

# ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНО-ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СЛАБЫХ ВОДОНАСЫЩЕННЫХ ГЛИНИСТЫХ ГРУНТОВ ПРИ ПОВЕРХНОСТНОМ И ГЛУБИННОМ УПЛОТНЕНИИ

## EXPERIMENTAL AND THEORETICAL BASIS OF TRANSFORMATION OF WEAK WATER-SATURATED CLAY SOILS AT SURFACE AND DEEP COMPACTION

### ТЕР-МАРТИРОСЯН А.З.

Доцент кафедры механики грунтов и геотехники Московского государственного строительного университета, к.т.н., г. Москва, gic-mgsu@mail.ru

### ТЕР-МАРТИРОСЯН З.Г.

Профессор кафедры механики грунтов и геотехники Московского государственного строительного университета, д.т.н., профессор, г. Москва, mgroif@mail.ru

### TER-MARTIROSIAN A.Z.

Associate professor of the Department of Soil Mechanics and Geotechnics of Moscow State University of Civil Engineering, PhD (candidate of science in Technics), Moscow, gic-mgsu@mail.ru

### TER-MARTIROSIAN Z.G.

Professor of the Department of Soil Mechanics and Geotechnics of Moscow State University of Civil Engineering, DSc (doctor of science in Technics), professor, Moscow, mgroif@mail.ru

#### Ключевые слова:

слабые водонасыщенные глинистые грунты; поверхностное уплотнение грунтов; глубинное уплотнение грунтов; задача осесимметричной консолидации; слабый слой водонасыщенного грунта; задача Ляме; толстостенный водонасыщенный грунтовый цилиндр; лидирующая скважина; напряженно-деформированное состояние (НДС); поровое давление; степень консолидации; время рассеивания избыточного порового давления.

#### Key words:

weak water-saturated clay soils; surface soil compaction; deep soil compaction; axially symmetrical consolidation problem; weak water-saturated soil layer; Lamé's problem; thick-walled water-saturated soil cylinder; pilot borehole; stress-strain state; pore pressure; consolidation degree; excess pore pressure dissipation time.

#### Аннотация

В статье излагаются экспериментально-теоретические основы преобразования слабых водонасыщенных глинистых грунтов при их поверхностном и глубинном уплотнении. Приводится решение задачи осесимметричной консолидации слабого слоя водонасыщенного грунта при поверхностном уплотнении под воздействием песчаных дамб или эквивалентного вакуума, а также при глубинном уплотнении при расширении лидирующей скважины с применением различных технологий. Рассматривается решение задачи Ляме по оценке напряженно-деформированного состояния толстостенного водонасыщенного грунтового цилиндра при заданном перемещении внутренней поверхности лидирующей скважины. Приводятся примеры решения задач, а также номограммы на основе полученных формул по определению порового давления, степени консолидации и времени рассеивания избыточного порового давления.

#### Abstract

Experimental and theoretical foundations of transformation of weak water-saturated clay soils at surface and deep compaction of them are discussed. The article presents a solution of the problem of axially symmetrical consolidation of a weak water-saturated soil layer at surface compaction under influence of a sand dam or the equivalent vacuum, as well as at deep soil compaction during pilot hole reaming using various technologies. The author describes a solution of Lamé's problem on estimation of the stress-strain state of a thick-walled water-saturated soil cylinder at specified displacement of the inner surface of a pilot borehole. Some examples of solution of these problems as well as nomograms based on the obtained formulae to determine the pore pressure, consolidation degree and excess pore pressure dissipation time are given.

#### Введение

Известно, что при строительстве и эксплуатации зданий и сооружений на слабых водонасыщенных глинистых грунтах часто возникает необходимость преобразования их физико-механических свойств, в том числе плотности ( $\rho_d$ ), влажности ( $W$ ) и соответствующих им модуля деформации  $E(\rho_d)$  и удельного сцепления  $c(\rho_d)$ . В настоящее время преобразование слабых грунтов осуществляется поверхностным и глубинным уплотнением с помощью различных

технологий. При поверхностном уплотнении используются песчаные дамбы и насыпи, а также вакуумная технология при одновременном устройстве вертикального и горизонтального дренирования (рис. 1). При глубинном уплотнении грунты уплотняются под воздействием радиальных напряжений на стенки лидирующей скважины с помощью шнека (в режиме реверса), разрядно-импульсной технологии (РИТ), ротора и др. [3, 7–9]. Диаметр лидирующей скважины при этом увеличивается в 2–3 раза и заполняется рабочим материалом — песчано-гравийной смесью

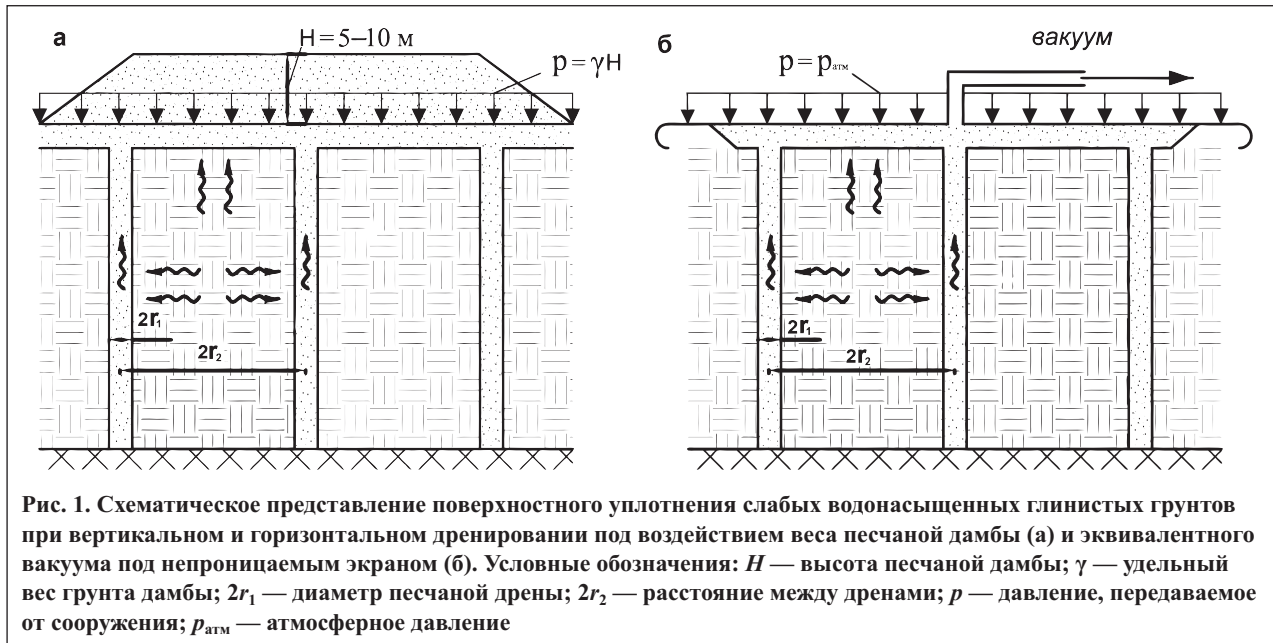


Рис. 1. Схематическое представление поверхностного уплотнения слабых водонасыщенных глинистых грунтов при вертикальном и горизонтальном дренаживании под воздействием веса песчаной дамбы (а) и эквивалентного вакуума под непроницаемым экраном (б). Условные обозначения:  $H$  — высота песчаной дамбы;  $\gamma$  — удельный вес грунта дамбы;  $2r_1$  — диаметр песчаной дрены;  $2r_2$  — расстояние между дренами;  $p$  — давление, передаваемое от сооружения;  $p_{атм}$  — атмосферное давление

(рис. 2). В результате образуется песчано-гравелистая свая-дрена, которая служит одновременно и дренаем, и несущим элементом в составе уплотненного преобразованного поля (рис. 3).

Основными показателями при разработке проекта уплотнения слабых грунтов песчаными дренами являются плотность скелета грунта  $\rho_{d,com}$  или коэффициент пористости  $e_{com}$  и соответствующие им характеристики деформируемости и прочности, определяемые по результатам лабораторных испытаний при проектной плотности, — модуль деформации  $E(\rho_{d,com})$ , удельное сцепление  $c(\rho_{d,com})$  и угол внутреннего трения  $\phi(\rho_{d,com})$ . Отношение площади сечения свай-дрен к  $1 \text{ м}^2$  площади уплотняемого слоя грунта  $\omega$  определяется по формуле [7]:

$$\omega = (e - e_{com}) / (1 + e), \quad (1)$$

где  $e, e_{com}$  — соответственно коэффициенты пористости естественного и уплотненного грунта

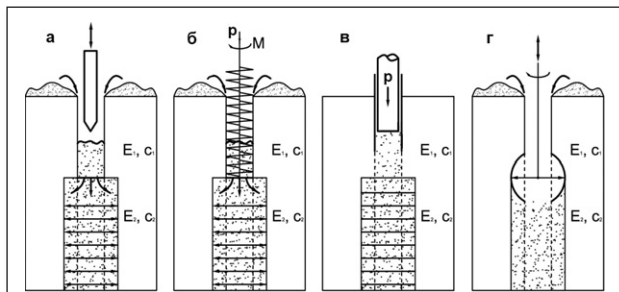


Рис. 2. Схематическое представление глубинного уплотнения слабого водонасыщенного грунта и устройства песчано-гравелистой свай-дрены по различным технологиям: а — глубинной трамбовки; б — шнеком; в — задавливанием; г — ротором. Условные обозначения:  $E_1$  — модуль деформации слабого грунта;  $c_1$  — удельное сцепление слабого грунта;  $E_2$  — модуль деформации слабого грунта после уплотнения;  $c_2$  — удельное сцепление слабого грунта после уплотнения;  $p$  — нагрузка на рабочий орган;  $M$  — момент в рабочем органе

Общее количество песчаных свай  $N$ , необходимое для уплотнения слабого грунта площадью  $A$ :

$$N = \omega A / A_p, \quad (2)$$

где  $A_p$  — площадь сечения одной сваи.

При схеме расположения песчаных свай в вершинах равнобедренных треугольников (рис. 3) расстояние между осями свай  $L$  составит:

$$L = 0,95d_p \sqrt{\rho_{d,com} / (\rho_{d,com} - \rho_d)}, \quad (3)$$

где  $d_p$  — диаметр песчаной сваи;  $\rho_d, \rho_{d,com}$  — плотность скелета естественного и уплотненного грунта соответственно.

При глубинном уплотнении сваи из крупнозернистых песков и крупнообломочных грунтов по различным технологиям могут уплотняться до плотности скелета  $\rho_{d,com} = 1,5 \div 1,6 \text{ г/см}^3$  и, соответственно, иметь модуль деформации  $E_{com}$  примерно до  $40 \div 50 \text{ МПа}$ .

Из приведенных выше схем (см. рис. 1 и 2) видно, что имеется существенная разница между процессами уплотнения слабого грунта. В первом случае грунты

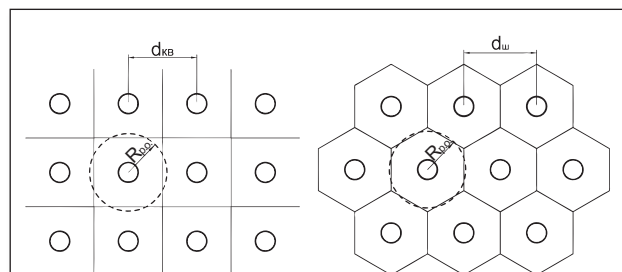


Рис. 3. Схема размещения песчаных свай-дрен в плане. Условные обозначения:  $d_{кв}$  — расстояние между дренами при их расположении в плане по вершинам квадрата;  $d_{т}$  — расстояние между дренами при их расположении в плане по вершинам равностороннего треугольника;  $R_{p.o}$  — приведенный радиус расчетной области при уплотнении грунта сваями-дренами

уплотняются в условиях компрессии под воздействием веса дамбы или эквивалентного вакуума при радиальной и вертикальной фильтрации поровой воды. Во втором грунт уплотняется под воздействием радиальных напряжений, возникающих за счет принудительного уплотнения в радиальном направлении и вдавливания рабочего материала в стенку лидирующей скважины. При использовании обоих методов уплотнения поровая вода фильтруется в сторону дрен, т. е. как в радиальном, так и в вертикальном направлении.

Поверхностное уплотнение описывается на основе осесимметричной теории фильтрационной консолидации при одномерном уплотнении, которая хорошо разработана, учитывает линейное и нелинейное деформирование и проницаемость слабого грунта, а также ползучесть скелета и сжимаемость поровой газосодержащей воды [1, 3–14]. Скорость уплотнения слабого грунта в этом случае зависит от факторов времени:

$$T_r = \frac{c_r}{r_2^2} t; \quad T_z = \frac{c_z}{4h^2} t, \quad (4)$$

где

$$c_r = \frac{k_r}{m_v \gamma_w}; \quad c_z = \frac{k_z}{m_v \gamma_w}; \quad (5)$$

$T_r, T_z$  — факторы времени для радиального и вертикального направления соответственно;  $2r_2$  — расстояние между дренами;  $t$  — время уплотнения;  $h$  — толщина уплотняемого слоя;  $c_r, c_z$  — коэффициенты консолидации в радиальном и вертикальном направлении соответственно;  $k_r, k_z$  — коэффициенты фильтрации в радиальном и вертикальном направлении соответственно;  $m_v$  — относительный коэффициент сжимаемости грунта;  $\gamma_w$  — удельный вес поровой воды.

Из формул (4) и (5) следует, что при неизменном коэффициенте консолидации в радиальном направлении  $c_r$ , время уплотнения  $t$  можно уменьшить, сокращая расстояние между дренами, причем при уменьшении расстояния в 2 раза время уплотнения сокращается в 4 раза в силу квадратичной зависимости:

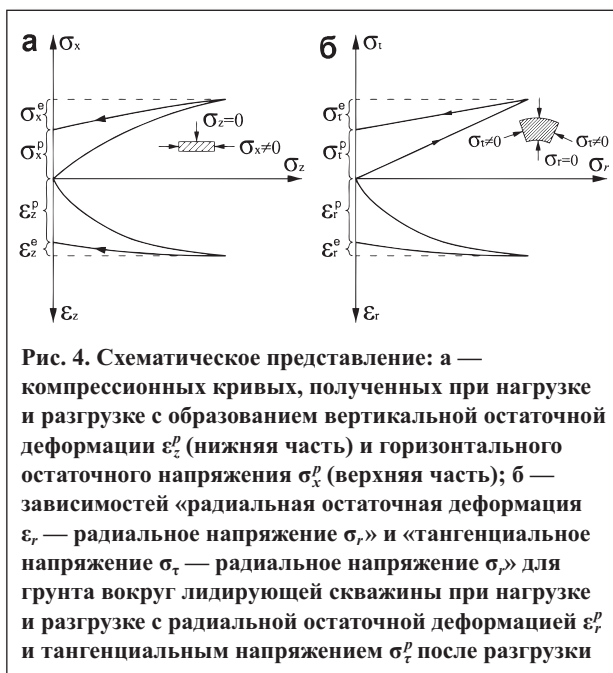


Рис. 4. Схематическое представление: а — компрессионных кривых, полученных при нагрузке и разгрузке с образованием вертикальной остаточной деформации  $\epsilon_z^p$  (нижняя часть) и горизонтального остаточного напряжения  $\sigma_x^p$  (верхняя часть); б — зависимостей «радиальная остаточная деформация  $\epsilon_r$  — радиальное напряжение  $\sigma_r$ » и «тангенциальное напряжение  $\sigma_\tau$  — радиальное напряжение  $\sigma_r$ » для грунта вокруг лидирующей скважины при нагрузке и разгрузке с радиальной остаточной деформацией  $\epsilon_r^p$  и тангенциальным напряжением  $\sigma_\tau^p$  после разгрузки

$$\left(\frac{2r_2'}{2r_2''}\right)^2 = \frac{t_1}{t_2}, \quad (6)$$

где  $t_1, t_2$  — время уплотнения при расстоянии между дренами  $2r_2'$  и  $2r_2''$  соответственно.

При глубинном уплотнении процесс также описывается на основе осесимметричной теории фильтрационной консолидации. При этом реализуется осесимметричное напряженно-деформированное состояние (НДС), соответствующее задаче Ляме. В процессе расширения радиуса лидирующей скважины на начальном этапе изготовления сваи среднее напряжение  $\sigma_m = (\sigma_r + \sigma_\tau) \cdot (1 + \nu) / 3$  (где  $\sigma_r, \sigma_\tau$  — радиальное и тангенциальное напряжение соответственно;  $\nu$  — коэффициент Пуассона) остается постоянным по радиусу как в условиях плоской деформации ( $\epsilon_z = 0$ , где  $\epsilon_z$  — вертикальная относительная деформация), так и при плоском напряженном состоянии ( $\epsilon_z \neq 0; \sigma_z = 0; \sigma_m = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / 3$ , где  $\sigma_z$  — вертикальное напряжение;  $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  — главные нормальные напряжения).

### Экспериментально-теоретические основы

Экспериментальные исследования грунтов в условиях компрессионного и трехосного сжатия показывают, что накопленные в процессе их нагружения деформации уплотнения и сдвига при полной разгрузке восстанавливаются не полностью, т. е. наблюдаются остаточные деформации  $\epsilon_{ост}$ , причем  $\epsilon_{ост} = \epsilon - \epsilon_{упр}$  (где  $\epsilon, \epsilon_{упр}$  — пластические и упругие относительные объемные деформации соответственно). Кроме того, в условиях компрессионного сжатия ( $\epsilon_x = 0$ , где  $\epsilon_x$  — горизонтальная (боковая) относительная деформация) наблюдается также остаточное боковое давление (рис. 4, а). Аналогичное явление наблюдается вокруг лидирующей скважины при радиальных воздействиях, т. е. при полной разгрузке этих воздействий фиксируется остаточное радиальное перемещение стенки скважины и остаточное тангенциальное напряжение (рис. 4, б).

Остаточные деформации легко определить по результатам компрессионных испытаний, т. е. по остаточной осадке образца. Горизонтальные остаточные напряжения  $\sigma_x$  можно найти либо прямым измерением при горизонтальной деформации  $\epsilon_x = 0$  либо по результатам аналитического решения упругопластической компрессионной задачи [3].

Остаточное перемещение стенки скважины можно измерить после разгрузки, а остаточные радиальные напряжения вокруг лидирующей скважины  $\sigma_r^p$  можно рассчитать на основе аналитического или численного решения задачи Ляме в упругопластической постановке для толстостенного грунтового цилиндра [3].

Остаточные деформации и напряжения в предварительно уплотненных грунтах играют важную роль при их использовании в качестве оснований фундаментов, так как снижают осадки основания за счет роста плотности скелета, приводящего к росту  $E(\rho_d)$  и  $c(\rho_d)$ , а также за счет преднапряженного состояния, аналогично тому, что имеет место в переуплотненных грунтах [3]. Следует отметить, что возникновение остаточных напряжений и деформаций в грунтовой среде имеет большое значение не только при одноразовых нагру-



жении и разгрузке, но и при многократных циклических нагружениях и разгрузках, которые часто встречаются в инженерной практике [3].

Важным этапом решения консолидационных задач водонасыщенных грунтов является определение начального НДС, в том числе задачи о распределении среднего тотального напряжения  $\sigma_m = \sigma_r / 3$  между скелетом и поровой водой.

Рассмотрим начальное НДС водонасыщенного грунта в условиях одномерного и осесимметричного уплотнения. В первую очередь определим исходные параметры механических свойств водонасыщенного грунта в целом.

Водонасыщенные грунты в условиях отсутствия дренажа (в закрытой системе, или недренуемых условиях — *undrained*) характеризуются модулем объемной деформации  $K_u$ :

$$K_u = K_s + nK_w, \tag{7}$$

где  $K_s$  и  $K_w$  — модули объемной деформации скелета и поровой газосодержащей воды соответственно;  $n$  — пористость грунта.

Причем по Скемптону [16]:

$$K_w = \frac{K_{wg} K_g}{K_{wg} (1 - s_r) + K_g s_r}, \tag{8}$$

где  $s_r$  — степень водонасыщения ( $0,8 \leq s_r \leq 1,0$ );  $K_{wg}$  — модуль объемной деформации воды, содержащей растворенный воздух ( $K_{wg} \approx 2 \cdot 10^6$  кН/м<sup>2</sup>), причем при  $s_r = 1$  будут выполняться условия  $K_g = K_{wg}$ ,  $K_g \approx 200$  кПа.

Приведенный модуль линейной деформации можно определить через модуль объемной деформации  $K_u$  и коэффициент Пуассона водонасыщенного грунта в целом  $\nu_u$ , т. е. получаем:

$$E_u = K_u \cdot (1 - 2\nu_u); \tag{9}$$

$$\nu_u = \frac{K_u - 2G_s}{2(K_u - G_s)}, \tag{10}$$

где  $G_s$  — модуль сдвига скелета грунта;  $G_u$  — общий модуль сдвига грунта ( $G_s = G_u$  — модуль сдвига грунта в целом, т. к. модуль сдвига поровой воды равен нулю).

При заданном значении среднего тотального напряжения  $\sigma_m = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / 3$  можно определить соответствующее значение порового давления, полагая, что объемные деформации грунта в целом, скелета и поровой газосодержащей воды связаны соотношением вида:

$$\varepsilon = \varepsilon_s = n\varepsilon_w, \tag{11}$$

где  $\varepsilon$  — общая относительная деформация,  $\varepsilon = \sigma_m / K_u$ ;  $\varepsilon_s$  — относительная деформация скелета грунта,  $\varepsilon_s = \sigma_m / K_s$ ;  $\varepsilon_w$  — относительная деформация поровой воды,  $\varepsilon_w = u_w / K_w$ ;  $u_w$  — поровое давление;  $n$  — пористость грунта.

При этом:

$$\sigma_m = \sigma'_m + u_w, \tag{12}$$

где  $\sigma_m$  и  $\sigma'_m$  — среднее тотальное и эффективное напряжение соответственно.

На основе уравнений (11) и (12) с учетом формул (7) и (8) получим:

$$u_w = \beta_0 \sigma_m, \tag{13}$$

где  $\beta_0$  — коэффициент порового давления, определяемый по формуле:

$$\beta_0 = K_w / (K_w + nK_s). \tag{14}$$

Если среднее тотальное напряжение задано для расчетной области, т. е.  $\sigma_m = f(x, y, z)$ , то соответствующее начальное поровое давление в этой области  $u_{w,0}$  составит:

$$u_{w,0}(x, y, z) = \sigma_{m,0}(x, y, z) \cdot \beta_0, \tag{15}$$

где  $\sigma_{m,0}(x, y, z)$  — начальное напряжение.

Для условий компрессионного сжатия удобнее пользоваться коэффициентами относительной сжимаемости для скелета грунта и для поровой воды ( $m_s$  и  $m_w$  соответственно), причем:

$$m_s = 3/K_s; \quad m_w = 3/K_w. \tag{16}$$

Тогда, исходя из формулы (14) и общеизвестного равенства  $\sigma_1 = \sigma'_1 + u_w$  (где  $\sigma_1$  — среднее значение максимального главного нормального напряжения;  $\sigma'_1$  — эффективное максимальное главное нормальное напряжение), получим:

$$\beta_{0,1} = \frac{m_w}{m_s + nm_w}; \tag{17}$$

$$u_w = \sigma_1 \beta_{0,1}, \tag{18}$$

где  $\beta_{0,1}$  — средний коэффициент порового давления.

Важными факторами, влияющими на процесс уплотнения слабых грунтов, являются их свойства нелинейной сжимаемости и проницаемости (рис. 5).

Анализ экспериментальных кривых, полученных разными авторами [3, 7–9], показывает, что зависимости относительной деформации  $\varepsilon$  и коэффициента фильтрации  $k_f$  от напряжения  $\sigma$  (см. рис. 5) можно представить в следующем виде:

$$\varepsilon(\sigma) = b [1 - \exp(-\alpha\sigma)]; \tag{19}$$

$$k_f(\sigma) = k_{f,0} \cdot \exp(-\beta\sigma), \tag{20}$$

где  $b$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  — эмпирические коэффициенты;  $k_{f,0}$  — начальный коэффициент фильтрации.

На основе формулы (19) можно получить коэффициент относительной сжимаемости грунта  $m_v$  как функцию напряжения  $\sigma$ , полагая, что  $m_v(\sigma) = d\varepsilon / d\sigma$ :

$$m_v(\sigma) = b\alpha \exp(-\alpha\sigma), \tag{21}$$

где  $b\alpha = m_{v,0}$ ;  $m_{v,0}$  — начальный коэффициент относительной сжимаемости грунта.

Подставив значения  $m_v(\sigma)$  и  $k_f(\sigma)$  в формулу (5) с учетом сжимаемости поровой воды, получим коэффициент консолидации:

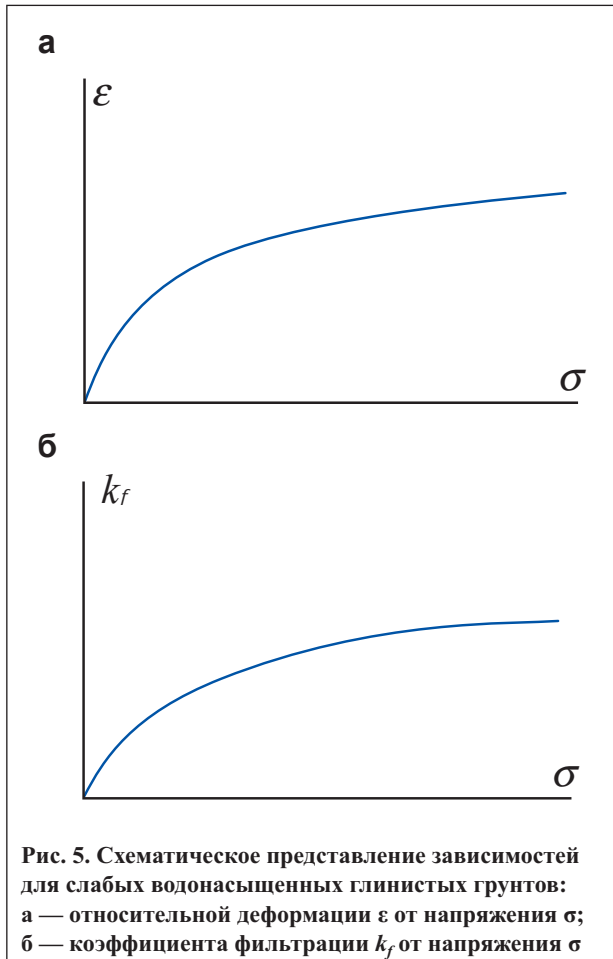


Рис. 5. Схематическое представление зависимостей для слабых водонасыщенных глинистых грунтов: а — относительной деформации  $\varepsilon$  от напряжения  $\sigma$ ; б — коэффициента фильтрации  $k_f$  от напряжения  $\sigma$

$$c_v = \frac{k_f \exp(-\beta\sigma) \cdot \beta_{0,1}}{\gamma_w m_v \exp(-\alpha\sigma)}, \quad (22)$$

где  $\beta_{0,1}$  определяется по формуле (17).

Очевидно, что в частном случае, когда  $\alpha \approx \beta$ :

$$c_v = \frac{k_f \cdot \beta_{0,1}}{\gamma_w m_v} = \text{const}. \quad (23)$$

Приведенные здесь зависимости для  $\varepsilon(\sigma)$ ,  $k_f(\sigma)$ ,  $\beta_{0,1}$  и  $c_v$  используются для решения одномерной и осесимметричной консолидационной задачи, которые при  $\alpha = \beta$  приводят к линейному уравнению консолидации.

### Осесимметричная консолидация при поверхностном уплотнении слабого слоя грунта

Рассмотрим осесимметричную консолидацию при уплотнении слабого грунта под воздействием веса песчаной дамбы или эквивалентного вакуума, создаваемого под непроницаемой пленкой на поверхности этого грунта, покрытого песчаным слоем (см. рис. 1). НДС грунта под дамбой соответствует условиям компрессионного сжатия, а поровая вода фильтруется вверх к пластовому дренажу под дамбой и в сторону вертикальных дрен в радиальном направлении. Вместе с тем поверхность грунта «садится» неравномерно — и вокруг дрен образуется воронка из-за большой гибкости песчаной дамбы, что соответствует условиям свободной деформации.

В случае действия нагрузки на слабый грунт через жесткую плиту сверх пластового дренажа поверхность грунта «садится» равномерно (рис. 6, б), что соответствует условиям равных деформаций.

Поэтому два описанных выше случая уплотнения получили разные названия, обусловленные граничными поверхностными условиями, — соответственно *схема свободных деформаций* и *схема равных деформаций*. Их использование приводит к разным методам решения осесимметричной консолидации при поверхностном уплотнении слабого слоя грунта.

Для определения НДС водонасыщенного слабого слоя на начальном и промежуточном этапах консолидации необходимо решить осесимметричную задачу консолидации, которая сводится к рассмотрению дифференциального уравнения в частных производных следующего вида:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - n \frac{\partial \varepsilon_w}{\partial t} = -\frac{k_r}{\gamma_w} \left( \frac{\partial^2 u_w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_w}{\partial r} \right) - \frac{k_z}{\gamma_w} \frac{\partial^2 u_w}{\partial z^2}, \quad (24)$$

при соответствующих начальном  $u_{w,0}(r, z)$  и граничных значениях порового давления  $u_w(r_1, t) = u_w(z=0, t) = 0$ ;  $du_w/dr(r=r_2) = 0$  и  $du_w/dz(z=h) = 0$ , где  $\varepsilon$ ,  $\varepsilon_w$  — объемные деформации скелета грунта и поровой воды соответственно;  $k_r$ ,  $k_z$  — коэффициенты фильтрации в радиальном и вертикальном направлении соответственно;  $u_w$  — поровое давление;  $\gamma_w$  — удельный вес грунта;  $n$  — пористость грунта;  $t$  — время консолидации;  $r$ ,  $z$  — координаты в радиальном и вертикальном на-

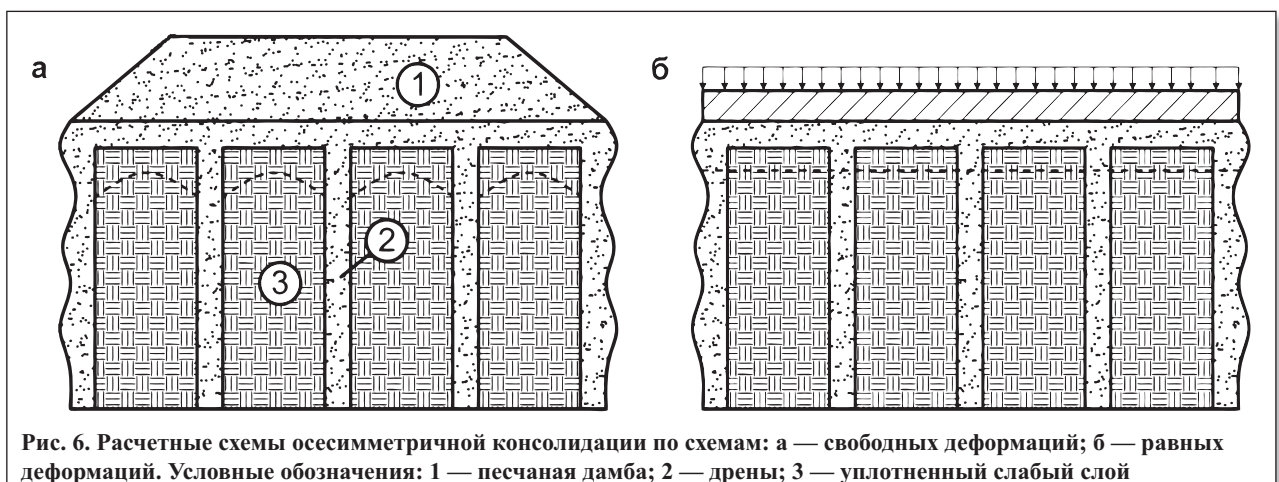


Рис. 6. Расчетные схемы осесимметричной консолидации по схемам: а — свободных деформаций; б — равных деформаций. Условные обозначения: 1 — песчаная дамба; 2 — дренажи; 3 — уплотненный слабый слой



правлении соответственно,  $r_1$  — радиус дрены,  $2r_2$  — расстояние между дренами.

Уравнение (24) справедливо для любого закона деформирования скелета грунта и поровой воды, а также изменения водопроницаемости. Для общности рассматриваемой задачи уплотнения слабого грунта примем, что скелет деформируется по закону (19), а коэффициент фильтрации подчиняется закономерности, соответствующей формуле (20). Сжимаемость поровой газосодержащей воды определяется по формуле (8). Подставляя эти зависимости в исходное уравнение (24), после некоторых преобразований получим:

$$\frac{\partial u_w}{\partial t} = c_r \left( \frac{\partial^2 u_w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_w}{\partial r} \right) + c_z \frac{\partial^2 u_w}{\partial z^2} + \beta_0 \frac{\partial p(t)}{\partial t}, \quad (25)$$

где  $p(t)$  — изменяющаяся во времени внешняя нагрузка;

$$c_r = \frac{k_r e^{-\beta \sigma} \cdot \beta_0}{\gamma_w m_v e^{-\alpha \sigma}}; \quad c_z = \frac{k_v e^{-\beta \sigma} \cdot \beta_0}{\gamma_w m_v e^{-\alpha \sigma}}; \quad \beta_0 = \frac{m_v(\sigma)}{m_v(\sigma) + nm_w}. \quad (26)$$

В частном случае, когда  $\alpha \approx \beta$ , получим:

$$c_r = \frac{k_r \cdot \beta_0}{\gamma_w m_v}; \quad c_z = \frac{k_v \cdot \beta_0}{\gamma_w m_v}; \quad \beta_0 = \frac{m_v}{m_v + nm_w}. \quad (27)$$

Тогда уравнение (25) «линеаризуется» и примет следующий вид:

$$\frac{\partial u_w}{\partial t} = c_r \left( \frac{\partial^2 u_w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_w}{\partial r} \right) + c_z \frac{\partial^2 u_w}{\partial z^2} + \beta_0 \frac{\partial p}{\partial t}. \quad (27)$$

При неизменности во времени внешней нагрузки ( $p(t) = \text{const}$ ) в процессе консолидации, учитывая, что время ее роста мало по сравнению со временем стабилизации НДС, уравнение (27) запишем в следующем виде:

$$\frac{\partial u_w}{\partial t} = c_r \left( \frac{\partial^2 u_w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_w}{\partial r} \right) + c_z \frac{\partial^2 u_w}{\partial z^2}. \quad (28)$$

Это обстоятельство, т. е. равенство  $\partial p / \partial t = 0$ , существенно упрощает решение задач консолидации, т. к. дифференциальное уравнение (25) «линеаризуется» при учете нелинейной сжимаемости и проницаемости (см. рис. 5). Решение этого уравнения можно получить методом разделения переменных Фурье [6]. Оно приводит к рядам из специальных функций Фурье — Бесселя, для которых составлены таблицы [2]. Приведем решение уравнения (28) для простейшего случая, когда  $c_z = 0$ :

$$u_w(r, t) = \pi p \beta_0 \times \sum_{i=1}^{\infty} \frac{J_1^2(\alpha_i i) \cdot V_0 \left( \alpha_i \frac{r}{r_1} \right)}{J_0^2(\alpha_i) - J_1^2(\alpha_i i)} \exp(-\alpha_i^2 i^2 T_r); \quad (29)$$

$$J_0(\alpha) \cdot Y_1(\alpha, i) - Y_0(\alpha) \cdot J_1(\alpha, i) = 0, \quad (30)$$

где  $\beta_0 = m_v / (m_v + nm_w)$ ;  $T_r = c_r t / r_1^2$ ;  $i = r_2 / r_1$ ;  $t$  — время консолидации;  $\alpha_i$  — корни трансцендентного уравнения,  $J_0, Y_0$  — функции Бесселя соответственно первого и второго рода нулевого порядка;  $J_1, Y_1$  — то же первого порядка.

В частном случае линейной деформации скелета и несжимаемости поровой воды решение (29) совпадает с решением Л. Рендулика (L. Rendulic) [18]. Видно, что использование решения (29) является неудобным для практических расчетов.

Отметим, что в случае свободной деформации степень консолидации  $U(t)$  осредняется, так как осадка поверхности неравномерна, то есть:

$$\bar{U}(t) = \bar{S}(t) / S_{\infty}, \quad (31)$$

где  $\bar{U}(t)$  — среднее значение степени консолидации;  $\bar{S}(t)$  — среднее значение осадки;  $S_{\infty}$  — стабилизированная осадка.

При этом:

$$\bar{S}(t) = \frac{2}{r_2^2 - r_1^2} \int_r^{r_2} S(r, t) dt. \quad (32)$$

Важный вклад в решение осесимметричной задачи консолидации методом свободной деформации был внесен Н. Карилло [11]. Он доказал следующую теорему: если функция  $u_{w1}(r, t) = \Phi_1(r, t)$  есть решение дифференциального уравнения

$$\frac{\partial u_{w1}}{\partial t} = c_r \left( \frac{\partial u_{w1}}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_{w1}}{\partial r} \right), \quad (33)$$

а функция  $u_{w2}(z, t) = \Phi_2(z, t)$  есть решение дифференциального уравнения

$$\frac{\partial u_{w2}}{\partial t} = c_z \frac{\partial^2 u_{w2}}{\partial z^2}, \quad (34)$$

то функция

$$u_w(r, z, t) = \Phi_1(r, t) \cdot \Phi_2(z, t) = u_{w1} \cdot u_{w2} \quad (35)$$

является решением уравнения (28) в целом.

На основе этой теоремы Н. Карилло (N. Carrillo) [11] показал, что средняя степень консолидации  $\bar{U}(t)$  при трехмерном дренировании в условиях свободной деформации определяется выражением:

$$\bar{U}(t) = 1 - (1 - \bar{U}_r) \cdot (1 - U_z), \quad (36)$$

где  $U_z$  — степень консолидации при движении поровой воды только вверх;  $\bar{U}_r$  — степень консолидации при движении поровой воды только в радиальном направлении к дренажу, причем:

$$\bar{U}_r = f_1(T_r); \quad U_z = f_2(T_z); \quad (37)$$

$$T_r = \frac{c_r t}{4r_2^2}; \quad T_z = \frac{c_v t}{4h^2}, \quad (38)$$

где  $T_r, T_z$  — факторы времени для радиального и вертикального направления соответственно;  $2r_2$  — расстояние между дренами;  $h$  — толщина уплотняемого слоя.

На основании этого решения К. Терцаги составлены номограммы для определения  $\bar{U}_r$  и  $U_z$  в зависимости от факторов времени  $T_r$  и  $T_z$  соответственно при соотношении  $r_1/r_2 = 10 \div 100$ , по которым легко вычислить степень консолидации по формуле (36). Эти номограммы (рис. 7) приводятся в книге Н.А. Цытовича [9].

В случае решения задачи консолидации *методом равных деформаций* степень консолидации будет определяться без осреднения по следующей формуле:

$$U(t) = S(t) / S_\infty, \quad (39)$$

где  $S(t)$  — осадка во времени;  $S_\infty$  — стабилизированная осадка.

При этом эффективное среднее напряжение  $\sigma'$  и соответствующее поровое давление  $\bar{u}_w$  будут распределены по радиусу грунтового цилиндра вокруг дрены равномерно, то есть:

$$\bar{u}_w(r, z, t) + \sigma'(r, z, t) = p = \text{const}; \quad (40)$$

$$\bar{u}_w = \frac{2}{r_2^2 - r_1^2} \int_{r_1}^{r_2} u_w(r, z, t) r dr. \quad (41)$$

Таким образом, в случае равных деформаций уравнение (28) примет вид:

$$\frac{\partial \bar{u}_w}{\partial t} = c_r \nabla^2 + c_z \frac{\partial^2 u_w}{\partial z^2}, \quad (42)$$

где  $\nabla$  — оператор Лапласа.

Решение этого уравнения для частного случая, когда  $c_z = 0$ , полученное Р.А. Барроном (R.A. Barron) [10], при  $\beta_0 = 1$  имеет вид:

$$u_w(r, t) = \frac{p}{f(i)} \exp\left(\frac{-2T_r}{f(i)}\right) \left[ \ln \frac{r}{r_1} - \frac{1}{(2i^2) \left(\frac{r^2}{r_1^2} - 1\right)} \right]; \quad (43)$$

$$U(t) = \frac{S(t)}{S_\infty} = 1 - \exp\left(\frac{-2T_r}{f(i)}\right), \quad (44)$$

$$\text{где } i = \frac{r_1}{r_2}; T_r = \frac{c_r t}{4r_2^2};$$

$$f(i) = \frac{i^2}{i^2 - 1} \ln i - \frac{3i^2 - 1}{4i^2}; c_r = \frac{k_r}{\gamma_w m_v}.$$

В. Кьельман (W. Kjellman) [16] предложил следующую приближенную формулу для определения степени консолидации при условии равных деформаций:

$$U(t) = 1 - \exp\left(\frac{-\tau}{\lambda}\right), \quad (45)$$

$$\text{где } \lambda = \frac{m}{c_r}; m = \frac{r_2^2}{2\pi} \left( \ln \frac{r_2}{r_1 \sqrt{\pi}} - \frac{3}{4} \right), \quad (46)$$

где  $\pi$  — математическая постоянная (число «пи»).

На основе решений Р.А. Баррона и В. Кьельмана Б.Г. Феленюсом (B.H. Fellenius) и М.Н. Нгуеном (M.N. Nguyen) [13] в 2013 году было предложено определять время рассеивания избыточного порового давления  $t_{u_w}$  в зависимости от степени консолидации  $U_r(t)$  следующим образом:

$$t_{u_w}(U_r(t)) = \frac{r_z^2}{8c_r} \left[ \ln \left( \frac{r_z}{r_1} \right) - 0,75 \right] \cdot \ln \left( \frac{1}{1 - U_r} \right), \quad (47)$$

где

$$U_r(t) = \frac{S(t)}{S_\infty}; c_r = \frac{k_r}{\gamma_w m_v}. \quad (48)$$

Решение Р.А. Баррона можно использовать в расчетах с помощью современных программных комплексов MathCAD или Matlab. Более того, на основе решения Баррона можно учитывать влияние скорости нагружения уплотняемого слоя.

Примем, что уплотняющая нагрузка  $p(t)$  меняется во времени следующим образом:

$$p(t) = p [1 - \exp(-\alpha t)], \quad (49)$$

где  $p$  — максимальное значение уплотняющей нагрузки;  $\alpha$  — эмпирический коэффициент.

Тогда на основе уравнения (43) получим:

$$u_w(r, t) = \frac{1}{f(i)} \left[ \ln \left( \frac{r}{r_1} \right) - \frac{1}{2i^2} \left( \frac{r^2}{r_1^2} - 1 \right) \right] \times \int_0^t \frac{dp}{dt} \exp\left(-\frac{2}{4f(i)} \cdot \frac{c_r}{r_2^2} (t - \tau)\right) d\tau, \quad (50)$$

где

$$\frac{dp}{d\tau} = -p\alpha \exp(-\alpha\tau), \quad (51)$$

где  $t$  — время консолидации.

Интегрирование уравнения (50) с учетом формулы (51) приводит к выражению вида:

$$u_w(r, t) = \frac{p\alpha}{(\omega - \alpha)f(i)} \left\{ \ln \frac{r}{r_1} - \frac{1}{2i^2} \left( \frac{r^2}{r_1^2} - 1 \right) \right\} \times \left[ \exp(-\omega t) - \exp(-\alpha t) \right]. \quad (52)$$

Из этого решения следует, что при начальном значении порового давления  $u_{w,0}(r)$  и при заданном росте уплотняющей нагрузки  $p(t)$  с затухающей скоростью согласно (49) получаем экстремальное развитие избыточного порового давления во времени в соответствии с формулой (52). Причем при  $\alpha \ll \omega$  избыточное поровое давление не возникает, т.е. начальное поровое давление  $u_{w,0}(r) \rightarrow 0$ . Задаваясь изменением мощности дамбы во времени  $H(t) = p(t)/\gamma$  (где  $p(t)$  находится с использованием формулы (49);  $\gamma$  — удельный вес грунта дамбы;  $H(t)$  — толщина дамбы в зависимости от времени), можно получить оптимальный рост порового давления.

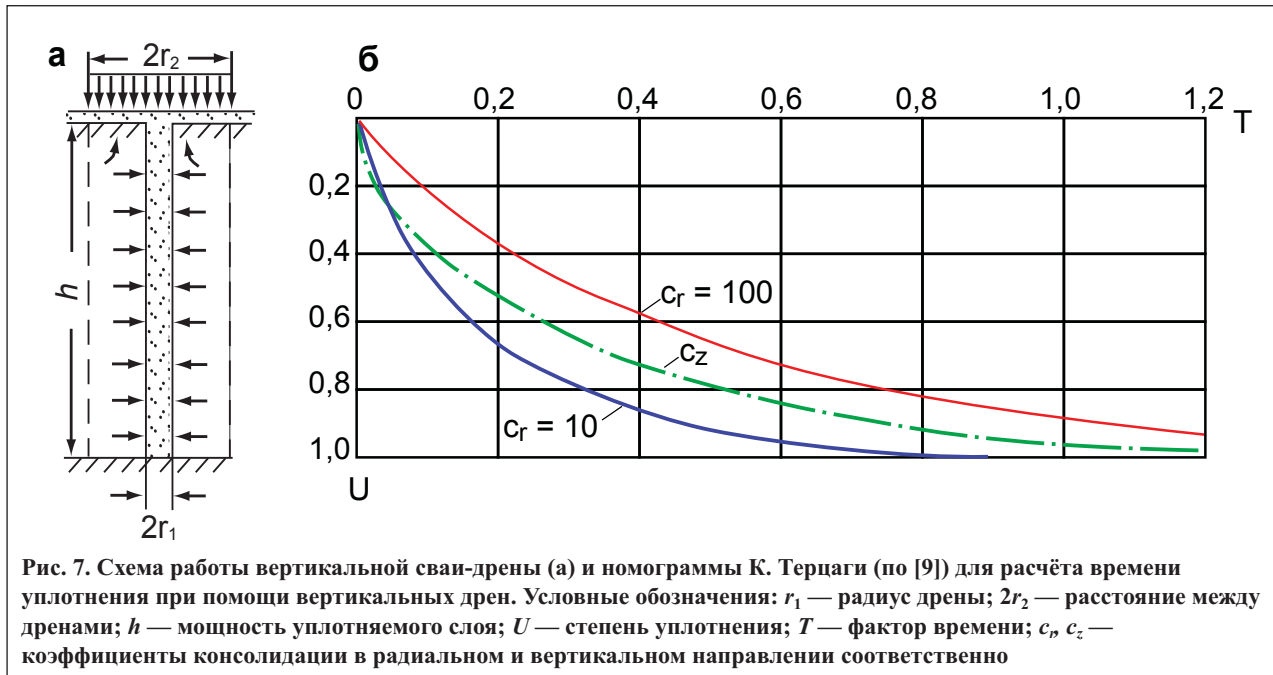


Рис. 7. Схема работы вертикальной свай-дрены (а) и номограммы К. Терцаги (по [9]) для расчёта времени уплотнения при помощи вертикальных дрен. Условные обозначения:  $r_1$  — радиус дрены;  $2r_2$  — расстояние между дренами;  $h$  — мощность уплотняемого слоя;  $U$  — степень уплотнения;  $T$  — фактор времени;  $c_r, c_z$  — коэффициенты консолидации в радиальном и вертикальном направлении соответственно

**Глубинное уплотнение грунтов**

При глубинном уплотнении грунтов вокруг лидирующей скважины в процессе изготовления свай-дрен возникает избыточное радиальное напряжение, интенсивность которого зависит от технологии устройства свай-дрены из песчано-гравийной смеси (см. рис. 2). При этом НДС вокруг лидирующей скважины соответствует условиям задачи Ляме для толстостенного грунтового цилиндра. В зависимости от инженерно-геологических условий могут реализоваться плоское напряженное состояние (относительная вертикальная деформация  $\epsilon_z \neq 0$ ; вертикальное напряжение  $\sigma_z = \gamma z$ , где  $\gamma$  — удельный вес грунта;  $z$  — вертикальная координата) или плоская деформация ( $\epsilon_z = 0$ ;  $\sigma_z = (\sigma_r + \sigma_\tau) \cdot (1 + \nu)$ , где  $\sigma_r$  — радиальное напряжение;  $\sigma_\tau$  — тангенциальное напряжение;  $\nu$  — коэффициент Пуассона).

Начальное избыточное поровое давление в таких случаях зависит от среднего тотального напряжения в пределах цилиндра, которое зависит от интенсивности действия радиального напряжения на стенку лидирующей скважины.

Рассмотрим решение задачи Ляме для толстостенного цилиндра из водонасыщенного грунта, который характеризуется деформационными (модулем деформации  $E_u$ , коэффициентом Пуассона  $\nu_u$ ) и прочностными (углом внутреннего трения  $\phi_u$ , удельным сцеплением  $c_u$ ) параметрами в условиях закрытой системы (рис. 8).

Пусть водонасыщенный толстостенный грунтовой цилиндр имеет внутренний и внешний радиусы  $R_1$  и  $R_2$  соответственно. Пусть внутренняя поверхность цилиндра получит единовременное перемещение  $V$ , а внешний радиус остается неизменным ( $R_2 = \text{const}$ ). Следует определить компоненты тотальных напряжений (радиального  $\sigma_r$ , тангенциального  $\sigma_\tau$  и вертикального  $\sigma_z$ ), а также соответствующее избыточное поровое давление в условиях отсутствия дренажа. Решение такой задачи сводится к рассмотрению уравнения (15):

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{V}{r^2}, \tag{53}$$

где  $V$  — радиальное перемещение грунта вокруг лидирующей скважины;  $r$  — радиальная координата.

При этом заданы следующие граничные условия:

$$V(r = R_1) = V_1; V(r = R_2) = 0. \tag{54}$$

Решение уравнения (53) известно:

$$V = Ar + \frac{B}{r}, \tag{55}$$

где коэффициенты  $A, B$  определяются из граничных условий (54):

$$A = \frac{VR_1}{R_2^2 - R_1^2}; B = \frac{VR_2^2}{R_2^2 - R_1^2}. \tag{56}$$

Учитывая, что для условия плоской деформации ( $\epsilon_z = 0$ , где  $\epsilon_z$  — относительная линейная деформация по оси  $Z$ ) радиальная относительная деформация  $\epsilon_r = dV/dr$  и тангенциальная относительная деформация  $\epsilon_\tau = V/r$ , получим:

$$\epsilon_r + \epsilon_\tau = \frac{2V \cdot R_1}{(R_2^2 - R_1^2)}; \tag{57}$$

$$\epsilon = \frac{\epsilon_r + \epsilon_\tau}{3} = \frac{2V \cdot R_1}{3(R_2^2 - R_1^2)}. \tag{58}$$

На основании известных соотношений Ляме [1]:

$$\sigma_r = \frac{E_u}{1 - \nu_u^2} \left[ \frac{dV}{dr} + \nu_u \frac{V}{r} \right];$$

$$\sigma_\tau = \frac{E_u}{1 - \nu_u^2} \left[ \frac{V}{r} + \nu_u \frac{dV}{dr} \right], \tag{59}$$

где  $\nu_u, E_u$  — коэффициент Пуассона и модуль деформации, определяемые по формулам (10) и (9) соответственно, получим:



для условия плоской деформации ( $\epsilon_z = 0$ ):

$$\sigma_m = \frac{(\sigma_r + \sigma_\tau + \sigma_z)}{3} = E_u \cdot \frac{1 + \nu_u}{1 - \nu_u} \cdot \frac{2VR_1}{3(R_2^2 - R_1^2)}, \quad (60)$$

где  $\sigma_z = (\sigma_r + \sigma_\tau)(1 + \nu_u)$ ;

для условия плоского напряженного состояния ( $\epsilon_z \neq 0$ ;  $\sigma_z = \gamma \cdot z$ ):

$$\sigma_m = \frac{E_u}{1 - \nu_u} \cdot \frac{3VR_1}{3(R_2^2 - R_1^2)} + \frac{\sigma_z}{3}. \quad (61)$$

Отметим, что в задаче Ляме среднее тотальное напряжение  $\sigma_m$  и средняя относительная деформация  $\epsilon_m$  постоянны и не зависят от радиальной координаты  $r$ , что имеет существенное значение для решения консолидационной задачи.

На основании формул (14) и (15) можно определить избыточное поровое давление при заданном перемещении стенки скважины на величину  $V$ :

$$u_{w,0}(r) = \sigma_m \cdot \beta_0, \quad (62)$$

где  $\sigma_m$  для условия плоской деформации определяется по формуле (60), а для условия плоского напряженного состояния — по формуле (61) без учета исходного напряженного состояния, т. е. при  $\sigma_z = 0$ .

Приведенные выше формулы для определения начального порового давления в грунтовом цилиндре позволяют применить решения осесимметричной задачи консолидации [4, 12–14] при глубинном уплотнении грунтов при граничных условиях  $u_w(r, t) = 0$ ;  $\partial u_w / \partial r = 0$ .

Если перемещение стенки скважины происходит интенсивно в течение нескольких десятков минут, то можно считать, что оно произошло мгновенно и не меняется во времени. Тогда можно воспользоваться приведенными выше решениями Р.А. Баррона (43), так как время стабилизации избыточного порового давления значительно превосходит время перемещения стенки скважины.

Если же учитывать, что  $V$  растет медленно и в процессе расширения лидерной скважины имеет место рассеивание избыточного порового давления, следует в эти уравнения вместо  $\sigma_m$  подставить  $\sigma_m(t)$  (среднее тотальное напряжение как функцию времени). Для плоской деформации получаем:

$$\sigma_m(t) = E_u \cdot \frac{1 + \nu_u}{1 - \nu_u} \cdot \frac{2VR_1}{3(R_2^2 - R_1^2)}, \quad (63)$$

где

$$V = V(t) = V_{\max} [1 - \exp(-\alpha t)]; \quad (64)$$

$V_{\max}$  — максимальное перемещение;  $V(t)$  — значение перемещения в момент времени  $t$ .

Подставляя выражение (63) в формулу (52) получим:

$$u_w(r, t) = E_u \cdot \frac{1 + \nu_u}{1 - \nu_u} \cdot \frac{2VR_1}{3(R_2^2 - R_1^2)} \cdot \frac{\alpha}{\omega - \alpha} \times \left\{ \exp(-\omega t) - \exp(-\alpha t) \right\} \times \left\{ \ln \frac{r}{R_1} - \frac{1}{2i^2} \left( \frac{r^2}{R_1^2} - 1 \right) \right\}, \quad (65)$$

где

$$\omega = \frac{2}{f(i)} \cdot \frac{c_r}{r_2^2}. \quad (66)$$

Очевидно, что при  $t = 0$  и  $t = \infty$  поровое давление имеет экстремум. При  $\alpha > \omega$  избыточное поровое давление будет расти быстрее, а при  $\alpha \ll \omega$  оно будет увеличиваться медленно. Подбирая режим изменения перемещения во времени  $V(t)$ , можно добиться минимальных значений порового давления.

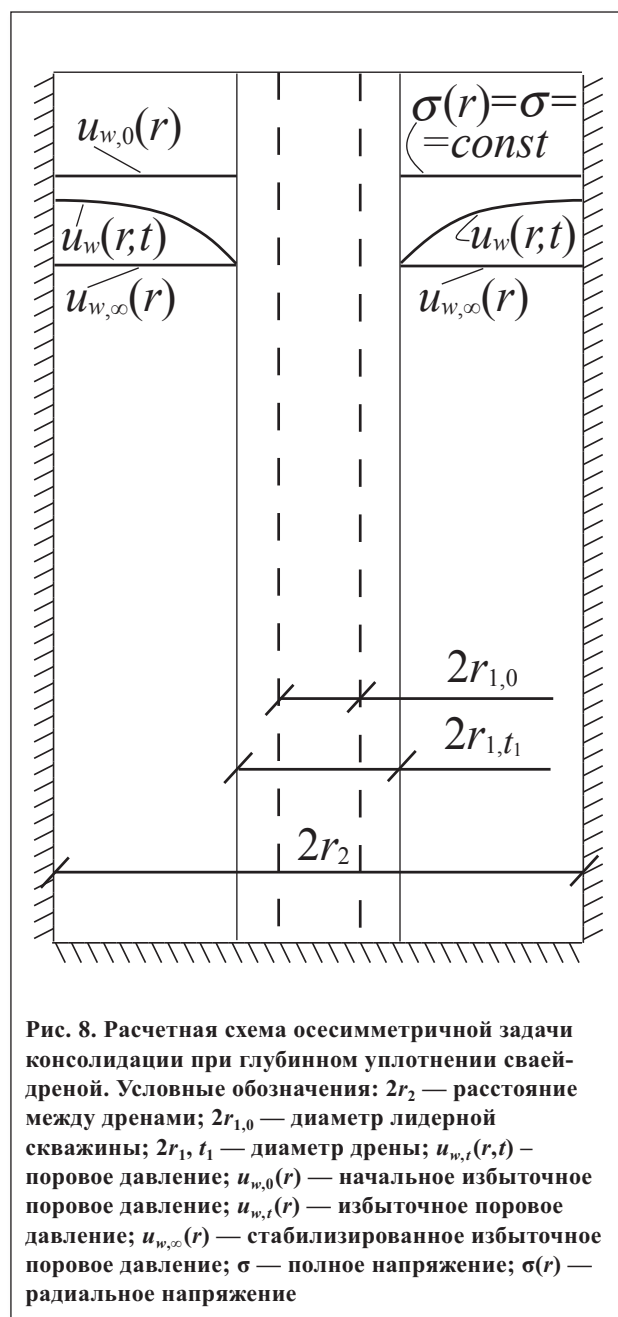


Рис. 8. Расчетная схема осесимметричной задачи консолидации при глубинном уплотнении свай-дреной. Условные обозначения:  $2r_2$  — расстояние между дренами;  $2r_{1,0}$  — диаметр лидерной скважины;  $2r_{1,t_1}$  — диаметр дрены;  $u_{w,t}(r, t)$  — поровое давление;  $u_{w,0}(r)$  — начальное избыточное поровое давление;  $u_{w,\infty}(r)$  — стабилизированное избыточное поровое давление;  $\sigma$  — полное напряжение;  $\sigma(r)$  — радиальное напряжение




## Основные выводы

1. При проектировании, строительстве и эксплуатации зданий и сооружений на слабых водонасыщенных грунтах большой мощности неизбежно возникает необходимость преобразования их физико-механических свойств (плотности, влажности) для повышения характеристик деформируемости и прочности до проектных величин.

2. В зависимости от инженерно-геологических и гидрогеологических условий площадки строительства можно использовать различные схемы и технологии уплотнения, в том числе поверхностное и глубинное уплотнение.

3. При поверхностном уплотнении слабых водонасыщенных глинистых грунтов под воздействием веса песчаной дамбы или эквивалентного вакуума вокруг дренирующих скважин неизменного диаметра возникает сложное напряженно-деформированное состояние, которое количественно оценивается на основе осесимметричной теории фильтрационной консолидации с учетом нелинейных свойств деформирования скелета и водопроницаемости грунта, а также степени его водонасыщения. Для удобства расчетов степени консолидации в этом случае удобнее пользоваться номограммой, составленной К. Терцаги на основе решения Карилло, Кьельмана, а также решением Баррона для условий равных деформаций.

Учет скорости роста песчаной дамбы позволяет оценить ее оптимальную величину, при которой избыточное поровое давление будет минимальным и будет рассеиваться быстрее.

4. При глубинном уплотнении грунтов вокруг лидирующей скважины в процессе ее расширения и устройства свай-дрен из песчано-гравийных смесей (ПГС) с помощью различных технологий возникает сложное осесимметричное напряженно-деформированное состояние под воздействием радиальных напряжений. В этом случае, в отличие от поверхностного уплотнения, избыточное поровое давление возникает в результате действия среднего тотального напряжения, которое постоянно при  $R_1 < r \leq R_2$ , что является преимуществом осесимметричной задачи Ляме. В этом случае удобнее воспользоваться решением консолидационной задачи исходя из расчетной схемы равных деформаций т. к. решение получается не в виде рядов из специальных функций Бесселя — Фурье, а в виде обыкновенных функций, поддающихся программированию с помощью пакета MathCAD. И в этом случае учет роста напряжений, действующих на стенку лидирующей скважины, за счет увеличения ее смещения  $V(t)$  приводит к экстремальному росту и рассеиванию избыточного порового давления. Это также позволяет регулировать рост порового давления и подбирать оптимальные режимы устройства свай-дрен из ПГС. 

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. М.: Высшая школа. 512 с.
2. Бронштейн И.Н., Семендяев К.А. Справочник по математике для инженеров и учащихся ВТУЗов. М.: Наука, 1986. 544 с.
3. Тер-Мартirosян З.Г. Механика грунтов. М.: АСВ, 2009. 550 с.
4. Тер-Мартirosян З.Г., Тер-Мартirosян А.З. Некоторые проблемы подземного строительства // Жилищное строительство. 2013. № 9. С. 2–5.
5. Тер-Мартirosян З.Г., Тер-Мартirosян А.З. Реологические свойства грунтов при сдвиге // Основания, фундаменты и механика грунтов. 2012. № 6. С. 9–13.
6. Тихонов А.Н., Самарский А.А. Уравнения математической физики. М.: Физматгиз, 1966. 724 с.
7. Ухов С.Б., Семенов В.В., Знаменский В.В., Тер-Мартirosян З.Г., Чернышев С.Н. Механика грунтов, основания и фундаменты. М.: Высшая школа, 2007. 566 с.
8. Флорин В.А. Основы механики грунтов. Том 1. М.: Стройиздат, 1959. 356 с.
9. Цытович Н.А. Механика грунтов. М.: Стройиздат, 1963. 636 с.
10. Barron R.A. Consolidation of fine-grained soils by drain wells // Transactions of ASCE. 1948. V. 113. P. 718–754.
11. Carrillo N. Simple two- and three-dimensional cases in the theory of consolidation of soils // Journal of Mathematics and Physics. 1942. V. 21. № 1. P. 6–9.
12. Fellenius B.H. Basics of foundation design: text book (revised electronic edition) / www.Fellenius.net. 2011. 374 p. [http://www.izisk.spb.ru/media/books/burenie\\_i\\_zondirovanie/Basics%20of%20Foundation%20Design%20Fellenius.pdf](http://www.izisk.spb.ru/media/books/burenie_i_zondirovanie/Basics%20of%20Foundation%20Design%20Fellenius.pdf).
13. Fellenius B.H., Nguyen M.N. Wick drains and piling for Coi Mep container port: geotechnical special publication of the ASCE. Vietnam: ASCE, 2013. P. 445–462.
14. Hansbo S. Consolidation of fine-grained soil by prefabricated drains. London: Ground Engineering, 1981. V. 12. № 5. P. 16–25.
15. Kjellman W. Accelerating consolidation of fine-grained soils by means of cardboard wicks / Proceedings of the 2-d ICSMFE. Vol. 2. Rotterdam, 1948. P. 302–305.
16. Kjellman W. Consolidation of fine-grained soils by drain wells. Discussion // Transactions of the ASCE. 1947. V. 113. P. 748–751.
17. Massarsch K.R. Settlement analysis of compacted fill / Proceedings of the 13-th ICSMFE. Vol. 1. New Delhi, 1994. P. 325–328.
18. Rendulic L. Der hydrodynamische spannungsausgleich in zentral entwässerten tonzylindern // Wasserwirtschaft und Technik. 1935. Band. 2. S. 250–253, 269–273.