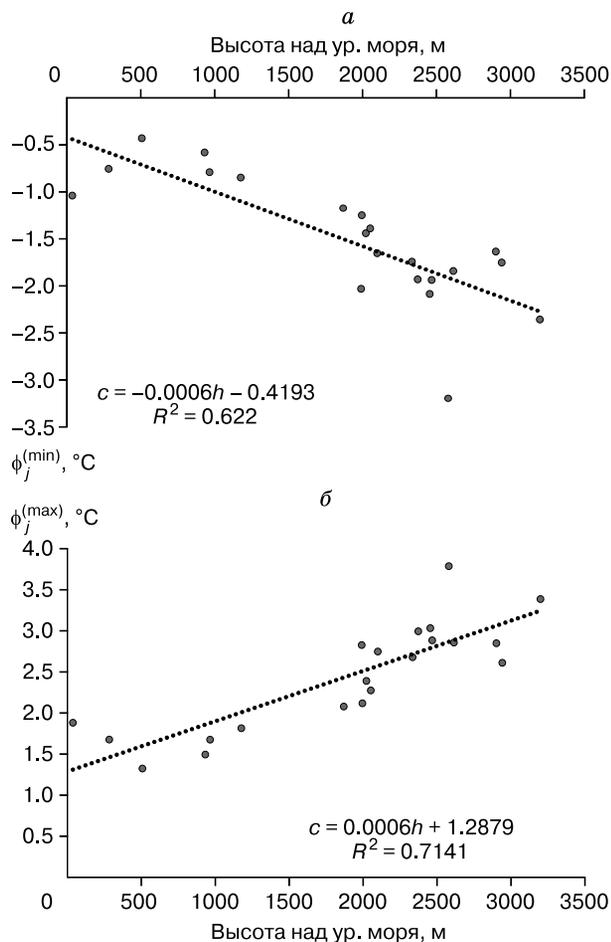
Величины  $\phi_j^{(\min)}$  и  $\phi_j^{(\max)}$  удовлетворительно аппроксимируются линейными функциями с коэффициентами детерминации  $R^2 = 0.6-0.7$  (рис. 3).

Соответственно, итоговый вид функций, аппроксимирующих поля средних максимумов и средних минимумов ПТВ, будет следующим:

$$f_{gen}^{(\min)}(t, h) = \sum_{i=1}^5 \tilde{b}_i' t^i + \tilde{b}_6' + \tilde{b}_7' h,$$

$$f_{gen}^{(\max)}(t, h) = \sum_{i=1}^4 \tilde{b}_{2i-1}'' \sin\left(\frac{t\pi}{365} - \tilde{b}_{2i}''\right) + \tilde{b}_9' + \tilde{b}_{10}' h.$$

С учетом ранее полученного вида  $\phi_j^{(\min)}$  находим:  $\tilde{b}_1' = 0.21046$ ,  $\tilde{b}_2' = -0.00086$ ,  $\tilde{b}_3' = 6.95 \cdot 10^{-6}$ ,  $\tilde{b}_4' = -2.1 \cdot 10^{-8}$ ,  $\tilde{b}_5' = -2.16 \cdot 10^{-11}$ ,  $\tilde{b}_6' = -0.41933$ ,  $\tilde{b}_7' = -0.00058$ .

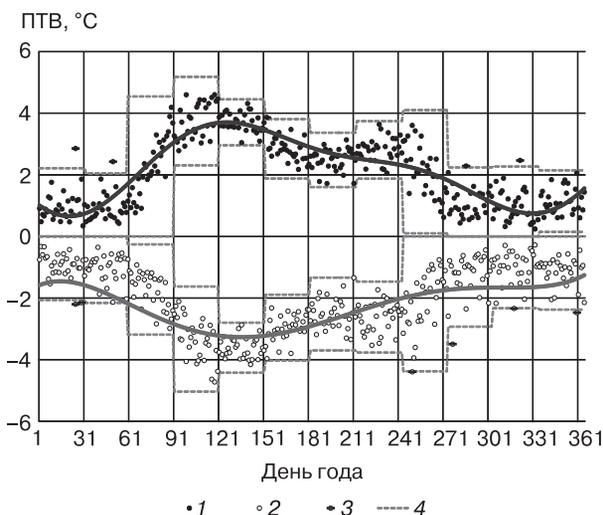


**Рис. 3.** Распределение  $\phi_j^{(\min)}$  (а) и  $\phi_j^{(\max)}$  (б) в зависимости от высоты над уровнем моря  $j$ -й автоматической метеостанции ( $j = \overline{1, n}$ ).

Для функции  $f_{gen}^{(\max)}(t, h)$  получаем следующие значения коэффициентов:  $\tilde{b}_1'' = 0$ ,  $\tilde{b}_2'' = 0.133134$ ,  $\tilde{b}_3'' = 0.602547$ ,  $\tilde{b}_4'' = 0$ ,  $\tilde{b}_5'' = 0.869348$ ,  $\tilde{b}_6'' = 3.026055$ ,  $\tilde{b}_7'' = 0.87741$ ,  $\tilde{b}_8'' = 1.719926$ ,  $\tilde{b}_9'' = 1.287887$ ,  $\tilde{b}_{10}'' = 0.000612$ .

В качестве примера расчетов на рис. 4 приведены аппроксимации средних максимумов и средних минимумов ПТВ на АМС  $j = 7$ .

На рис. 4 усл. знаком 3 обозначены выбросы в исходных временных рядах средних максимумов и средних минимумов ПТВ. Данные наблюдения исключены из исходного ряда данных при подборе аппроксимирующей функции  $f_{gen}^{(\max)}(t, h)$ . Для определения выбросов использовалось правило сигм: для каждого месяца года рассчитывался допустимый интервал для наблюдений данного месяца (линия 4 на рис. 4). Таким образом, все наблюдения  $c_{\lambda, j}^{(\max)}$ , по которым была получена функ-



**Рис. 4.** Аппроксимация средних максимумов (1) и средних минимумов (2) приземной температуры воздуха на станции Типу-N ( $j = 7$ ).

3 – выбросы в исходных временных рядах средних максимумов и средних минимумов ПТВ; 4 – допустимый интервал для средних максимумов и средних минимумов ПТВ.

ция  $f_{gen}^{(\max)}(t, h)$ , удовлетворяли следующим условиям:

$$\left| c_{\lambda, j}^{(\max)} - \overline{c_{k, j}^{(\max)}} \right| < 2.5\sigma\left(c_{k, j}^{(\max)}\right),$$

$$c_{\lambda, j}^{(\max)} > 0, \quad j = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, 12}.$$

Здесь  $\overline{c_{k, j}^{(\max)}}$  – среднее значение временного ряда  $c_{\lambda, j}^{(\max)}$  за  $k$ -й месяц;  $\sigma\left(c_{k, j}^{(\max)}\right)$  – среднеквадратическое отклонение временного ряда  $c_{t, j}^{(\max)}$ , рассчитанное для  $k$ -го месяца. Коэффициент 2.5 перед среднеквадратическим отклонением подобран эмпирически с целью исключения очевидных выбросов временного ряда наблюдений верхних границ аномалий ПТВ. Данная граница соответствует следующей вероятности:

$$P\left[-2.5\sigma\left(c_{k, j}^{(\max)}\right) < c_{\lambda, j}^{(\max)} - \overline{c_{k, j}^{(\max)}} < 2.5\sigma\left(c_{k, j}^{(\max)}\right)\right] = 2 \cdot \Phi(2.5) = 0.988,$$

где  $\Phi(2.5)$  – значение интегральной функции Лапласа в точке 2.5. Другими словами,

$$\Phi(2.5) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2.5} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \approx 0.4938.$$

Показатели  $\overline{c_{k, j}^{(\max)}}$  и  $\sigma\left(c_{k, j}^{(\max)}\right)$  вычисляются следующим образом:

Таблица 4. Коэффициенты детерминации ( $R^2$ ) и среднеквадратической ошибки аппроксимации ( $\sigma_e$ ) для функций  $f_{gen}^{(min)}(t, h)$ ,  $f_{gen}^{(max)}(t, h)$ ,  $f_{day}(t, h, t_1)$ 

$j$	$f_{gen}^{(min)}(t, h)$		$f_{gen}^{(max)}(t, h)$		$f_{day}(t, h, t_1)$	
	$R^2$	$\sigma_e$	$R^2$	$\sigma_e$	$R^2$	$\sigma_e$
1	0.33	0.60	0.59	0.58	0.47	0.88
2	0.49	0.68	0.48	0.76	0.53	1.12
3	0.49	0.79	0.58	0.77	0.50	1.31
4	0.01	0.87	0.16	0.85	0.06	1.33
5	0.37	0.68	0.33	0.73	0.29	1.20
6	0.53	1.10	0.59	1.04	0.66	1.40
7	0.55	0.71	0.59	0.73	0.56	1.06
8	0.64	0.70	0.67	0.74	0.69	1.06
9	0.00	0.62	0.28	0.60	0.31	0.80
10	0.58	0.72	0.63	0.71	0.66	1.14
11	0.37	0.73	0.59	0.73	0.67	1.06
12	0.58	0.82	0.63	0.86	0.66	1.17
13	0.10	1.15	0.17	1.08	0.39	1.51
14	0.22	0.92	0.14	1.01	0.00	1.79
15	0.59	0.79	0.59	0.83	0.69	1.14
16	0.00	2.00	0.00	1.75	0.44	2.02
17	0.00	0.81	0.00	0.84	0.00	0.92
18	0.00	0.85	0.00	0.90	0.12	0.96
19	0.00	1.26	0.00	1.23	0.00	1.19
20	0.00	1.10	0.00	1.16	0.00	1.28
21	0.32	1.05	0.35	1.17	0.45	1.55

$$\overline{c_{k,j}^{(max)}} = \frac{1}{t_{k,f} - t_{k,s} + 1} \sum_{t_k=t_{k,s}}^{t_{k,f}} c_{t_k,j}^{(max)},$$

$$\sigma(c_{k,j}^{(max)}) = \sqrt{\frac{1}{t_{k,f} - t_{k,s} + 1} \sum_{t_k=t_{k,s}}^{t_{k,f}} (c_{t_k,j}^{(max)} - \overline{c_{k,j}^{(max)}})^2},$$

$$j = \overline{1, n}, \quad k = \overline{1, 12}.$$

Здесь  $t_{k,s}$  – номер первого дня  $k$ -го месяца;  $t_{k,f}$  – номер последнего дня  $k$ -го месяца. Подобная процедура была проведена для всех исходных временных рядов.

Аналогично определяются выбросы ряда  $c_{\lambda,j}^{(min)} < 0$ ,  $\lambda = \overline{1, 365}$ ,  $j = \overline{1, n}$ .

В табл. 4 приведены коэффициенты детерминации функций  $f_{gen}^{(min)}(t, h)$  и  $f_{gen}^{(max)}(t, h)$ . Очевидно, что на отдельных станциях точность аппроксимации либо нулевая, либо близка к таковой. Фактически это связано со значительными пробелами в исходных данных или с тем, что исходный ряд слишком короток.

### 3. Параметризация суточного хода ПТВ

Суточный ход ПТВ обычно аппроксимируется гармонической функцией, исходя из представлений об амплитуде (или максимуме и минимуме). Подчеркнем еще раз, речь идет об отклонении от среднего многолетнего значения для опреде-

ленного дня года. Уравнение для аппроксимации суточного хода ПТВ будет иметь вид

$$f_{day}(t, h, t_1) = B_{t,h} - A_{t,h} \sin\left(\frac{\pi t_1}{12}\right),$$

где  $t$  – день анализируемого года,  $t = \overline{1, 365}$ ;  $h$  – высота над уровнем моря;  $t_1$  – час дня  $t$ ,  $t_1 = \overline{1, 24}$ .

На отрезке  $t_1 = \overline{1, 24}$  данная периодическая функция имеет ровно одну точку минимума и одну точку максимума. Очевидно, эти точки будут соответствовать найденным в п. 2 параметризационным выражениям для средних минимумов и средних максимумов. Отсюда получаем

$$B_{t,h} = \frac{[f_{gen}^{(min)}(t, h) + f_{gen}^{(max)}(t, h)]}{2},$$

$$A_{t,h} = \frac{[f_{gen}^{(max)}(t, h) - f_{gen}^{(min)}(t, h)]}{2}.$$

Таким образом, функция, аппроксимирующая суточный ход ПТВ, принимает следующий вид:

$$f_{day}(t, h, t_1) = \frac{[f_{gen}^{(min)}(t, h) + f_{gen}^{(max)}(t, h)]}{2} - \frac{[f_{gen}^{(max)}(t, h) - f_{gen}^{(min)}(t, h)]}{2} \sin\left(\frac{\pi t_1}{12}\right). \quad (10)$$

О качестве аппроксимации функцией (10) можно судить по коэффициентам детерминации и среднеквадратической ошибке аппроксимации, рассчитанным для каждой АМС (см. табл. 4). Поле аномалий ПТВ приемлемо аппроксимируется в районе большинства станций. Исключением являются те АМС, для которых качество аппроксимации средних максимумов и средних минимумов ПТВ по коэффициенту детерминации является нулевым или крайне низким. Последнее помимо характера тенденций ПТВ объясняется либо сравнительно небольшой продолжительностью временных рядов (см. табл. 1), либо наличием пробелов в данных исследуемых временных рядов, обусловленных длительным отсутствием наблюдений ПТВ по конкретным станциям.

#### 4. Аппроксимация стандартного отклонения ПТВ

В модельных расчетах значений абляции индексно-температурным методом используется заданное значение суточного стандартного отклонения ПТВ [Zweck, Huybrechts, 2005]. Как правило, стандартное отклонение, которое, вообще говоря, является настраиваемым параметром модели, задается однородным для всего ледникового щита. Проверим, насколько обоснованно предположение о его зависимости от абсолютной высоты. Определим стандартное отклонение ПТВ  $SD_t^{(j)}$  на  $j$ -й станции в день года  $t$ :

$$SD_t^{(j)} = \sqrt{\frac{1}{24} \sum_{t_i=1}^{24} (x_{t,t_i,j} - c_{t,j})^2}.$$

Рассчитаем значения  $SD_k$ , осредненные по месяцам года  $k$ , и представим их в виде

$$SD_k = d_{1,k} + d_{2,k}h, \quad k = \overline{1, 12}.$$

Здесь  $d_{1,k}$ ,  $d_{2,k}$  – коэффициенты линейной зависимости параметра стандартного отклонения ПТВ от высоты, на которой производились измерения.

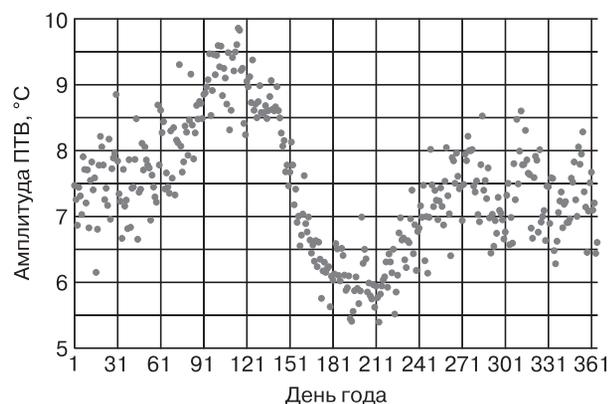


Рис. 5. Суточные амплитуды ПТВ в среднем для Гренландии.

В общем случае они интерпретируются следующим образом:  $d_{1,k}$  – значение стандартного отклонения ПТВ на уровне моря в  $k$ -й месяце;  $d_{2,k}$  – показатель того, насколько сильно изменение высоты на единицу влияет на изменение стандартного отклонения ПТВ. Для нахождения данных коэффициентов для каждого месяца  $k$  воспользуемся методом наименьших квадратов, решая задачу оптимизации

$$F(c_1, c_2) = \sum_{i=1}^n \left( SD_k^{(i)} - d_{1,k} - d_{2,k}h^{(i)} \right)^2 \rightarrow \min, \\ k = \overline{1, 12}. \quad (11)$$

Как и прежде, качество аппроксимации реальных данных уравнением (11) оценивалось с помощью коэффициента детерминации  $R^2$ . Оказалось, что приемлемая точность аппроксимации ( $R^2$ ) может быть получена только для трех летних месяцев:

$$\begin{aligned} \text{июнь} \quad SD_k &= 1.1262 + 0.0007h, \quad R^2 = 0.6035; \\ \text{июль} \quad SD_k &= 0.5151 + 0.0008h, \quad R^2 = 0.6357; \\ \text{август} \quad SD_k &= 1.1714 + 0.0008h, \quad R^2 = 0.5456. \end{aligned}$$

Этот вывод означает, что для наиболее важных с точки зрения расчета абляции месяцев следует принимать во внимание зависимость стандартного отклонения от высоты в соответствии с указанными параметризационными уравнениями.

Дальнейший анализ показал, что  $SD_k$  практически не зависит от широты и долготы АМС ( $R^2 \ll 0.5$ ).

#### 5. Параметризация среднесуточных амплитуд ПТВ

Под амплитудами ПТВ  $z_{\lambda,j}$  в день  $\lambda$  в районе  $j$ -й станции подразумевается разница между максимальной и минимальной температурами в день  $\lambda$ :

$$z_{\lambda,j} = \max_t x_{j,\lambda,t} - \min_t x_{j,\lambda,t}. \quad (12)$$

Заметим, что амплитуды ПТВ можно аппроксимировать разницей средних максимумов и средних минимумов ПТВ (см. п. 2), так как аппроксимируемое значение  $c_{\lambda,j}^{(\max)} - c_{\lambda,j}^{(\min)} = \max_t x_{j,\lambda,t} - a_{j,\lambda} - \left( \max_t x_{j,\lambda,t} - a_{j,\lambda} \right)$ , где  $a_{j,\lambda}$  – средняя ПТВ в день  $\lambda$  на  $j$ -й станции, совпадает с определением (12). Тем не менее для упрощения практических расчетов подберем аппроксимирующую функцию непосредственно к ряду данных  $z_{\lambda,j}$ .

Для выбора вида аппроксимирующей функции рассмотрим распределение амплитуд ПТВ по дням в течение года, осредненных по всем станциям (рис. 5).

Характер распределения предполагает, что функция, описывающая данные изменения, будет содержать четыре экстремальные точки. Предварительные оценки показали, что аппроксимация

Таблица 5. Коэффициенты  $A_{j_h}, B_{j_h}, C_{j_h}$  функции (13) для  $j$ -й метеостанции

$j_h$	$A$	$B$	$C$
1	-1.22	1.05	5.97
2	0.57	3.84	7.99
3	0.81	4.18	8.19
4	0.78	3.42	5.05
5	0.58	3.94	6.95
6	-1.57	0.96	10.9
7	0.48	4.44	7.93
8	-1.08	13.40	8.87
9	0.99	16.56	5.06
10	-0.99	13.63	8.99
11	-1.06	7.60	8.69
12	-1.14	1.55	9.04
13	0.63	10.72	8.03
14	0.86	16.96	7.74
15	0.64	23.00	9.07
16	0.24	15.82	8.91
17	0.77	16.68	4.89
18	0.69	10.38	4.84
19	-0.97	13.83	5.70
20	-0.99	25.73	4.56
21	1.25	41.99	8.67

гармонической функцией предпочтительней, чем полиномиальной. Зададим параметрическую функцию  $f(t, h)$  вида

$$f(t, h) = A_h \sin(\omega t + B_h) + C_h; \quad (13)$$

$$A_h = d_{A,0} + d_{A,1}h; \quad (14)$$

$$B_h = d_{B,0} + d_{B,1}h; \quad (15)$$

$$C_h = d_{C,0} + d_{C,1}h. \quad (16)$$

Из (13) следует, что от коэффициента  $A_h$  зависит амплитуда периодической функции  $f(t, h)$ , от коэффициента  $B_h$  – смещение функции  $f(t, h)$  по оси абсцисс, а от коэффициента  $C_h$  – смещение функции  $f(t, h)$  по оси ординат.

Каждый из параметров  $A_h, B_h$  и  $C_h$ , согласно предположениям (14)–(16), линейно зависит от высоты. Коэффициенты  $d_{i,0}, d_{i,1}, i = A, B, C$  для каждого параметра  $i_h$  интерпретируются следующим образом:  $d_{i,0}$  – значение параметра  $i_h$  в уравнении (13) для  $h = 0$  (на уровне моря);  $d_{i,1}$  – показатель того, насколько изменение высоты на 1 м влияет на изменение соответствующего параметра  $i_h$ .

Для аппроксимации параметров  $A_h, B_h$  и  $C_h$  для произвольной высоты  $h$ , необходимо найти коэффициенты  $d_{i,0}, d_{i,1}, i = A, B, C$ . Их можно вычислить градиентным методом из предположения, что для всех рассматриваемых АМС суммы квадратов отклонений наблюдаемых амплитуд ПТВ

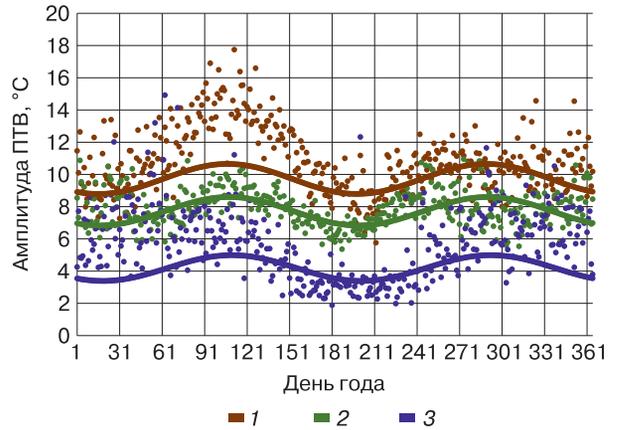


Рис. 6. Аппроксимирующие кривые для амплитуды ПТВ в зависимости от высоты.

1 – в районе станции Summit (3199 м над ур. моря); 2 – в районе станции Tunu-N (2052 м над ур. моря); 3 – в районе станции Petermann Gl (37 м над ур. моря).

от вычисленных с помощью параметрической функции  $f(t, h)$  будут минимальными:

$$\sum_{t=1}^{365} [z_{t,j} - f(t, h_j)]^2 \rightarrow \min, \quad j = \overline{1, n}, \quad (17)$$

$$A_h > 0, \quad 0 \leq B_h < 2\pi.$$

Здесь  $f(t, h_j)$  – аппроксимированное периодической функцией (13) значение среднесуточной амплитуды ПТВ в день года  $t$  на  $j$ -й станции (расположенной на высоте  $h_j$  над уровнем моря);  $n$  – количество станций.

Очевидно, для решения задачи (17) необходимо знать общий период  $\omega$  функций (13). Поскольку годовой график амплитуд температур имеет четыре экстремума (два максимума и два минимума), период функции  $f(t, h)$  будет равен полугоду, т. е. за год проходит два периода функции  $f(t, h)$ . Следовательно,  $\omega = \frac{4\pi}{365}$ .

Применяя градиентный метод, получим коэффициенты параметрической функции (13)  $A_{j_h}, B_{j_h}, C_{j_h}$  для станций  $j = \overline{1, n}$  (табл. 5). Методом наименьших квадратов рассчитаем линейную зависимость между коэффициентами  $A_{j_h}, B_{j_h}, C_{j_h}$  и  $h$ :  $A_h = 0.798\ 055 + 0.000\ 042h, B_h = 4.053\ 022 + 0.000\ 033h, C_h = 4.121\ 33 + 0.001\ 749h$ . В качестве примера расчетов в соответствии с (13)–(16) на рис. 6 представлены аппроксимирующие кривые для амплитуд ПТВ для АМС Summit, Tunu-N и Petermann Gl.

Результаты расчетов, осредненные для января, апреля, июля и октября, приведены на рис. 7. Максимальные амплитуды соответствуют апрелю

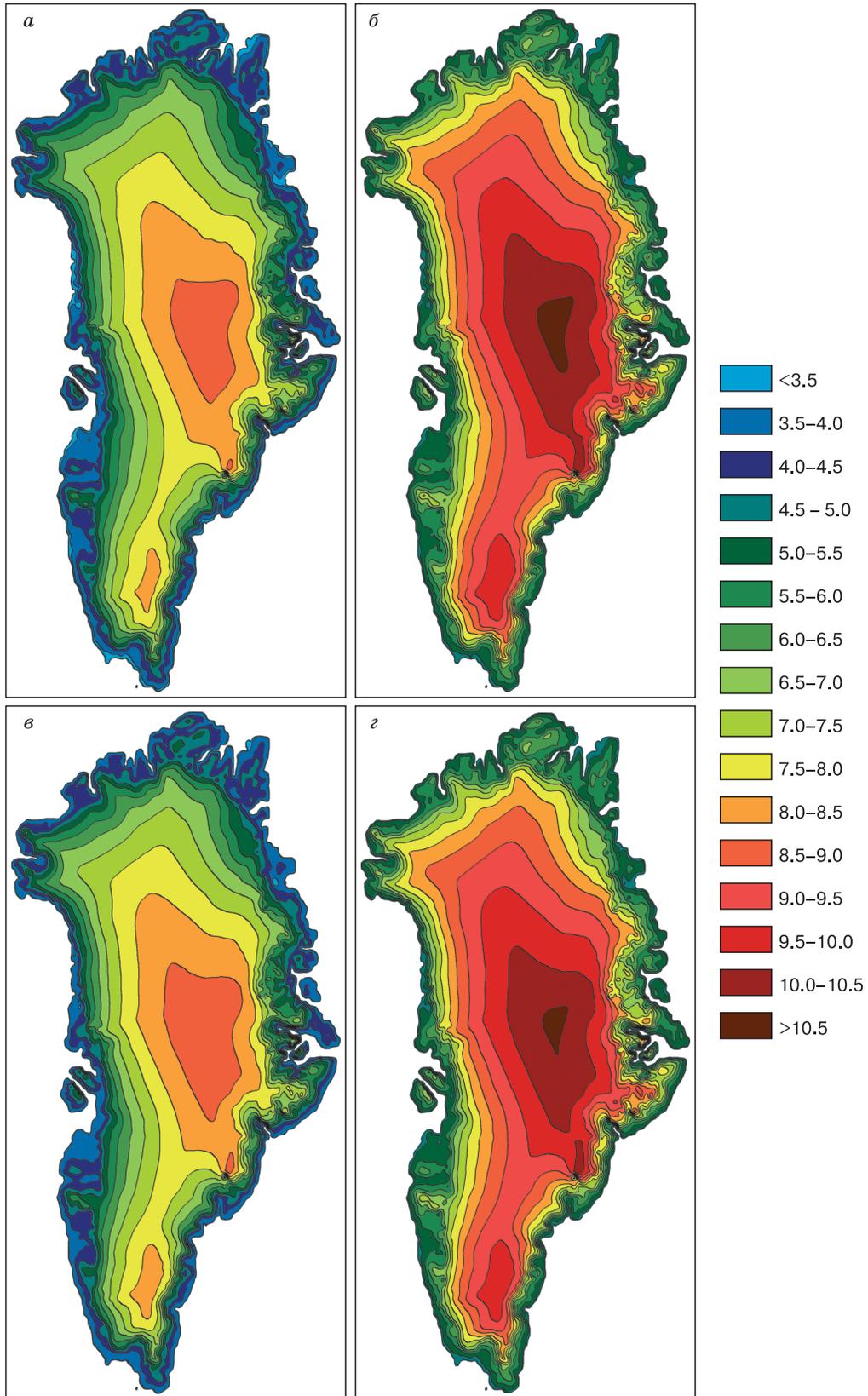


Рис. 7. Средние за месяц суточные амплитуды температур (°С).

а – январь; б – апрель; в – июль; г – октябрь.

и октябрю, минимальные – январю и июлю. Этот вывод имеет большое значение для модельных расчетов абляции, поскольку наглядно показывает необходимость учета вариаций амплитуд суточных температур в течение года. Использование постоянного значения амплитуды может привести к завышению расчетного количества талой воды.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В статье предложены методы аппроксимации таких характеристик приземной температуры воздуха в Гренландии, как стандартное отклонение, среднесуточные амплитуды, суточные минимумы и максимумы, суточная динамика. Расчеты базировались на данных ежедневных метеонаблюдений на автоматических метеостанциях, расположенных по всему высотному диапазону. В результате анализа исходной информации установлено следующее:

- средние максимумы, средние минимумы и амплитуды суточной ПТВ имеют четко выраженный сезонный ход: они относительно больше весной и осенью и относительно меньше зимой и летом;

- средние максимумы оптимально аппроксимируются гармонической функцией, средние минимумы – полиномиальной;

- коэффициенты детерминации, характеризующие качество аппроксимации, только приблизительно для половины станций превышают 0.5; последнее объясняется либо относительной непродолжительностью исходных временных рядов, либо пробелами в данных, либо самим характером изменчивости ПТВ;

- все три указанные характеристики имеют четкую линейную зависимость от абсолютной высоты;

- в то же время аппроксимация среднеквадратического отклонения ПТВ в зависимости от абсолютной высоты значима только для летних месяцев;

- аппроксимация среднесуточного хода ПТВ показывает, что в некоторых случаях имеются отклонения от гармонического характера изменений ПТВ в течение суток.

Полученные результаты могут быть полезны при разработке математических моделей поверхностного баланса массы, поскольку в значительной степени детализируют схематически используемые характеристики вариаций ПТВ.

*Авторы благодарны рецензентам за ценные замечания, которые помогли значительно улучшить первоначальный вариант статьи.*

*Работа выполнена в ИВМ РАН при поддержке РФФИ (проект № 14-27-00126 “Исследование климата Земли с помощью перспективной модели Земной системы”).*

### Литература

**Левитин Е.С., Поляк Б.Т.** Методы минимизации при наличии ограничений // Журн. вычисл. математики и мат. физики, 1966, т. 6, № 5, с. 787–823.

Levitin, E.S., Polyak, B.T., 1966. Minimization methods in the presence of limitations. Zhurnal Vychislitel'noy Matematiki i Matematicheskoy Fiziki 6 (5), 787–823.

**Рыбак О.О.** Математические модели континентальных ледниковых щитов. 1. Архитектура моделей // Криосфера Земли, 2008, т. XII, № 1, с. 12–23.

Rybak, O.O., 2008. Mathematical models of the continental ice sheets. 1. Model architecture. Earth's Cryosphere XII (1), 12–23.

**Braithwaite, R.J.** Positive degree-day factors for ablation on the Greenland ice sheet studied by energy-balance modeling // J. Glaciol., 1995, vol. 41, p. 153–160.

**Ettema, J., van den Broeke, M.R., van Meijgaard, E., van de Berg, W.J.** Climate of the Greenland ice sheet using a high-resolution climate model – Part 2: Near surface climate and energy balance // The Cryosphere, 2010, vol. 4, p. 529–544.

**Fausto, R.S., Ahlström, A.P., Van As, D., et al.** A new present-day temperature parameterization for Greenland // J. Glaciol., 2009, vol. 55, p. 95–105.

**Oerlemans, J.** The mass balance of the Greenland ice sheet: sensitivity to climate change as revealed by energy-balance modeling // The Holocene, 1991, vol. 1, p. 40–49.

**Rogozhina, I., Rau, D.** Vital role of daily temperature variability in surface mass balance parameterizations of the Greenland ice sheet // The Cryosphere, 2014, vol. 8, p. 575–585.

**Rybak, O.O., Volodin, E.M., Nevecherja, A.P., Morozova, P.A.** Applying the energy- and water balance model for incorporation of the cryospheric component into a climate model. Part II. Modelled mass balance on the Greenland ice sheet surface // Rus. Meteorol. and Hydrol., 2016, vol. 41, No. 6, p. 379–387, DOI: 10.3103/S1068373916060017.

**Steffen, K., Box, J.** Surface climatology of the Greenland ice sheet: Greenland Climate Network 1995–1999 // J. Geophys. Res., 2001, vol. 106, p. 33951–33964.

**van de Berg, W.J., van den Broeke, M.R., Reijmer, C.H., van Meijgaard, E.** Characteristics of the Antarctic surface mass balance, 1958–2002, using a regional atmospheric climate model // Ann. Glaciol., 2005, vol. 41, p. 97–104.

**Zweck, C., Huybrechts, P.** Modeling of the northern hemisphere ice sheets during the last glacial cycle and glaciological sensitivity // J. Geophys. Res., 2005, vol. 110, D07103, DOI: 10.1029/2004JD005489.

*Поступила в редакцию  
11 апреля 2017 г.*