



ПРОФИЛЬНОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СКВАЖИН В БЕЗНАПОРНОМ ВОДОНОСНОМ ГОРИЗОНТЕ. ПРОГРАММА 1WELL

MODELING OF WELLS IN CROSS SECTION OF AN UNCONFINED AQUIFER. THE 1WELL PROGRAM

ЛЕХОВ М.В.

Ведущий научный сотрудник геологического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, mvlekhov@geol.msu.ru

LEKHOV M.V.

Leading researcher of the Geology Faculty of Lomonosov Moscow State University, mvlekhov@geol.msu.ru

Ключевые слова:

несовершенные скважины; опытные откачки и наливы; профильно-радиальная модель; неоднородный водоносный горизонт; свободная поверхность; осушение скважины; упругая емкость; гравитационная емкость; метод конечных элементов; нелинейная задача; автоматизированное решение; программа 1WELL.

Key words:

partially penetrating wells; pumping and filling tests; radial cross-section model; heterogeneous aquifer; free surface; well drainage; specific storage; specific yield; finite element method; nonlinear problem; automated solution; 1WELL program.

Аннотация

Моделирование рассматривается как инструмент планирования и интерпретации опытных откачек и наливов. Фильтрационный поток моделируется в вертикальном сечении водоносного горизонта. Рассмотрено численное решение методом конечных элементов (МКЭ) в цилиндрических координатах. Для использования в изысканиях, исследованиях и в учебном процессе разработана программа-симулятор 1WELL¹, которая производит расчет напоров, криволинейной поверхности фильтрационного потока, уровня воды в скважине. Программа учитывает неоднородное строение водоносного горизонта, влияние несовершенства и проницаемого забоя скважины, осушения и кольматации фильтра, переменного дебита. Программа включает графическую процедуру сравнения модельных напоров и расходов с опытными данными и аналитическими решениями.

Введение

Серьезную помощь в проведении откачек из скважин и наливов в скважины может оказать численное моделирование. Для водозабора, дренажа важен прогноз дебита и влияния откачки. Но главный интерес представляет симуляция системы «пласт — скважина» как средство планирования опытных работ и, не в меньшей степени, как метод оценки гидрогеологических параметров. Реакция пласта в реальных условиях нередко отличается от канонического типа, известного из аналитических решений, и графики наблюдений по скважинам трудно поддаются диагностике. Численная же модель с включением неординарных факторов дает несоизмеримо более широкие возможности исследования их влияния на реакцию скважины. Модельные имитации позволяют дать оценку справедливости применения аналитических методов и точности определения ими гидрогеологических параметров.

Решение уравнения профильно-радиальной фильтрации на электроинтеграторах в 60–70 годы [3, 4, 6] привлекало к себе внимание в задачах, связанных с откачками из несовершенных скважин, в частности в неоднородных горизонтах. Моделирование этого типа не стало востребованным в должной мере из-за ограниченных технических возможностей. В новое время с развитием программного обеспечения популярными стали комплексы аналитических расчетов, охватывающие широкий спектр фильтрационных схем. Положительная сторона этого очевидна. Но складывается положение, имеющее негативный характер. Как и вообще в современной практике компьютерных расчетов с развитым сервисом, исследователь превратился в пользователя, а обоснование расчетной схемы — в перебор опций, не всегда осмысленный.

Abstract

Modeling is considered as a tool for planning and interpretation of pumping and filling tests. The seepage flow is simulated in the vertical section of the aquifer. Numerical solution using the finite element method (FEM) in cylindrical coordinates is considered. The 1WELL program-simulator was developed for use during surveys, research and training. The program carries out calculation of the heads, the curved surface of the flow, the water level in a well. It takes into account heterogeneous structure of the aquifer, influence of partial penetration of a well and permeable borehole bottom, drainage and skin of the screen, variable flow rates. The program includes the graphical procedure of comparison of the model heads and flow rates with the experimental data and analytic solutions.

¹ Государственная регистрация программы для ЭВМ № 2014618752 РФ.

Аналитические решения для притока к скважине многочисленны, но считанные из них используются в практике. Модели Тейса, Хантуша, доведенные до совершенных методических приемов [7], исходят из предпосылки Дюпюи. Нарушение предпосылки плановой фильтрации, связанное с несовершенством скважины, нашло отражение в аналитических моделях, двумерных или квазидвумерных [11]. В них участвуют сложные интегральные функции, для пользования которыми требуются табулированные значения или специальные программы. Если же имеют место такие факторы, как переменный дебит, разного рода сопротивления прискважинной зоны, частичное осушение фильтра и особенно неоднородность, решений, воплощенных в удобной методике расчета, практически нет. Методически не разработаны вопросы интерпретации данных по восстановлению после откачки или налива.

Сложности отыскания решения в первую очередь связаны со специфическими граничными условиями на скважине, а в безнапорном потоке — и на свободной поверхности как на подвижной, заранее неизвестной границе. В неоднородном пласте (рис. 1) аналитическое решение уравнения профильно-радиальной фильтрации, за исключением частных случаев, невозможно. И численное моделирование может оказаться единственным инструментом анализа.

Возникают и специальные задачи исследовательского характера, например: оценка влияния на дебит и уровни потока инфильтрации и испарения, фоновый режим, динамики свободной поверхности, деформации пород водоносного горизонта. Существуют проблемы, связанные с разработкой методики опытно-фильтрационных работ. Получить аналитические решения, удобные для графических приемов расчета параметров, представляется довольно трудной задачей.

Можно привести в пример «экспресс-опыты» (slug tests). Несмотря на обилие публикаций, их результаты не могут считаться корректными, хотя бы по причине множественности факторов влияния, основными из которых являются колюматация фильтра и неучет времени откачки или налива перед восстановлением. При этом в последнее время их применение стало повсеместным, с использованием расчетов, основанных на предпосылке жесткой фильтрации. Такое опробование всегда дает грубые ошибки. Моделирование в этом случае может служить инструментом критического анализа данных и, возможно, разработки приемлемой методики кратковременных опытов.

Не исследованы откачки через дно колодца, сложности для интерпретации представляет работа скважин при осушении фильтра, при значительном изменении мощности потока, в ходе колебаний уровня воды без откачки. Модель скважины в рассмотренной постановке задачи, как представляется автору, может с успехом использоваться в качестве симулятора для разработки методики опытно-фильтрационных работ (ОФР). В теоретическом плане это предмет рассмотрения целого раздела подземной гидродинамики. В статье изложены математические основы численного моделирования, построения алгоритмов счета, описаны возможности программы IWELL, разрабатываемой в течение десятков лет.

Уравнение профильно-радиальной фильтрации

Вывод уравнения профильно-радиальной фильтрации в дифференциальной форме приводится в статье в связи с тем, что при переходе к конечным приращением исходные зависимости являются основой для алгоритмов численных схем. Их понимание позволит оказать помощь и пользователям, и разработчикам программ.

Поток рассматривается в цилиндрических координатах r, z (м). Параметры пласта коэффициенты фильтрации в горизонтальном (k_r) и вертикальном (k_z) направлениях (м/с), коэффициент упругоэластичности η^* (м⁻¹) переменны по координате z , что указывает на схему слоистой или зональной неоднородности пласта. В соответствии с законом Дарси расходы (м³/с) потока через стороны бесконечно малого цилиндрического сегмента (рис. 2) определяются градиентом напора H (м):

$$Q_r^0 = -k_r \omega_z \frac{\partial H}{\partial r} = -k_r r d\theta dz \frac{\partial H}{\partial r} \quad (1)$$

$$Q_z^0 = -k_z \omega_r \frac{\partial H}{\partial z} = -k_z r d\theta dr \frac{\partial H}{\partial z} \quad (2)$$

где dr, dz — размеры сегмента; $\omega_z = dl \times dz$ — площадь цилиндрической поверхности сегмента; $\omega_r = dl \times dr$ — площадь основания сегмента; $dl = r d\theta$ — длина дуги.

При отсутствии осевой симметрии требуется также определение расхода по кругу Q_0 , но этот случай не рассматривается. Из уравнения (1) при $\theta = 2\pi$ и $dz = m$ следует уравнение Дюпюи — Тима [2] для стационарного радиального потока с расходом Q в пласте мощностью m :

$$Q = -2\pi k_r m \frac{\Delta H}{\Delta \ln r} \quad (3)$$

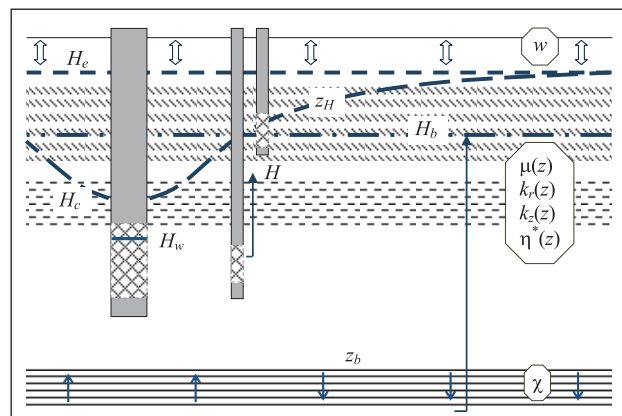


Рис. 1. Геофильтрационная схема участка опытного куста. Условные обозначения: H — напор; H_w — уровень воды в опытной скважине; H_c — напор на стенке скважины; w — питание; χ — коэффициент перетока через водоупор (горизонтальная штриховка); μ — гравитационная емкость; η — коэффициент упругоэластичности; k_r, k_z — коэффициенты фильтрации в горизонтальном и вертикальном направлении соответственно; пунктиром показаны начальная (H_c) и динамическая (z_H) свободные поверхности, штрихпунктиром — пьезометрическая поверхность (H_b) нижележащего пласта

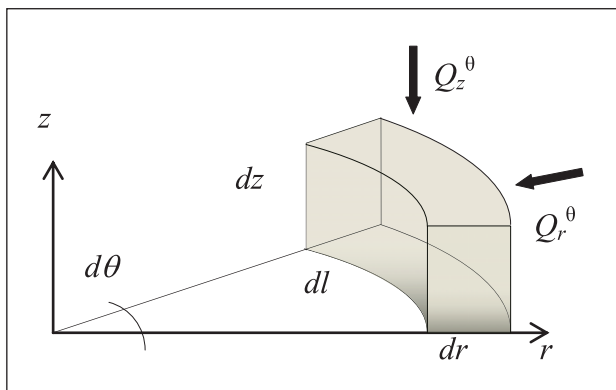


Рис. 2. Бесконечно малый элемент в цилиндрических координатах r, z, θ ($dr, dz, d\theta$ — бесконечно малые приращения; dl — длина дуги; Q_r^0 и Q_z^0 — расходы потока через стороны сегмента)

где ΔH — разница напоров, $\Delta \ln r$ — разница логарифмов r точек измерения H .

Снижение гидростатического давления и увеличение эффективных напряжений за время dt влечет за собой отжим объема воды dV^* , а повышение давления — потерю на упругое насыщение:

$$dV^* = -\eta^* \frac{\partial H}{\partial t} dl \cdot dz \cdot dr \cdot dt \quad (4)$$

Закон сохранения массы постулирует баланс потока. В элемент поступает расход Q_r^0 и Q_z^0 и за счет компрессии или декомпрессии пород выходит с приращениями ΔQ_r^0 и ΔQ_z^0 .

Из условия равенства поступившего и ушедшего объема получим уравнение неразрывности:

$$Q_r^0 dt + Q_z^0 dt + dV^* = \left(Q_r^0 + \frac{\partial Q_r^0}{\partial r} dr \right) dt + \left(Q_z^0 + \frac{\partial Q_z^0}{\partial z} dz \right) dt \quad (5)$$

Подстановка в уравнение (5) выражений (1), (2) и (4) дает дифференциальное уравнение упругого фильтрационного потока с осевой симметрией:

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(k_r r \frac{\partial H}{\partial r} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z r \frac{\partial H}{\partial z} \right) = \eta^* r \frac{\partial H}{\partial t} \quad (6)$$

Уравнение (6) позволяет взять за основу алгоритм в декартовых координатах с их заменой на r, z и заменой коэффициентов на переменные ($k \times r$) и ($\eta^* \times r$). Этот прием рассматривался [6] для стационарного потока. Для условий плавающей поверхности он не был апробирован и нуждается в доработке.

Другой вид бесконечно малого элемента при осевой симметрии — не сектор, а полый цилиндр с толщиной стенки dr и высотой dz . Составляющие расхода получим интегрированием уравнения (1) по координате θ :

$$Q_r = -2\pi r k_r \frac{\partial H}{\partial r} dz = 2\pi q_r dz, \quad Q_z = -2\pi r k_z \frac{\partial H}{\partial z} dr = 2\pi q_z dr \quad (7)$$

Баланс замкнутого по кругу элемента определяется уравнением:

$$2\pi dz k_r \frac{dH}{d \ln r} + \pi dr^2 k_z \frac{dH}{dz} = \pi dr^2 dz \eta^* \frac{dH}{dt} \quad (8)$$

Преобразования $dr/r = d \ln r$ и $r dr = dr^2/2$ указывают на особенности поведения функции напоров. Урав-

нение (8) с заменой знака « d » на « Δ » непосредственно используется в методе конечных разностей и сеточных моделях [2].

Цилиндрическая сетка метода конечных элементов

Метод конечных элементов (МКЭ) имеет ряд преимуществ по сравнению с методом конечных разностей (МКР). Изгиб свободной поверхности стороны треугольников аппроксимируют ломаной линией в отличие от ступеней, образуемых блоками МКР. Решающие узлы находятся на границах слоев и на свободной поверхности, а не в отстоящих от них центрах блоков. Минимизация балансовой невязки уравнения производится с помощью сглаживания искомой функции. И, наконец, матрица коэффициентов системы линейных уравнений имеет семь диагоналей в отличие от пяти в МКР.

Осевая симметрия удобна для автоматизированной разбивки. Горизонтальные плоскости и вертикальные цилиндрические поверхности делят область на блоки. Поверхность конуса, в свою очередь, делит блок на два усеченных элемента-цилиндра (рис. 3, а). Далее конечный элемент будем рассматривать как треугольник, подразумевая, что это проекция объемного элемента на плоскость (рис. 3, б). Скважина занимает центральные цилиндрические блоки (рис. 4). Площадь забоя может быть разбита на несколько соосных блоков.

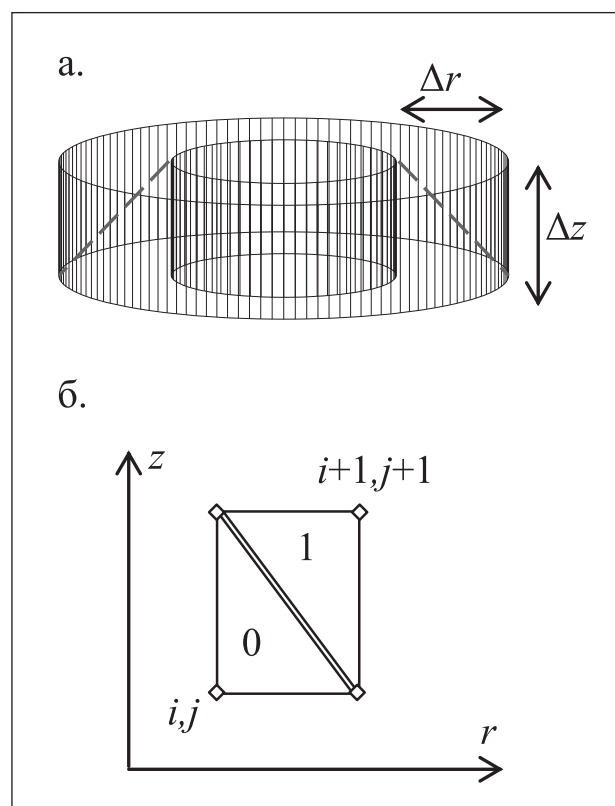


Рис. 3. Блок из двух цилиндрических конечных элементов (а) и их проекция на вертикальную плоскость (б). Пунктиром показана коническая поверхность элементов; $\Delta r, \Delta z$ — размеры блока по координатным осям r, z соответственно; i, j — соответственно номер блока и номер узла в его левом нижнем углу; 0 и 1 — номера элементов в блоке

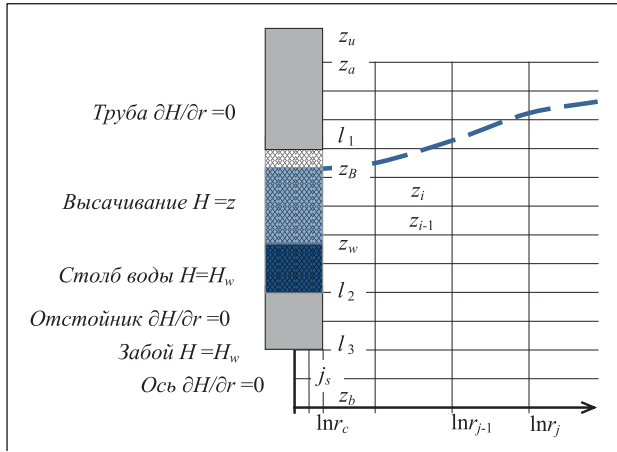


Рис. 4. Условия на стенке и забое скважины и разбивка области на блоки. Высотные отметки: z_u — поверхность земли; z_b — подошва пласта; l_1, l_2 — соответственно верх и низ фильтра; l_3 — забой; z_u — устьевой патрубков; z_B — верхняя точка высачивания; r_c — радиус скважины; z_b, r_j — координаты узлов; j_s — номер вертикали на стенке скважины; z_w — уровень воды в скважине; серый цвет — глухая труба; синий — столб воды; голубой — участок высачивания; пунктир — свободная поверхность

Напоры присваивают узлам сетки, понимая, что узел в объемной задаче — это проекция на плоскость окружности, ребро цилиндра. Параметры породы k и η^* задаются по площади треугольников (по объему цилиндрического элемента), питание w , характеристики кольматации фильтра k_s , параметры перетока χ на подошве и кровле — по основаниям элементов.

Следуя уравнению (8), разбивку по оси r производят с логарифмическим шагом $\Delta \lg r = \lg r_{j+1} - \lg r_j$, то есть с постоянным отношением внешнего (r_{j+1}) и внутреннего (r_j) радиусов блоков ($K_r = r_{j+1}/r_j = \text{const}$), что обеспечивает постоянство фильтрационных сопротивлений по горизонтали. Но по мере удаления по оси r от начала координат площадь блоков линейно увеличивается (на два-три порядка) при сохранении несоизмеримо малой мощности. Соответственно, уменьшаются вертикальные сопротивления. В плано-радиальном потоке в изолированном пласте деформация потока в разрезе не происходит и несоизмеримость блоков не имеет значения. Но в условиях одностороннего перетекания на подошве или водоотдачи со свободной поверхности даже в случае совершенной скважины возникают погрешности счета. В модели несовершенной скважины этот факт сказывается в первую очередь на искажении ее собственной реакции.

В отношении разбивки могут быть сделаны следующие замечания.

- Вопреки представлениям о том, что частая разбивка дает более точное решение, удовлетворительную точность для скважин диаметром до 0,2 м дают значения $K_r = r_{j+1}/r_j = 1,8 \div 2,0$, что соответствует оценкам, приведенным в работах [4, 6]. Для скважин большого диаметра эту величину следует тестировать и, видимо, уменьшать до 1,5. В задачах с фильтрующим забоем может потребоваться значение $1,1 \div 1,2$.

- Изменение K_r от скважины к скважине в модели куста или в схеме с круговой неоднородностью (случай

нереальный, но фигурирующий в литературе) сказывается на снижении точности решения.

- Разбивка по вертикали зависит от несовершенства скважины. Для примыкания к кровле (подошве) или расположения фильтра в средней части пласта следует задавать условие $\Delta z \leq l_f / (8 - 10)$, где l_f — длина фильтра [4, 6]. Погрешности возрастают при небольшом (меньше $l_f / 2$) удалении фильтра от границы.

- Неравномерность разбивки и неоднородность параметров сказываются на некотором опережении или запаздывании реакции узлов. На искажение темпа в длительных имитациях особенно влияет заниженная точность решения.

- Чтобы установить ошибки, следует упростить модель до схемы с известным аналитическим решением и сравнить результаты расчетов. Чтобы увеличить точность, следует изменить разбивку и допустимую погрешность итерационного счета.

Краевые условия

Область фильтрации в нестационарном потоке не ограничена, но численная модель ограничивается некоторым радиусом влияния R_B , который заранее неизвестен. В начальный момент он может быть задан с запасом. В ходе нестационарного решения R_B увеличивается по мере распространения влияния откачки или налива. Изменение напора вблизи внешней границы не должно превышать погрешность ϵ расчета напоров. Тестовые расчеты для установления закономерностей требуют задания $\epsilon \ll 0,1$ мм. Недостаточная величина R_B искажает решение, увеличивая изменение напоров, так как возникает ложное отражение через несуществующую границу. Это проявляется по всей области и особенно на реакции моделируемой скважины.

В схеме пласта-бочки (используется в тестирующих расчетах) внешней границей является непроницаемая цилиндрическая поверхность. В стационарной модели область ограничена радиусом питания с заданным напором естественного потока.

Верхней границей безнапорного потока является свободная поверхность. Ее положение заранее неизвестно и является предметом поиска при решении задачи. Свободная поверхность потока характеризуется нулевым избыточным давлением. В каждой ее точке напор равен ординате:

$$H(r, z_H) = z_H(r) \tag{9}$$

Кинематика поверхности описывается уравнением [2, 7]:

$$k_r \left(\frac{\partial H}{\partial r} \right)^2 + k_z \left(\frac{\partial H}{\partial z} \right)^2 - k_z \frac{\partial H}{\partial z} + w \left(1 - \frac{\partial H}{\partial z} \right) = \mu \frac{\partial H}{\partial t} \tag{10}$$

где μ — гравитационная емкость (безразм.); w — инфильтрация или испарение (м/с).

Обычно квадраты производных принимают пренебрежимо малыми и при отсутствии питания (10) представляют в упрощенном виде:

$$-k_z \frac{\partial H}{\partial z} = \mu \frac{\partial H}{\partial t} \tag{11}$$

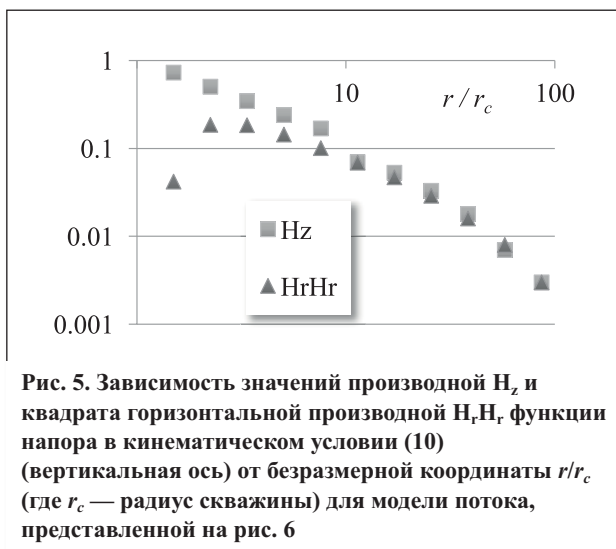


Рис. 5. Зависимость значений производной H_z и квадрата горизонтальной производной $H_r H_r$ функции напора в кинематическом условии (10) (вертикальная ось) от безразмерной координаты r/r_c (где r_c — радиус скважины) для модели потока, представленной на рис. 6

Это уравнение используется в аналитических решениях, а также в численных, явных схемах. Справедливость линеаризации, допущения о том, что первыми членами уравнения (10) можно пренебречь, не обоснована тестовыми расчетами.

Расчеты с помощью программы 1WELL показывают (рис. 5), что действительно соотношение $(\partial H/\partial z)^2 \ll \partial H/\partial z$ справедливо везде, за исключением области $r < (2-3)r_c$. Поэтому при выводе условия на свободной поверхности Ф.М. Бочевер [1] пренебрег этой составляющей. Но вблизи скважины поверхность выполаживается (рис. 6), и $(\partial H/\partial z)^2$ становится весьма значимой величиной. Пренебречь значением $(\partial H/\partial r)^2$ при заметных понижениях напора также невозможно, так как оно сопоставимо с производной $\partial H/\partial z$ по всей области и даже может превышать ее.

Условие на свободной поверхности можно вывести, рассматривая расход осушения (или наполнения) трубки тока под свободной поверхностью (Q_w) [2], то есть баланс, вследствие чего условие уже может быть названо не вполне кинематическим. Вывод В.М. Шестакова [6] содержит промежуточную, но для сеточной

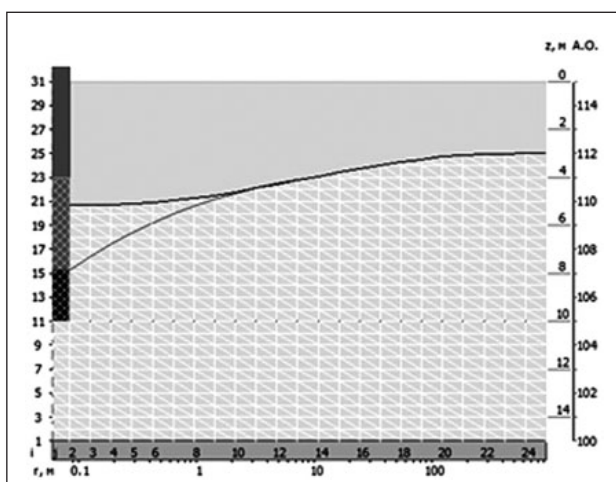


Рис. 6. Форма свободной поверхности в окрестности скважины с незатопленным фильтром диаметром 168 мм. Нижняя кривая — напоры на уровне низа фильтра. Откачка с дебитом 3 л/с в пласте проницаемостью 10 м/сут, время — 3 недели. Скриншот интерфейса программы 1WELL

схемы более полезную и, отметим, более полную формулировку, которая используется в модели в следующем виде:

$$Q_w + w\pi dr^2 = \mu \frac{\partial H}{\partial t} \pi dr^2, \quad Q_w = Q_r + Q_z \quad (12)$$

где составляющие Q_r и Q_z определены формулами (7).

Верхней границей области решения задачи (z_a) служит или поверхность земли, или подошва перекрывающего водоупора. Подтопление поверхности земли при наливке означает возникновение условия $H = z_a$. В напорном пласте граница $z = z_a$ — непроницаемая ($\partial H/\partial z = 0$) или с жестким перетеканием ($q_b = \chi(H_b - H)$, где χ — коэффициент перетока через разделяющую толщу (c^{-1}), H_b — напор в соседнем пласте). Таким же образом определяется условие на нижней границе (подстилающем водоупоре) с отметкой $z = z_b$.

В разделяющей толще может проявляться упругий режим перетекания. Толщу можно включить в область решения, но в этом случае необходимо задание граничного условия на подошве подстилающего или на кровле перекрывающего водоупора.

Рассмотрим начальное условие. До включения скважины напоры определяются положением поверхности естественного потока $H(r, z, t = 0) = H_e$. При моделировании откачек и наливов с заданным напором или экспресс-опытов в скважине задается начальный напор H_w . Эти случаи в большей степени носят характер тестовых задач, так как задать мгновенное повышение или понижение напора в скважине удается редко. В модели опыта с известным дебитом напор в скважине равен статическому уровню потока под земных вод ($H_w = H_e$).

Для некоторых задач исследовательского характера требуется задание инфильтрационного питания или испарения. Моделирование расхода w должно учитывать сдвиг по времени, продолжительность, цикличность, например суточную, и выбор функциональной зависимости от времени.

В потоке с осевой симметрией предполагается отсутствие естественного латерального потока. Поэтому одностороннее задание инфильтрации (испарения) на поверхности, не компенсированное перетеканием снизу, невозможно. Несбалансированный односторонний расход повлечет за собой наложение на моделируемый поток к скважине параллельного процесса осушения или подпора.

В схеме с перетеканием из нижележащего горизонта с тем же напором, что и в рассматриваемом пласте ($H_b = H_e$), начальное условие на водоупоре определяется нулевым расходом: $q_b = 0$. Задание же фонового перетекания с напором, отличным от начального напора в моделируемом пласте ($H_b \neq H_e$), также невозможно без задания инфильтрации. Напоры на нижней границе и свободной поверхности в этом случае взаимосвязаны, а в потоке в качестве начального условия следует задать некоторое распределение по вертикали $H(z, t = 0)$.

Для стационарного питания начальное распределение напоров по вертикали можно найти, приравняв его перетеканию снизу ($q_b = w$). В слоистом пласте напоры могут быть рассчитаны последовательно, сверху



вниз, так как отправной точкой является положение свободной поверхности, а не напор на подошве:

$$t = 0, \quad H(r, z_i) = H(r, z_{i+1}) - \frac{w}{k_i}(z_{i+1} - z_i) \quad (13)$$

где k_i — коэффициент фильтрации; z_i, z_{i+1} — ординаты подошвы и кровли i -го слоя или блока сетки соответственно.

Для верхнего слоя $H(z_{i+1}) = H_e$. В случае с неравномерным или циклическим питанием в процессе решения требуется пересчет нестационарного условия $H[R_B(t), z, t]$ на внешней границе.

Условия на осевой границе

На внешней стороне фильтровой колонны и забоя скважины действуют условия нескольких типов (см. рис. 4). Обсадная труба выше фильтра, отстойник, ось скважины под ним — непроницаемая граница:

$$\left. \begin{aligned} r = r_c, \quad l_1 < z < z_a \\ r = r_c, \quad l_3 < z < l_2 \\ r = 0, \quad z_b < z < l_3 \end{aligned} \right\} \frac{\partial H}{\partial r} = 0 \quad (14)$$

где r_c — радиус скважины; l_1, l_2 — ординаты верха и низа фильтра соответственно; z_a, z_b — ординаты кровли и подошвы горизонта соответственно; l_3 — ордината забоя скважины.

Условие на фильтре исходит из схемы «реального стока», что отвечает действительным условиям с единым напором H_w по высоте столба воды:

$$l_2 \leq z \leq z_w, \quad H(r_c, z) = H_w = \text{const}(z) \quad (15)$$

где z_w в затопленном фильтре (рис. 7, а) — ордината его верха l_1 , в незатопленном — уровень воды z_w (рис. 7, б, в).

Приток к фильтру несовершенной скважины переменен по высоте. Аналитические решения для несовершенных скважин основаны на схеме «линейного стока» с равномерно распределенным по длине удельным притоком, то есть $\partial H / \partial r = \text{const}(z)$ при $r \rightarrow r_c$. Но тогда, вопреки принципу гидростатики, напор оказывается переменной по z величиной. И, поскольку в действительности напор в скважине един и равен отметке уровня воды, приходится вводить некоторую среднюю умозрительную величину [5]. К исследованию гидродинамики самой опытной скважины с осложняющими факторами такая схема неприменима.

И при разработке модели с «реальным стоком» возможность тестирования схемы дает решение Маскета для стационарного случая.

В некоторых случаях требуется рассмотреть приток к забою колодца или скважины. На забое приток резко неравномерен и действует условие постоянного по площади напора (тоже схема «реального стока»):

$$r = r_c, \quad H(r, z_b) = H_w(t) = \text{const}(r) \quad (16)$$

Высачивание образуется при откачке на стенке незатопленного фильтра:

$$r = r_c, \quad H_w \leq z \leq z_b, \quad H = z \quad (17)$$

где z_b — ордината верхней точки высачивания.

В фильтре, затопленном только снаружи (рис. 7, б), высачивание занимает весь оставшийся над водой интервал до верха ($z_b = l_1$). В фильтре, не затопленном и снаружи (рис. 7, в), участок высачивания определяется ординатой свободной поверхности на его стенке ($z_b = z_H$).

Аналитический расчет участка ($z_b - z_w$) невозможен. Приближенные решения [1] применимы к совершенной скважине и основаны на невыполнимых предположениях (например, на предположении о равенстве радиуса питания и глубины потока). Для неоднородного пласта, для нестационарного потока, для несовершенной скважины зависимостей, определяющих участок высачивания, не существует, равно как и для описания свободной поверхности вблизи скважины при наличии высачивания. Высачивание вносит неопределенность в расчеты, когда при осушении фильтра длина стока оказывается переменной во времени, что сказывается на формировании дополнительного фильтрационного сопротивления.

Интегральный расход для скважины с «чистым» фильтром и забоем складывается из притоков к обводненной части фильтра (Q_w), к участку высачивания (Q_b), к проницаемому забою (Q_s) и учитывает расход осушения или наполнения ствола скважины (Q_c):

$$Q = Q_w + Q_b + Q_s + Q_c, \quad Q_c = -\pi r_T^2 \frac{\partial H_w}{\partial t} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} r = r_c, \quad Q_w &= 2\pi \int_{l_2}^{z_w} k_r \frac{\partial H}{\partial \ln r} dz, \quad Q_b = 2\pi \int_{z_w}^{z_b} k_r \frac{\partial H}{\partial \ln r} dz \\ z = l_3, \quad Q_s &= -2\pi k_z \int_0^{r_T} r \frac{\partial H}{\partial z} dr \end{aligned} \quad (19)$$

где r_T — внутренний радиус фильтровой колонны.

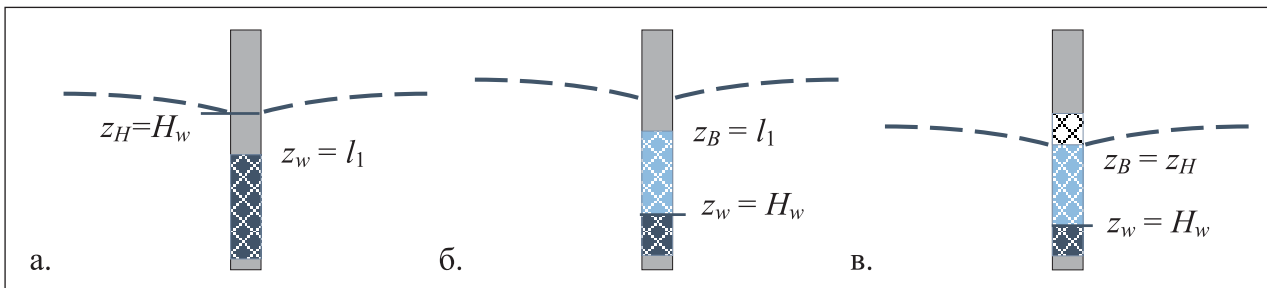


Рис. 7. Случаи с фильтром: а — затопленным; б — затопленным снаружи и незатопленным внутри; в — незатопленным (открытым). H_w — уровень воды в скважине; z_b — ордината верха высачивания; l_1 — ордината верха фильтра; z_w — ордината верха затопленного интервала; z_H — ордината свободной поверхности (пунктирная кривая)

Кольматация определяет иной вид слагаемых (19):

$$r = r_c, \quad Q_W = 2\pi r_c k_s \int_{l_2}^{z_n} (H - H_w) dz, \quad Q_B = 2\pi r_c k_s \int_{z_w}^{z_n} (H - z) dz \quad (20)$$

$$z = l_3, \quad Q_S = 2\pi k_s \int_0^{r_s} r (H - H_w) dr$$

где параметр кольматации $k_s = k_c / \delta_c$ определяется отношением проницаемости оболочки фильтра (или «скина») к ее толщине, причем и то, и другое неизвестно, условно, и, заметим, может быть переменным по времени.

В случае с кольматацией фильтра при наливе может возникнуть «обратное высачивание». За стенкой скважины поверхность потока z_H оказывается ниже уровня воды в скважине ($H_w > z_H$). Но если при откачке участок высачивания — часть границы потока, то при наливе он оказывается выше, вне области решения. В точке пересечения со свободной поверхностью на фильтре проверяется условие $H = z_H$ и задается интегральное условие 3 рода для расхода Q_W , суммированного с расходом «обратного высачивания» Q_B :

$$r = r_c, \quad Q_W = -2\pi r_c k_s \int_{l_2}^{z_H} (H_w - H) dz, \quad (21)$$

$$Q_B = -\pi r_c k_s (H_w - z_H)^2$$

Решение методом конечных элементов

Численное решение с некоторой приемлемой погрешностью дает значения напоров H в узлах сетки, образуемой конечными элементами. В пределах элемента L для аппроксимации H по площади МКЭ использует базисную (сплайн) функцию (рис. 8), формулируемую для каждого узла n :

$$N_n = 1 + N^r (r - r_n) + N^z (z - z_n), \quad (22)$$

$$N^r = \frac{(z_l - z_{l+1})}{2s_L}, \quad N^z = \frac{(r_{l+1} - r_l)}{2s_L}$$

где $l, l+1$ — номера узлов в вершинах элемента, противостоящих узлу n ; N^r, N^z — частные производные, константы.

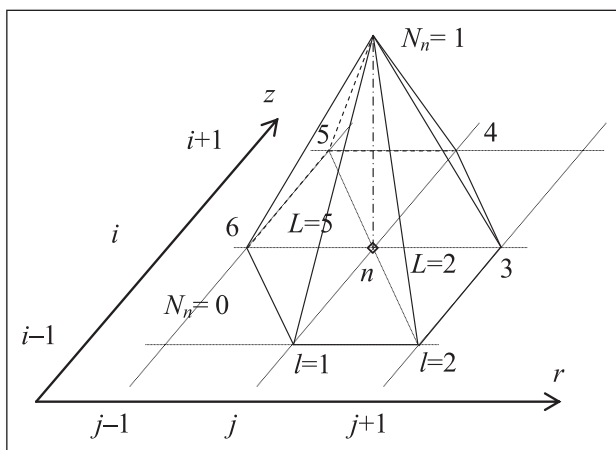


Рис. 8. Базисная функция N_n в виде граней пирамиды. Проекция на плоскость (r, z) — элементы $L = 1, 2, \dots, 6$, окружающие узел n ; $l = 1, 2, \dots, 6$ — номера узлов сопряжения элементов; i, j — номера узлов в двухмерной нумерации

Площадь треугольника L на рис. 8:

$$s_L = [(z_{l+1} - z_n)(r_l - r_n) - (z_l - z_n)(r_{l+1} - r_n)] / 2 \quad (23)$$

В точке n функция для узла с этим номером $N_n = 1$. На внешних границах треугольников вокруг узла n и за их пределами функция $N_n = 0$. В пределах треугольника напор определяется значениями H в трех узлах:

$$H(r, z) = H_l N_{l,L} + H_{l+1} N_{l+1,L} + H_n N_{n,L} \quad (24)$$

Для численного решения согласно методу Бубнова — Галеркина [8] потребуем, чтобы интеграл невязки был равен нулю:

$$\mathfrak{S}_n = \int D_H N_n ds = 0 \quad (25)$$

где D_H — невязка (разница между левой и правой частью) уравнения (6) при подстановке значений напоров; N_n — базисная функция, ds — дифференциал по площади.

Этому требованию можно придать понятный смысл — решение минимизирует балансовую невязку уравнения (8), взвешенную с помощью сплайн-функции (22) и проинтегрированную по площади элементов, окружающих каждый узел n .

Производную H по времени t в формуле (6) представим в следующем виде:

$$\frac{\partial H}{\partial t} \cong \frac{(H - H')}{\Delta t} \quad (26)$$

что означает неявную дискретную схему Либмана с величиной напора H' , полученной на предыдущем шаге; Δt — шаг по времени.

Понижая порядок производных напоров в формуле (25), получим интегралы по границам \mathfrak{S}_g и по площади \mathfrak{S}_s :

$$\mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}_g - \mathfrak{S}_s, \quad (27)$$

$$\mathfrak{S}_g = 2\pi \int_g r N (k_r H^r + k_z H^z) dg,$$

$$\mathfrak{S}_s = 2\pi \int_s r [N^r k_r H^r + N^z k_z H^z + N(H - H') \eta^* / \Delta t] ds$$

Интеграл \mathfrak{S}_s равен сумме интегралов по площади шести элементов (для каждого среднее значение составляет $r_L = (r_n + r_l + r_{l+1})/3$):

$$\mathfrak{S}_s = 2\pi \sum_{L=1}^6 \left[r_L \int_{s_L} f_L ds \right]$$

$$f_L = N_n^r k_{rL} (N_l^r H_l + N_{l+1}^r H_{l+1} + N_n^r H_n) + N_n^z k_{zL} (N_l^z H_l + N_{l+1}^z H_{l+1} + N_n^z H_n) + N_{nL} [(H_l - H_l') N_{lL} + (H_{l+1} - H_{l+1}') N_{l+1L} + (H_n - H_n') N_{nL}] \frac{\eta_L^*}{\Delta t} \quad (28)$$

По определению, на внешних границах окружающих узел n элементов $N_n = 0$, поэтому $\mathfrak{S}_g = 0$. На границе сопряжения элементов интегрирование \mathfrak{S}_g происходит в противоположных направлениях и дает 0.

Через узлы n и l может проходить граница с расходом (м/с): $e = f(H_l - H)$, где f — параметр граничного условия 3 рода (c^{-1}), или свободная поверхность потока с расходом $e = w$. Тогда рассчитывается сумма интегралов по сторонам элементов:



Таблица 1

$$\mathfrak{S}_g = 2\pi \sum_{l=1}^6 \left(r_{nl} \int_{g_{nl}} N \cdot e_{nl} dg \right) \quad (29)$$

где g_{nl} — расстояние между узлами n и l ; $r_{nl} = (r_n + r_l)/2$.

Фактически, в узле могут сходиться только две границы.

Производные базисной функции в выражении (28) рассчитываются по формуле (22), интегрирование по площади треугольника дает следующие коэффициенты:

$$\int N_{nl} N_{il} ds = \frac{S_L}{12}, \quad \int (N_{nl})^2 ds = \frac{S_L}{6} \quad (30)$$

Подстановка и перегруппировка приводит выражение (28) к виду:

$$\mathfrak{S}_s = \sum_{l=1}^6 (H_l a_L + H_{l+1} b_L + H_n c_L - P_L^i) \quad (31)$$

где коэффициенты a_L, b_L, c_L, P_L^i вычисляются по формулам:

$$a_L = 2\pi r_L \left\{ \frac{[k_{rL}(z_l - z_{l+1})(z_n - z_l) + k_{zL}(r_{l+1} - r_l)(r_n - r_l)]}{4s_L} + \frac{n_L^* s_L}{\Delta t 12} \right\} \quad (31a)$$

$$b_L = 2\pi r_L \left\{ \frac{[k_{rL}(z_l - z_{l+1})(z_n - z_l) + k_{zL}(r_{l+1} - r_l)(r_l - r_n)]}{4s_L} + \frac{n_L^* s_L}{\Delta t 12} \right\} \quad (31б)$$

$$c_L = 2\pi r_L \left\{ \frac{[k_{rL}(z_l - z_{l+1})^2 + k_{zL}(r_{l+1} - r_l)^2]}{4s_L} + \frac{n_L^* s_L}{\Delta t 6} \right\} \quad (31в)$$

$$P_L^i = 2\pi r_L s_L \frac{n_L^*}{\Delta t} \left(\frac{H_n'}{6} + \frac{H_l'}{12} \right) \quad (31г)$$

Интеграл по границе с питанием или граничным условием 3 рода (ГУ-3) определяется для свободной поверхности, для кровли и подошвы с перетеканием, для кольматированного фильтра скважины:

$$\mathfrak{S}_g = 2\pi \sum_1^2 \left\{ r_{nl} g_{nl} \left[w_{nl} + f_{nl} \left(\frac{H_{\Gamma n} - H_n}{3} + \frac{H_{\Gamma l} - H_l}{6} \right) \right] \right\} = \sum_{l=1}^6 \left\{ u_{nl} - v_{nl} \left(\frac{H_n}{3} + \frac{H_l}{6} \right) \right\} \quad (32)$$

$$v_{nl} = 2\pi r_{nl} g_{nl} f_{nl}, \quad u_{nl} = 2\pi r_{nl} g_{nl} w_{nl} + v_{nl} \left(\frac{H_{\Gamma n}}{3} + \frac{H_{\Gamma l}}{6} \right) \quad (33)$$

Суммирование (32) всегда сводится к одному или двум членам. Известные напоры H_Γ задаются в узлах. На свободной поверхности питание w и коэффициент f присваиваются проекции Δr участка g . Для скважины коэффициент f присваивается вертикальной стенке элемента. На одной границе элемента не могут быть вместе и питание, и ГУ-3. На свободной поверхности может приниматься в расчет и питание, и гравитационная емкость, реализуемая по неявной схеме. В формулах (32) и (33) участвуют:

- на свободной поверхности: $f = \mu/\Delta t$; $H_\Gamma = H'$; $g = \Delta r$;
- на границе с перетеканием (кровле или подошве): $f = \chi$; $H_\Gamma = H_b$; $g = \Delta r$;
- на фильтре скважины: $f = k_s$; $H_\Gamma = H_w$; $g = \Delta z$.

После преобразований уравнение (25) приводится к линейному виду:

Связь локальных номеров узлов l (см. рис. 8) с двумерными номерами i, j и номером ячейки (столбец m , строка $n = i \times jk + j$) диагональной матрицы

| | | | | | | | |
|-----|-----|--------|----------|-------|--------|----------|-------|
| l | n | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| i | i | $i-1$ | $i-1$ | i | $i+1$ | $i+1$ | i |
| j | j | j | $j+1$ | $j+1$ | j | $j-1$ | $j-1$ |
| m | n | $n-jk$ | $n-jk+1$ | $n+1$ | $n+jk$ | $n+jk-1$ | $n-1$ |

Таблица 2

Уплотненная матрица A коэффициентов уравнений (34)

| | | | | | | | | | |
|------------------|-----|-----|-----|--------|------|--------|-----|---------|-------|
| $n \setminus m'$ | 0 | 1 | ... | $jk-1$ | jk | $jk+1$ | ... | $2jk-1$ | $2jk$ |
| 1 | A | A | | A | A | A | | A | A |
| 2 | A | A | | A | A | A | | A | A |
| ... | A | A | | A | A | A | | A | A |
| n | A | A | | A | A | A | | A | A |
| ... | A | A | | A | A | A | | A | A |
| nk | A | A | | A | A | A | | A | A |

$$A_{nm} H_n + \sum_{l=1}^6 (A_{nl} H_l) - B_n = 0 \quad (34)$$

где A, B — коэффициенты, определяемые координатами и параметрами.

Для расчета коэффициентов A и B суммируются члены, означающие связь узла n с каждым узлом l и треугольником L на рис. 8:

$$A_{n,n} = \sum_{l=1}^6 c_L + \sum_{l=1}^6 v_l, \quad A_{nl} = a_L + b_{L-1} + v_{nl} \quad (35)$$

$$B_n = \sum_{l=1}^6 P_L + \sum_{l=1}^6 u_{nl}$$

Регулярная разбивка позволяет пользоваться двумерной нумерацией узлов и блоков. Для сетки узлов $1 \leq i \leq ik, 1 \leq j \leq jk$ составляется система из $nk = ik \times jk$ линейных уравнений (34) с матрицами коэффициентов $A_{n, m}$ и B_n . Номера узлов определяются табл. 1.

Решение системы алгебраических уравнений производится методом Гаусса. В случае с нелинейными условиями имеет место итерационный цикл, выход из которого определяется допустимой погрешностью расчета напоров или балансовой невязки.

Количество значимых коэффициентов в каждом уравнении (34) постоянно. Диагональная лента матрицы с шириной диагонали $(2jk + 1)$ сохраняется и после процедуры исключения Гаусса, позиции $m < n - jk, m > n + jk$ не используются. Поэтому можно перейти к уплотненной вертикальной матрице A шириной, равной ширине ленты (табл. 2), нумеруя позиции m' в каждой строке от 0 до $2jk$.

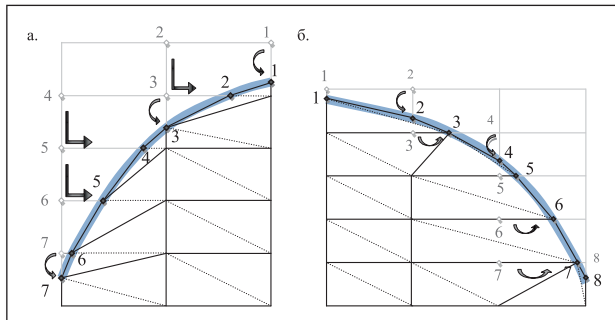


Рис. 9. Трансформация элементов под свободной поверхностью при уклоне: а — прямом; б — обратном. Начальная сетка узлов и элементов показана серым цветом, положение, найденное по заданному ключу, — черным

Размер по n остается прежним. Матрица A формируется с переходом к диагональному номеру $m = m' + n - jk$. Значимы только коэффициенты с номерами $m' = 0, 1, jk-1, jk, jk+1, 2jk-1, 2jk$. Остальные равны нулю. После процедуры исключения коэффициенты слева от средней колонки ($m' < jk$) становятся равными нулю. В результате сжатия значительно сокращается опрос пустых позиций матриц и увеличивается скорость счета. Еще большую скорость может дать использование матричной формы $A(m'', nk)$, где $m'' = 0, 1, 2, \dots, 6$, — без пустых ячеек.

Автоматизация нелинейного решения

Поиск свободной поверхности фильтрационного потока

Свободную поверхность подземных вод аппроксимирует ломаная линия, которая отвечает условию (9). Поиск осуществляется итерациями с перестройкой элементов. Для прямого (к скважине) и обратного (от скважины) уклона (рис. 9) пересчет координат узлов разный.

Начальное положение поверхности — горизонтальная линия с координатами узлов на ней $r_0(j), z_0(i, j)$. По завершении шага итерации на каждой вертикали j отыскивается узел $i_p(j)$, в котором напор не превышает ее начальную ординату $H \leq z_0$ (узлы 1, 3, 7 на рис. 9, а и узлы 1, 2, 4, 8 на рис. 9, б). Далее операции различаются для прямого (откачка) и обратного (налив) уклона поверхности.

Прямой уклон. Узел опускается, его ординате присваивается значение напора, что превращает блок в трапецию (например, блок правее и ниже узлов 3 и 7). В этих узлах поверхность пересекает вертикали. Если

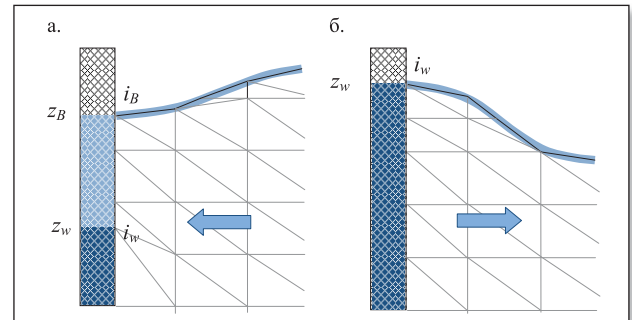


Рис. 10. Форма свободной поверхности и конечные элементы у незатопленного фильтра при откачке (а) и наливе (б). Подвижные узлы сетки: i_w — на уровне z_w воды в скважине; i_B — в верхней точке высачивания z_B на фильтре

между вертикалями она пересекает горизонталь, в точку пересечения перемещается узел вертикали j с номером $i = i_p(j) + 1$ (например, узел 2). Таким образом, в процессе итерационного подбора узлы скользят по образующим сетки в соответствии с ключом «вниз и направо», изображенном на рис. 9 стрелками, обеспечивая гладкое решение. В случае, когда между вертикалями пересекается несколько горизонталей (узлы 4, 5, 6), на вертикали j перемещаются узлы $i_p(j+1) \geq i > i_p(j)$.

Обратный уклон. Узел i_p также опускается на поверхность потока. Если же правее она пересекает горизонтальную направляющую сетки, в эту точку перемещается узел $i = i_p(j) - 1$ (узлы 3, 5). При пересечении нескольких горизонталей перемещаются узлы вертикали j (узлы 5, 6, 7), имеющие номер $i_p(j) > i > i_p(j+1)$.

Пересечение нескольких горизонталей между соседними вертикалями — случай редкий, но необходимость его реализовать определяется маятниковым подбором решения. Координата точки пересечения свободной поверхностью горизонтали определяется подобием треугольников в соответствии с распределением $z_H(j)$.

Трансформация элементов на фильтре. В модели откачки с незатопленным фильтром узел i_w под водой поднимается до уровня воды $z_w = H_w$ (рис. 10). Узел над верхней точкой высачивания i_B , напротив, опускается на отметку пересечения свободной поверхности и фильтра z_B . В модели налива $i_w = i_B$.

Схема реального стока

При моделировании скважины с заданным дебитом следует определить напор H_w (15), единый для столба воды. Участок высачивания неизвестен в лю-

Таблица 3

| Значения характеристик граничных условий в узлах для скважины | | | | |
|---|------------------------------|-----------------------|-------------------------|-----------------------|
| Участок | Номер узла | Ордината | ГУ-1 | ГУ-3 |
| Высачивание | $i_w < i \leq i_B$ | $H_w < z(i) \leq z_B$ | $H(i, j_s) = z(i, j_s)$ | $H_\Gamma(i) = z(i)$ |
| Столб воды | $i_{l2} \leq i \leq i_w$ | $z(i) \leq H_w$ | $H(i, j_s) = H_w$ | $H_\Gamma(i) = H_w$ |
| Забой | $i = i_B; 1 \leq j \leq j_s$ | $z = l_3$ | $H(i_{B^*}, j) = H_w$ | $H_\Gamma(i_B) = H_w$ |



бом случае с открытым фильтром. Он фигурирует в задаче как граница с распределенным напором (17), где размер участка границы получен из предыдущего приближения. Редкий случай решения без итераций — затопленный снаружи фильтр, но убедиться в этом можно, только выполнив расчет. Итерационный расчет имеет следующую последовательность действий: приближение напора $H_w \rightarrow$ решение уравнения относительно $H(i, j) \rightarrow$ расчет составляющих расхода по значениям напоров \rightarrow расчет новой сетки и координат свободной поверхности \rightarrow пересчет нового значения $H_w \rightarrow$ и т.д., пока не будет достигнута требуемая точность.

Отсутствие кольматации означает граничное условие 1 рода (ГУ-1) — прямое задание напоров на стенке фильтра в процессе подбора (табл. 3). Если фильтр кольматирован, имеет место ГУ-3. Подбором задают не напоры на стенке фильтра (они следуют из решения), а граничные значения H_T (32) внутри скважины. Между узлами рассчитывают коэффициенты ν и u (33), полагая, что $f = k_s$.

Дебит по формулам (18–20) определяется суммированием горизонтальных расходов по блокам у фильтра ($Q_W + Q_B$), вертикальных расходов по блокам под забоем (Q_S), изменением емкости в стволе (Q_C):

$$Q = Q_W + Q_B + Q_S + Q_C \quad (36)$$

$$Q_w = \sum_{i_2}^{i_3-1} \Phi_c (H_i - H_w) \Delta z_i, \quad Q_b = \sum_{i_w}^{i_3-1} \Phi_c (H_i - z_{ci}) \Delta z_i; \quad (37)$$

$$Q_s = \sum_1^{j_3-1} \Phi_s (H_j - H_w), \quad Q_c = \Phi_t (H_w^{t-\Delta t} - H_w);$$

$$\Delta z_i = z_{i+1} - z_i, \quad H_i = \frac{H_{i,j} + H_{i+1,j}}{2}, \quad (38)$$

$$z_{ci} = \frac{z_i + z_{i+1}}{2}, \quad H_j = \frac{H_{i,j} + H_{i,j+1}}{2}, \quad \Phi_t = \frac{\pi r_T^2}{\Delta t};$$

$$\text{ГУ1: } \Phi_c = \frac{2\pi k_{ri}}{\ln(r_{j+1}/r_c)}, \quad \Phi_s = \frac{\pi(r_{j+1}^2 - r_j^2)k_{zj-1}}{\Delta z_i}; \quad (38a)$$

$$\text{ГУ3: } \Phi_c = 2\pi r_c k_s, \quad \Phi_s = \pi(r_{j+1}^2 - r_j^2)k_s;$$

где $\Phi_c, \Phi_s, \Phi_t, H_i, H_j, \Delta z_i, z_{ci}$ — вычисляемые величины; i_2 — номер i -го узла на нижнем крае фильтра; i_3 — номер i -го узла на забое.

Внутренний радиус r_T колонны может быть задан прямо или ориентировочно исходя из радиуса фильтра за вычетом 5–8 мм толщины труб. Причем величина r_c сама может служить источником ошибки из-за неопределенности ее задания по диаметру бурения или фильтра.

Известный дебит откачки (Q), значения напоров ($H_{i,j}$) предыдущей итерации, уровень в скважине для предыдущего шага по времени ($H_w^{t-\Delta t}$), используются для расчета нового уровня H_w :

$$H_w = \frac{\left[\sum_{i_2}^{i_3-1} \Phi_c H_i \Delta z_i - \sum_{i_w}^{i_3-1} \Phi_c z_{ci} \Delta z_i + \sum_1^{j_3-1} \Phi_s H_j + \Phi_t H_w^{t-\Delta t} - Q \right]}{\sum_{i_2}^{i_3-1} \Phi_c \Delta z_i + \Phi_s + \Phi_t} \quad (39)$$

На фильтре несовершенной скважины приток крайне неравномерен, на краях он приобретает простран-

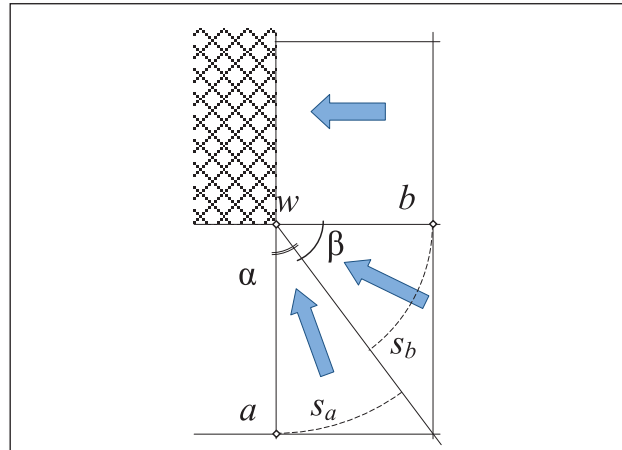


Рис. 11. Элементы блока в краевой точке фильтра: w, a, b — узлы с расчетными напорами, s_a, s_b (пунктир) — дуги секторов с углами α и β

ственный характер. Определение притока Q_W (37) по линейному перепаду напоров в блоках приводит к ошибкам расчета H_w в схеме с ГУ-1.

Рассмотрим нижнюю границу фильтра (рис. 11). Неучтенный приток Q_E в дискретной схеме концентрируется по краю фильтра и может быть представлен расходами из двух расположенных ниже секторов с углами α и β . Его можно приближенно рассчитать по формуле для сферического потока через внешние поперечные сечения s_a и s_b по значениям напоров H_a и H_b в ближайших узлах:

$$Q_E \approx 2\pi r \left[k_z \frac{H_a - H_w}{\Delta z} s_a + k_r \frac{H_b - H_w}{\Delta r} s_b \right] \quad (40)$$

$$s_a = \Delta z \cdot \alpha / 2, \quad s_b = \Delta r \cdot \beta / 2$$

Аналогичен расчет для верхнего края затопленного фильтра. Расчет Q_E производится также и в случае притока через забой, по его краю.

Случай с ГУ-3 свободен от ошибок такого характера, так как расход рассчитывается по напорам в узлах непосредственно на кольматированной стенке. Для повышения точности расчета рекомендуется величину Q_E суммировать с Q_W и Q_S .

Восстановление. Балансовой характеристикой притока после откачки или налива (а также экспресс-опыта) является только расход наполнения (осушения) ствола скважины (Q_C), так как дебит $Q = 0$.

Работа с программой 1WELL

Для решения задачи фильтрации следует определить тип и схему опыта — кустового или одиночного (рис. 12):

- откачка или налив в скважину;
- совершенная или несовершенная по степени вскрытия пласта скважина;
- приток через забой скважины, дно колодца;
- кольматация фильтра и забоя скважины;
- заданный дебит, заданный напор или экспресс-опыт (мгновенный);
- восстановление после откачки или налива;
- перетекание на подошве пласта;
- питание (испарение) на свободной поверхности;
- однородный или слоистый неоднородный пласт.

Для имитации реального опыта может быть задан *постоянный* или *переменный дебит*, а также остановка опыта и пуск восстановления, возобновление после перерыва, циклический режим, связанный с автоматическим отключением насоса или суточным изменением расхода (например, испарения) на свободной поверхности.

Задание *предельного понижения* уровня воды в скважине предусмотрено для предотвращения осушения насоса, понижения уровня до отстойника ниже фильтра. При наливе может быть задано предельное повышение. Перелив через патрубков фильтровой колонны предотвращается в любом случае исходя из высотных отметок. По достижении предельного значения режим постоянного дебита меняется на режим с постоянным напором.

Приток через забой рассматривается в задачах, связанных с опытами в скважинах большого диаметра или в колодцах. Возможна конструкция с глухой обсадкой до забоя — в этом случае задаются одинаковые глубины до верха и до низа фильтра. Этот случай может иметь заметные ошибки счета. Поэтому под забоем предусмотрена дополнительная разбивка по r , и используется специальный тип граничного условия.

Может быть определен параметр *кольматации* скважины k_s — отношение проницаемости скина (кольматирующей оболочки фильтра) к его толщине. В случае «чистых» фильтра и забоя этот параметр не задается.

Схема однородного пласта (опция «Пласт») предназначена для моделирования пласта ограниченной мощности, двухслойного пласта, безнапорного потока. Каждая схема может быть дополнена жестким перетеканием снизу. Предусмотрен переход к напорно-безнапорной схеме при осушении или подтоплении покровного слоя.

Задаются следующие параметры:

- глубина до статического уровня воды;
- гравитационная емкость m ;
- коэффициент фильтрации пласта k (м/сут);
- коэффициент анизотропии k_z / k_r ;
- коэффициент упругости η^* (1/м), который может быть рассчитан по коэффициентам пористости и сжимаемости, ввод которых предусмотрен;
- глубина до подошвы пласта;
- глубина до подошвы (мощность) покровного слоя (если она не задана, то принимается схема безнапорного потока; если задана — схема двухслойного пласта);
- коэффициент фильтрации покровного слоя k_0 (если он не задан, то пласт напорный);
- коэффициент перетока через подстилающий водупор χ (1/сут);
- питание на свободной поверхности w (м/сут).

Предусмотрено задание задержки t_0 (ч) и длительности t_w (ч) питания после начала откачки. Может быть выбран ступенчатый или переменный характер (нарастание — спад) w в заданный период. В случае ин-

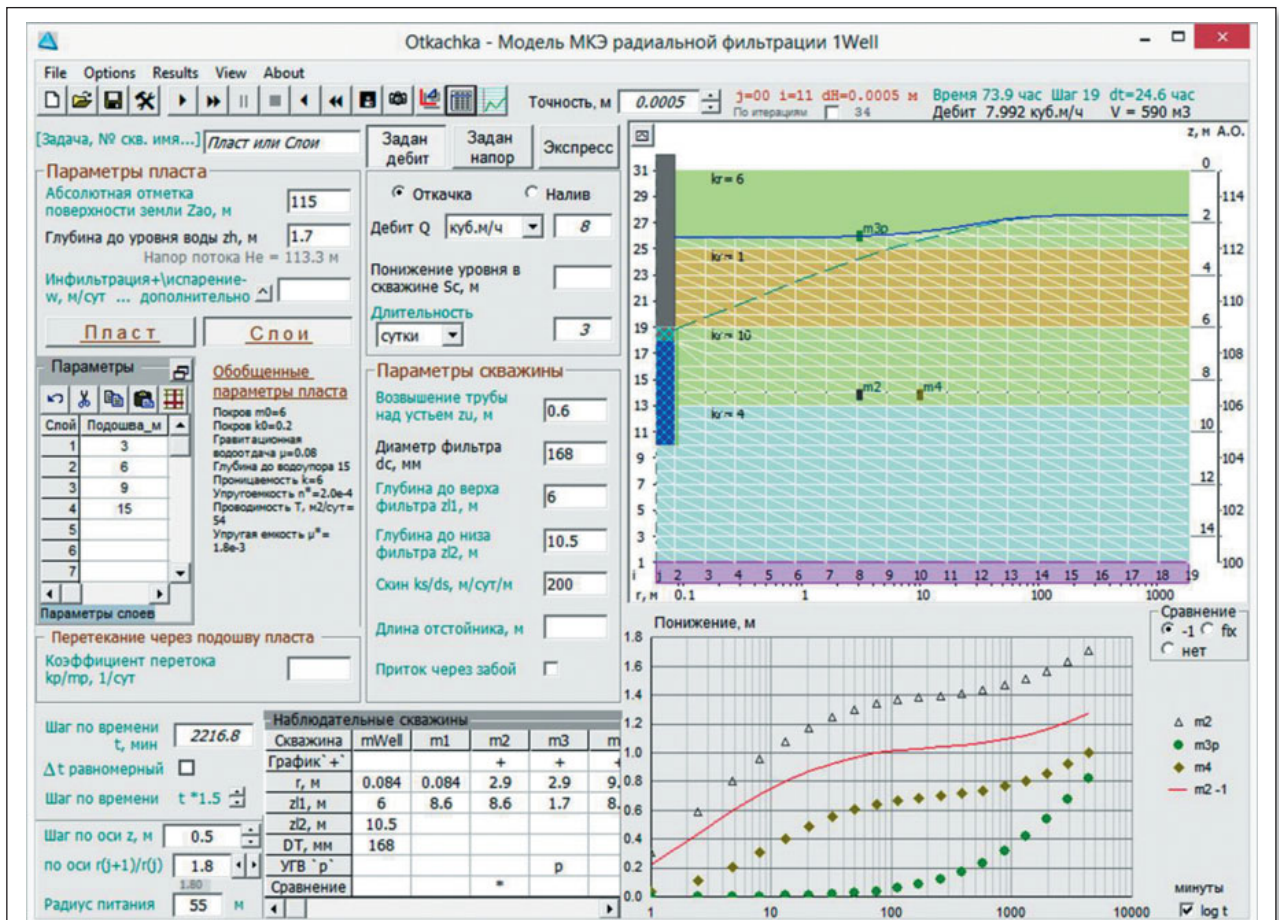


Рис. 12. Скриншот программы 1WELL. Моделирование кустовой откачки в слоистом пласте. Точки на графике — прослеживание понижений напоров в пьезометрах, сплошная кривая — результаты моделирования предыдущего варианта



фильтрации или испарения автоматически задается компенсирующий расход перетекания снизу.

Схема неоднородного пласта (опция «Слои») требует задания по слоям: глубин подошвы, отдельно коэффициентов горизонтальной (k_r) и вертикальной (k_z) фильтрации и перечисленных выше параметров. Автоматически определяются обобщенные параметры пласта — проводимость и упругая емкость — для сопоставления с аналитическими решениями.

Стационарная задача имеет прикладное значение, рассматривается при тестировании численного решения. Стационарный режим реализуется, если не заданы ни гравитационная емкость, ни коэффициент упругости, но задан радиус питания R для определения граничного условия.

В нестационарной задаче участвует не радиус питания, а радиус влияния R_B (размер модели), который назначается автоматически и увеличивается от шага к шагу. В исследовательских целях может быть специально зафиксирован радиус питания для задания круговой границы. Для этого следует ввести его величину со знаком «минус».

Шаг по оси z задается как ориентировочная величина. Программа в режиме контроля данных автоматически анализирует соотношение глубин залегания свободной поверхности, границ пласта, слоев, верха и низа фильтра и корректирует разбивку. По умолчанию начальное значение составляет 0,5 м.

Шаг по оси r по умолчанию задается для всех узлов j логарифмически постоянным с отношением $r_j/r_{j-1} = 2$. При вводе в таблицу «Наблюдательные скважины» (см. рис. 12) конкретных значений радиальных координат (r_m) пьезометров программа автоматически корректирует величину K_r .

Шаг по времени может быть выбран равномерным или увеличивающимся по времени при $\Delta t^K = c\Delta t^{K-1}$, где K — номер шага; c — коэффициент, $c > 1$. Стремление определить первый шаг слишком малым для прослеживания начального периода может стать источником ошибки. Критерии соотношения значений шагов по времени и пространственным координатам могут быть найдены с помощью сравнения упрощенных схем моделирования с аналитическими решениями. Однако следует учитывать, что в начальный момент все модели нечувствительны к геофильтрационным параметрам из-за влияния емкости скважины.

Прослеживание напоров обеспечивает пошаговый вывод значений в табличной и графической форме для узлов, определенных таблицей программы «Наблюдательные скважины», куда вводятся радиальная координата и глубины до верха и низа фильтра. График прослеживания напора выводится, если в соответствующей ячейке таблицы есть отметка «+».

Отметка «*» указывает на то, что при выборе пункта меню «View\Analytic» для узла будет выведен график аналитического решения. Для этого же узла при последующих симуляциях существует возможность сохранения графика предыдущего (опция «-1» в рамке «Сравнение») или изначально фиксированного решения (опция «fix»). Сопоставление графиков решений обеспечивает удобство планирования опыта и подбора параметров при решении обратной задачи.

Задание характеристик обеспечивается редактором величин и опций или загрузкой сохраненного ранее файла данных «*.1wl». Экспорт данных, таблиц и графиков осуществляется путем записи файлов и буферным обменом через память компьютера. Каждый элемент управления интерфейса обеспечен короткой подсказкой. Редакция и запуск счета сопровождается контролем корректности данных и сообщениями об ошибках ввода.

Работа с опытными данными. Для определения геофильтрационных параметров по данным откачек и наливов может быть использована подпрограмма, предназначенная для сравнения графиков понижений и дебитов — опытных и модельных. В ней имеется таблица ввода журнала опыта — значений времени, дебита и понижений по наблюдательным скважинам. Опытные данные могут быть загружены из файла с расширением «*.1tx» или импортированы из офисных электронных таблиц через буфер обмена. Формат: колонка времени в минутах, колонка дебита ($\text{м}^3/\text{сут}$), колонки понижений (повышений) уровней (м) в скважинах.

В таблицу вводятся характеристики скважин — удаление от центральной скважины, расстояния от верха и низа фильтра до кровли пласта или свободной поверхности. Геометрические характеристики используются для построения графиков комбинированного прослеживания и расчета эталонных кривых: Тейса — Хантуша для периода упругого режима (кривая А), Тейса — Болтона для гравитационного режима (кривая В). Ими можно пользоваться как вспомогательной процедурой метода эталонных кривых, понимая, что это решения для упрощенных схем. Несовершенство скважин учитывается с помощью поправки на дополнительное сопротивление. Программа может быть дополнена более современными эталонными решениями.

Результаты расчета и опытные данные на графике временного прослеживания отображаются в координатах простых, логарифмических, комбинированных — по выбору. Для учета изменчивости дебита используется приближенный прием с выводом величины S/Q , где S — понижение напора (м). Для безнапорного потока может быть использована функция Джейкоба: $S(1-S/2h)$, где h — глубина потока (м). Восстановление определяется программой самостоятельно, по последней значимой записи дебита.

Тестовые расчеты. Погрешности, связанные с разбивкой, в численном моделировании возникают в обязательном порядке, особенно в случае с несовершенной скважиной. В особой степени они проявляются в реакции самой опытной скважины. Тестирование схемы включено в программу IWELL. В качестве эталонного решения используются зависимости, в которых несовершенство скважин учитывается методом суперпозиции отраженных стоков [5, 7, 9]:

$$S = \frac{Q}{4\pi T} \left[S_D + \xi \left(\frac{r}{m}, \frac{z}{m}, \frac{l_1}{m}, \frac{l_2}{m} \right) \right] \quad (41)$$

где S_D — безразмерное понижение для совершенной скважины (в стационарном потоке — функция Дюпюи — Тима $\ln(R/r)$; в нестационарном упругом потоке — функции Тейса или Хантуша; в безнапорном — функция Болтона).

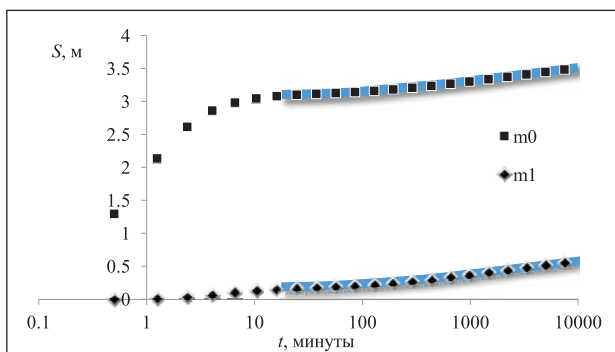


Рис. 13. Сравнение понижений напоров S (точки), рассчитанных программой 1WELL, и эталонного решения (сплошная линия) для откачки в безнапорном потоке из несовершенной скважины с фильтром, примыкающим к подошве (m_0); m_1 — расчет по пьезометру напротив фильтра

В начальный период в аналитическое решение вводится коррекция на осушение ствола скважины по Требину — Щербакову [1]. Поправка на несовершенство ζ зависит от координат фильтра, отнесенных к мощности пласта m . Автором [5] рассмотрено обоснование расчета несовершенных скважин с использованием решения для совершенных скважин с поправкой ζ и опубликован программный код, который для центральной скважины исходит из модели «реального стока» Маскета. Таблицы значений поправки приведены, например, в работе [9]. Решение (41) учитывает особенности основных схем откачки и для квазистационарных условий может использоваться вполне уверенно.

Имитация типовой откачки показала совпадение численного расчета (рис. 13) и эталонных решений Мёнча, Ноймана — Тартаковского [11] и даже Болтона [1] с поправкой ζ . Параметры схемы: $k_r = k_z = 5$ м/сут; мощность потока 13 м; $\mu = 0,05$; $Q = 3$ м³/ч; длина фильтра 3 м; шаг разбивки по вертикали 0,25 м; логарифмический шаг по горизонтали 2; точность счета 0,05 мм. Решения ложатся на одну кривую и выходят на асимптоту Тейса, — как это ни «удивительно» (публикуемые аналитические решения все более усложняются, и их разработке посвящены десятки работ).

Заключение

Модель профильно-радиального потока в окрестности скважины реализована в виде компьютерной программы 1WELL. Программа включает в себя решение прямой задачи моделирования и предназначена для использования в изысканиях при планировании и интерпретации данных опытных откачек и наливов. Значительный диапазон параметрического ряда и выбора схем, режима фильтрации, факторов влияния на реакцию скважин определяет исследовательский характер модели. В значительной мере ему способствуют однооконный интерфейс, возможность сопоставления вариантов расчета и работа с опытными данными.

Условием успешной работы с моделью является внимательное отношение к исходным данным, их непротиворечивости друг другу и здравому «гидрогеологическому» смыслу. Точность решения существенно зависит от корректной сеточной разбивки и допустимой погрешности определения напоров в итерационном цикле. В ряде случаев может потребоваться задание погрешности менее 0,01 мм. Не исключено, что в задачах со свободной поверхностью, особенно в модели налива, в неоднородном пласте, итерационное решение не будет сходиться. В таких случаях следует упростить фильтрационную схему и изменить разбивку.

В статье приведены математические основы и вывод алгоритма решения методом конечных элементов уравнения нестационарной фильтрации с осевой симметрией в плоскости разреза. К сожалению, все больше наблюдается разделение профессионального контингента на пользователей, слепо полагающихся при решении специфических задач на рынок программ, и на производителей программных продуктов, не имеющих опыта полевых гидрогеологических работ и теоретических знаний. Поэтому изложение в статье математической стороны вопроса ориентировано на гидрогеолога, интересующегося разработкой собственных программ и творческой стороной этого занятия. ☞

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бочвер Ф.М., Гармонов И.В., Лебедев А.В., Шестаков В.М. Основы гидрогеологических расчетов. М.: Недра, 1969. 368 с.
2. Бэр Я., Заславски Д., Ирмей С. Физико-математические основы фильтрации воды. М.: Мир, 1971, 451 с.
3. Лехов М.В. Интерпретация кустовых откачек из несовершенных скважин с помощью моделирования // Материалы 2-й Конференции молодых ученых геологического факультета МГУ. Гидрогеология. М.: ВИНТИ № 247–76. Деп. 29.01.76. С. 7–13.
4. Лехов М.В. Моделирование откачек из несовершенных скважин на сеточных интеграторах // Региональная геология некоторых районов СССР. М.: Изд-во МГУ, 1976. С. 120–124.
5. Лехов М.В. Расчет поправки на несовершенство скважины при откачке в пласте ограниченной мощности // Геоэкология. Инженерная геология. Гидрогеология. Геокриология. 2002. № 3. С. 266–274.
6. Лукнер Л., Шестаков В.М. Моделирование геофильтрации. М.: Недра, 1976. 407 с.
7. Опытнo-фильтрационные работы / под ред. В.М. Шестакова, Д.Н. Башкатова. М.: Недра, 1974. 204 с.
8. Сегерлинд Л.Дж. Применение метода конечных элементов. М.: Мир, 1979. 392 с.
9. Шестаков В.М., Лехов М.В. Способ обработки данных кустовых откачек из несовершенных скважин при стабилизированном режиме // Экспресс-информация ВИЭМС. Гидрогеология и инженерная геология. 1975. № 9. С. 1–17.
10. Шестаков В.М., Невечера И.К. Фильтрационные расчеты несовершенной скважины в безнапорном потоке // Вестник Московского университета. Сер. 4. Геология. 2009. № 6. С. 55–58.
11. Duffield G.M. AQTESOLV for Windows. Version 4.5: user's guide. Reston, VA: HydroSOLVE Inc., 2007.