

# ИЗМЕНЕНИЕ ЖЕСТКОСТИ ГЛИНИСТЫХ ГРУНТОВ В РАЗНЫХ ДИАПАЗОНАХ ДЕФОРМАЦИИ ПО ДАННЫМ СТАТИЧЕСКИХ И ДИНАМИЧЕСКИХ ИСПЫТАНИЙ

## VARIATION OF CLAY SOILS STIFFNESS IN DIFFERENT STRAIN RANGES FROM THE DATA OF STATIC AND DYNAMIC TESTS

### СЕНЦОВА Е.А.

Аспирант кафедры инженерной и экологической геологии геологического факультета Московского государственного университета  
им. М.В. Ломоносова, Москва, sentsovaea@gmail.com

### НИКИТИН М.С.

Старший научный сотрудник лаборатории исследования влияния геологических факторов на физико-химическое закрепление грунтов геологического факультета Московского государственного университета  
им. М.В. Ломоносова, Москва, mikes.nikitin@gmail.com

### ВОЗНЕСЕНСКИЙ Е.А.

Профессор кафедры инженерной и экологической геологии геологического факультета Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, д.г.-м.н., Москва, eugene@geol.msu.ru

### SENTOVA E.A.

Postgraduate student, Department Engineering and Ecological Geology, Faculty of Geology, Lomonosov Moscow State University, Moscow, sentsovaea@gmail.com

### NIKITIN M.S.

Senior researcher, Research Laboratory of Geological Factors Influence on Physicochemical Soil Consolidation, Faculty of Geology, Lomonosov Moscow State University, Moscow, mikes.nikitin@gmail.com

### VOZNESENSKY E.A.

Professor, Faculty of Geology, Department of Engineering and Ecological Geology, Lomonosov Moscow State University, DSc (Doctor of Science in Geology and Mineralogy), Moscow, eugene@geol.msu.ru

#### Ключевые слова:

жесткость грунта; малые деформации; модуль деформации; лабораторные испытания; динамические испытания грунтов; испытания на резонансной колонке.

#### Аннотация

Рассмотрены особенности изменения жесткости грунтов в широком диапазоне деформаций. Дан обзор современных представлений по теме. Описана кривая деградации жесткости глинистых грунтов с помощью нескольких лабораторных методов. Определены критические условия их применимости в выбранном диапазоне деформаций, и проведено сравнение значений полученных деформационных характеристик по результатам лабораторных испытаний.

#### Keywords:

stiffness of soil; small strains; deformation modulus; laboratory tests; dynamic soil test; resonant column test.

#### Abstract

Variations of soil stiffness in broad strain range are discussed. Stiffness degradation curve for clay soils is developed using several laboratory testing methods. Conditions of their application within a selected strain ranges are specified basing on comparison of soil moduli from different laboratory tests.

#### Введение

Уже с 1970-х годов исследователи обращали внимание на очевидное различие между жесткостью грунтов, полученной в ходе лабораторных испытаний, и ее значениями, рассчитанными из наблюдений за деформациями сооружений. Сейчас эти различия получили объяснения через влияние нелинейности деформирования грунтов в области малых деформаций, что можно считать одним из важных достижений геотехнических исследований за последние 30 лет.

Вопросу влияния нелинейности деформирования грунта на его жесткость посвящено значительное количество работ [3].

На рис. 1 приведен общий вид зависимости модуля деформации от диапазона деформаций, в котором он изучен. График снижения жесткости имеет характерную S-образную форму [4]. Анализируя эту кривую, можно сделать вывод о том, что жесткость грунта, которая используется в проектных расчетах, не имеет отношения к окончательному уровню деформаций грунта и зачастую занижена более чем в половину от первоначальной величины.



| Характеристика исследованных грунтов (средние значения по группам) |                |                               |      |                                  |                                     |   |  |                      |                                  |                               |   |  |                                |                                  |   |
|--|----------------|-------------------------------|------|----------------------------------|-------------------------------------|---|--|----------------------|----------------------------------|-------------------------------|---|--|--------------------------------|----------------------------------|---|
| Порядковый номер   | Номер скважины | Глубина опробованного слоя, м |      | Естественная влажность, д.е. $W$ | Плотность, г/см <sup>3</sup> $\rho$ | Плотность сухого грунта, г/см <sup>3</sup> $\rho_d$ | Плотность частиц, г/см <sup>3</sup> $\rho_s$ | Пористость, д.е. $n$ | Коэффициент пористости, д.е. $e$ | Степень влажности, д.е. $S_r$ | Верхний предел пластичности, д.е. $W_l$ | Нижний предел пластичности, д.е. $W_p$ | Число пластичности, д.е. $I_p$ | Показатель текучести, д.е. $I_l$ | Наименование грунта по ГОСТ 25100-2011    |
|  |                | от                            | до   |                                  |                                     |   |  |                      |                                  |                               |   |  |                                |                                  |   |
| 1  | 2              | 3                             | 4    | 5                                | 6                                   | 7   | 8  | 9                    | 10                               | 11                            | 12                                      | 13                                     | 14                             | 15                               | 16  |
| <b>Группа 1</b>  |                |                               |      |                                  |                                     |   |  |                      |                                  |                               |   |  |                                |                                  |   |
| 1  | 1              | 4.0                           | 4.5  | 0.271                            | 1.94                                | 1.52  | 2.75   | 0.45                 | 0.80                             | 0.93                          | 0.380                                   | 0.236                                  | 0.144                          | 0.26                             | Суглинок тяжелый пылеватый тугопластичный |
| <b>Группа 2</b>  |                |                               |      |                                  |                                     |   |  |                      |                                  |                               |   |  |                                |                                  |   |
| 2  | 2              | 6.0                           | 6.5  | 0.270                            | 1.98                                | 1.56  | 2.74   | 0.43                 | 0.76                             | 0.98                          | 0.359                                   | 0.247                                  | 0.112                          | 0.20                             | Суглинок легкий пылеватый полутвердый     |
| <b>Группа 3</b>  |                |                               |      |                                  |                                     |   |  |                      |                                  |                               |   |  |                                |                                  |   |
| 3  | 2              | 13.0                          | 13.5 | 0.265                            | 2.09                                | 1.66  | 2.73   | 0.39                 | 0.66                             | 1.00                          | 0.321                                   | 0.230                                  | 0.091                          | 0.30                             | Суглинок легкий пылеватый тугопластичный  |
| <b>Группа 4</b>  |                |                               |      |                                  |                                     |   |  |                      |                                  |                               |   |  |                                |                                  |   |
| 4  | 2              | 11.0                          | 11.5 | 0.249                            | 2.05                                | 1.64  | 2.73   | 0.40                 | 0.67                             | 0.99                          | 0.334                                   | 0.227                                  | 0.108                          | 0.20                             | Суглинок легкий пылеватый полутвердый     |

(разрушения) и свойствами грунта при малых деформациях.

Более простой подход, снижающий вероятность ошибок, состоит в использовании более низкого значения пороговой деформации сдвига. Например, Дж. Сантос и А. Коррейя [10] предложили использовать в расчетах пороговую деформацию сдвига  $\gamma_r = \gamma_{0,7}$  при которой секущий модуль сдвига  $G_s$  уменьшается до 70% от своей первоначальной величины  $G_0$ . В этом случае уравнение (1) можно представить в следующем виде:

$$\frac{G_s}{G_0} = \frac{1}{1 + \alpha \left| \frac{\gamma}{\gamma_{0,7}} \right|}, \tag{3}$$

где  $\alpha = 0,385$  — эмпирический коэффициент [10].

Для того чтобы обеспечить количественную характеристику жесткости и ее снижения при увеличении деформации на практике используют следующие параметры:

1.  $G_0$  и  $E_{ur}$  — модуль сдвига при сверхмалых деформациях и модуль деформации при разгрузке-вторном нагружении.
2.  $\gamma_{0,7}$  — пороговая сдвиговая деформация, при которой секущий модуль сдвига  $G_s$  уменьшается примерно до 70% от величины  $G_0$  [10].

Однако в большинстве случаев при проектировании в модели грунтов закладываются заниженные показатели деформируемости грунтов, рассчитанные при значительно больших уровнях деформаций, чем те, что реально испытывает грунтовое основание в процессе эксплуатации зданий и сооружений.

В связи с этим в последнее время для корректного учета зависимости жесткости от уровня деформации и использования этой зависимости для качественного прогноза работы грунта основания были разработаны модели грунтов с учетом нарастания их жесткости в диапазоне малых деформаций (например, HSS для PLAXIS [3], [9], [11]).

Однако при их практическом использовании возникают некоторые проблемы. Так, нельзя проследить изменение модуля деформации во всем необходимом для проектирования диапазоне деформаций, используя один лабораторный метод, что связано с ограниченными возможностями любого из них. Каждый лабораторный метод определения деформационных свойств имеет свои погрешности и граничные условия, которые необходимо учитывать при определении модулей деформаций в различных необходимых диапазонах смещений.

В связи с этим авторы постарались получить сравнительную характеристику деформационных свойств глинистых грунтов в широком диапазоне деформаций, для чего пришлось привлечь возможности и статических, и динамических испытаний. Методика

Таблица 2

и результаты этого исследования и обсуждаются в данной статье.

**Объект и методика исследования**

Лабораторные исследования проводились на образцах среднеплейстоценовых глинистых грунтов ненарушенного сложения озерно-аллювиального генезиса тобольской свиты, отобранных в г. Тобольске в интервале глубин 2–14 м. Грунты представлены суглинками тяжелыми и легкими пылеватыми, полутвердыми и тугопластичными. Грунты были разделены на четыре группы по физическим характеристикам, представленным в табл. 1.

Программа экспериментов для каждой группы включала следующие виды испытаний:

- малоамплитудные динамические испытания методом резонансной колонки (ГОСТ Р 56535-2015);
- динамическое трехосное сжатие по консолидированно-недренированной схеме (ГОСТ Р 56535-2015);
- кинематическое трехосное сжатие по консолидированно-недренированной схеме (ГОСТ 12248-2010) с одновременным использованием акустического просвечивания в течение всего опыта с помощью пары изгибных элементов, вмонтированных в пьедестал и верхний штамп прибора.

Эксперименты проводились на кафедре инженерной и экологической геологии геологического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. Из одного монолита вырезался образец для испытаний на резонансной колонке и с последующим испытанием на динамическом стабилометре. Из второго вырезался образец для испытаний в условиях статического трехосного сжатия в совокупности с акустическим просвечиванием. По полученным результатам для каждого лабораторного испытания был рассчитан модуль сдвига в различных диапазонах деформаций.

При проведении *акустических испытаний* в условиях трехосного сжатия модуль сдвига определялся из:

$$G_0 = \rho \cdot V_s^2 \text{ (акуст) } , \tag{4}$$

где  $\rho$  – плотность грунта, рассчитанная через массу и линейные размеры образца при заданном уровне сжимающих напряжений после предварительной консолидации, а  $V_s \text{ (акуст)}$  – скорость сдвиговой волны:

$$V_s \text{ (акуст)} = \frac{h}{t} , \tag{5}$$

где  $h$ -высота образца,  $t$ -время прохождения волны.

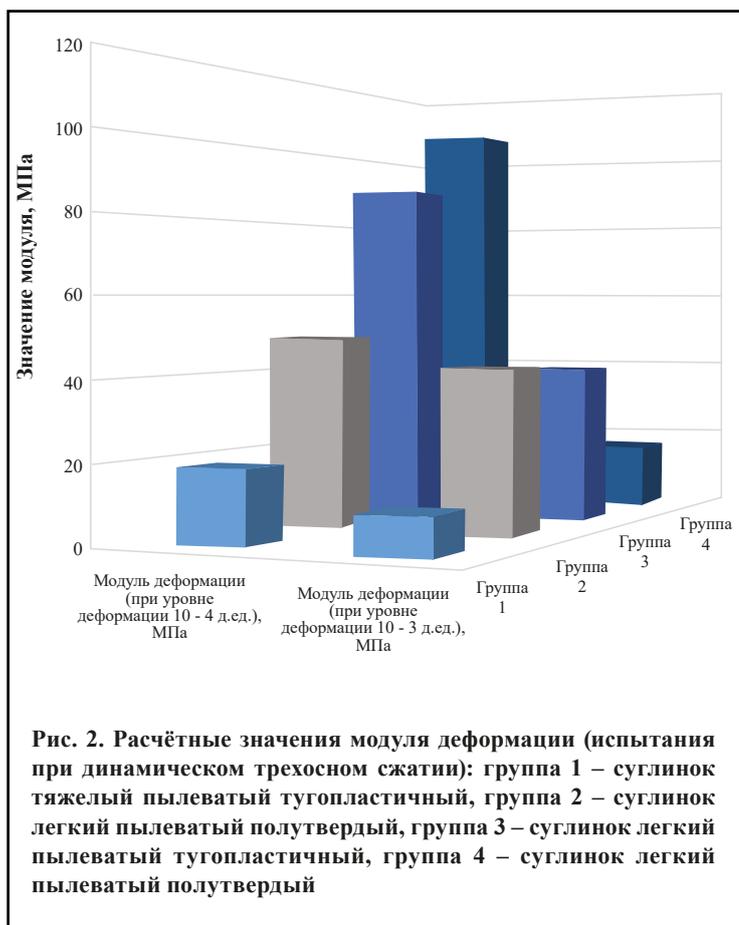
Поскольку деформация сдвига при прохождении сдвиговой волны непосредственно не измеряется, то она была принята равным предельному значению, которое не превышает  $10^{-6}$  д.е. [7]

При проведении *малоамплитудных динамических испытаний на резонансной колонке* модуль сдвига определялся по формуле:

| Значения модулей деформации в различных диапазонах деформаций, по данным разных видов испытаний |                              |                              |                        |
|---|------------------------------|------------------------------|------------------------|
| Суглинок легкий пылеватый полутвердый   |                              |                              |                        |
| Резонансная колонка   |                              | Статическое трехосное сжатие |                        |
| Деформация сдвига, д.е.   | Модуль сдвига, МПа           | Осевая деформация, д.е.      | Модуль деформации, МПа |
| 0.00006   | 136.6                        | -                            | -                      |
| 0.00008   | 131.8                        | -                            | -                      |
| 0.00012   | 127.0                        | 0.00023                      | 75.6                   |
| 0.00015   | 122.4                        | 0.00031                      | 70.8                   |
| 0.00020   | 117.9                        | 0.00040                      | 65.1                   |
| 0.00027   | 106.9                        | 0.00055                      | 63.3                   |
| 0.00039   | 98.5                         | 0.00079                      | 57.2                   |
| 0.00049   | 90.5                         | 0.00098                      | 51.2                   |
| 0.00059   | 82.8                         | 0.00119                      | 48.9                   |
| 0.00070   | 75.4                         | 0.00138                      | 45.6                   |
| 0.00081   | 70.2                         | 0.00163                      | 42.7                   |
| 0.00095   | 65.0                         | 0.00189                      | 40.4                   |
| -   | -                            | 0.01000                      | 17.3                   |
| -   | -                            | 0.02000                      | 10.6                   |
| -   | -                            | 0.03000                      | 7.9                    |
| -   | -                            | 0.04000                      | 6.3                    |
| -   | -                            | 0.06000                      | 4.5                    |
| -   | -                            | 0.08000                      | 3.6                    |
| Динамическое трехосное сжатие   |                              |                              |                        |
| Осевая деформация, д.е.   | Модуль общей деформации, МПа |                              |                        |
| 0.00071   | 106.8                        |                              |                        |
| Осевая деформация, д.е.   | Модуль общей деформации, МПа |                              |                        |
| 0.00978   | 17.2                         |                              |                        |

$$G = \rho \cdot V_s^2 \text{ (рез) } , \tag{6}$$

где  $\rho$  – плотность грунта (рассчитанная аналогично акустическим испытаниям),  $V_s \text{ (рез)}$  — скорость сдвиговой волны при резонансе. Диапазон исследованных сдвиговых деформаций  $10^{-5}$ - $10^{-3}$ .

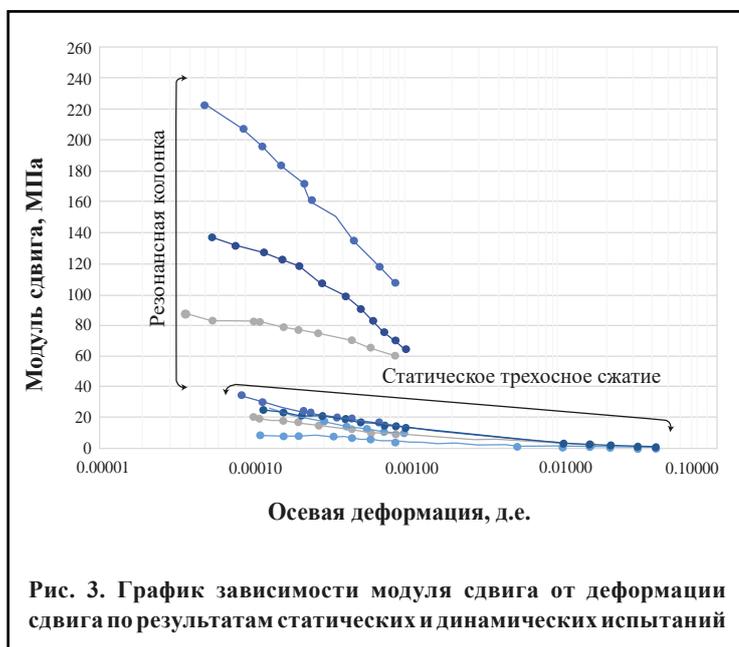


**Рис. 2.** Расчётные значения модуля деформации (испытания при динамическом трехосном сжатии): группа 1 – суглинок тяжелый пылеватый тугопластичный, группа 2 – суглинок легкий пылеватый полутвердый, группа 3 – суглинок легкий пылеватый тугопластичный, группа 4 – суглинок легкий пылеватый полутвердый

При проведении *статических и динамических трехосных испытаний* модуль сдвига определялся пересчётом из выражения:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \quad (7)$$

где  $E$  – модуль линейной деформации (рассчитанный через отношение напряжений и осевых деформаций),  $\nu$  — коэффициент Пуассона, полученный из



**Рис. 3.** График зависимости модуля сдвига от деформации сдвига по результатам статических и динамических испытаний

акустических испытаний по значениям скоростей продольных ( $V_p$ ) и поперечных ( $V_s$ ) волн:

$$\nu = \frac{(V_p^2 - 2V_s^2)}{2(V_p^2 - 2V_s^2)} \quad (8)$$

и полагаемый постоянным во всем диапазоне достигнутых сдвиговых деформаций, что соответствует подходу, использованному в модели HSSmall [3, 9].

Значение сдвиговой деформации при трехосном сжатии, рассчитывается как:

$$\gamma = \epsilon_1 - \epsilon_3 \quad (9)$$

где  $\epsilon_1$  – осевая деформация,  $\epsilon_3$  – радиальная деформация. И для недренарованных условий:

$$\gamma = 0,5\epsilon_1 \quad (10)$$

### Полученные результаты и их обсуждение

Сравнительная характеристика деформационных свойств исследованных глинистых грунтов по данным статических и динамических лабораторных испытаний позволила выявить следующие закономерности.

**1. Модули деформации грунта закономерно снижаются с увеличением достигнутой в испытании деформации вне зависимости от вида этого испытания.**

Анализ результатов показывает, что с увеличением уровня деформации грунта значение модулей деформации закономерно снижается для всех исследованных грунтов, независимо от выбранного метода лабораторных испытаний (табл. 2, рис. 2), что согласуется с известной зависимостью жесткости грунта от величины достигнутой деформации (рис. 1). Диапазон наших испытаний охватывает в основном центральную — наиболее крутую — часть этой зависимости (рис. 3). При этом наибольшее снижение модуля деформации отмечается в диапазоне деформации  $10^{-4}$ – $10^{-2}$  д.е. Именно в этом интервале начинается взаимное смещение частиц, сопоставимое с их размерами, что существенно ослабляет величину структурных связей в грунте и приводит к основной потере жесткости.

**2. Вид испытаний может существенно влиять на абсолютное значение модуля деформации при одном и том же ее уровне.**

Представим результаты всех видов проведенных лабораторных испытаний в виде серии модулей сдвига, посчитанных в различных диапазонах деформаций. Анализ представленных таким образом данных показал, что максимальное значение модуля сдвига ( $G_0$ ) во всех случаях наблюдается при акустических измерениях в условиях трёхосного сжатия с акустическим просвечиванием (рис. 4), а минимальные — в условиях статического трехосного сжатия.

Таким образом, нелинейность параметров жесткости проявляется в дисперсных грунтах уже при деформациях в диапазоне  $10^{-6}$ – $10^{-5}$ . Модули сдвига по результатам статических и динамических трехосных испытаний ниже их значений, полученных с помощью испытаний на резонансной колонке в том же диапазоне сдвиговых деформаций, хотя должны бы были быть такими же (рис. 5).

Это связано, во-первых, с разной точностью измерения деформаций образца во время приложения нагрузки при разных типах испытаний. Во-вторых, модуль сдвига по результатам трехосного сжатия рассчитывался из модуля линейной деформации в соответствии с формулами теории упругости и при условии неизменного значения коэффициента Пуассона, что не обосновано экспериментально.

В-третьих, в резонансной колонке сдвиговые деформации измеряются непосредственно, а в приборе статического и динамического трехосного сжатия контролируются осевые линейные перемещения, которые пересчитываются в сдвиговые деформации через известные объемные.

Результатом накопления ошибки между различными методами может стать различие величины искомого модуля сдвига на порядок. Таким образом, каждый из представленных лабораторных методов может использоваться для определения деформационных свойств дисперсных грунтов, но имеет свои погрешности и допущения. Выбор лабораторного метода для определения деформационных свойств должен быть привязан к решению конкретной задачи.

**3. При научных исследованиях и для решения практических задач поведения грунтов численным моделированием представляет интерес надежное описание изменения их жесткости в широком диапазоне деформаций — от  $10^{-6}$  до целых процентов.**

Для описания кривой деградации модуля сдвига часто используют гиперболическую зависимость Дж. Сантоса и А. Коррейя, которая выражена формулой (3), а в качестве показателей экспериментально полученные значения  $G_0$  и  $\gamma_{0.7}$ .

Для того чтобы обеспечить количественную характеристику жесткости и ее снижения, используют следующие параметры.

Эта зависимость хорошо зарекомендовали себя, в частности, при разработке моделей грунта, учитывающих повышение жесткости в диапазоне малых деформаций [4, 11].

Показано [4], что такая зависимость очень хорошо согласуется с экспериментальными данными до деформаций порядка  $10^{-3}$ .

Акустические измерения в отдельности позволяют определять только модуль сдвига  $G_0$ , а определение пороговой деформации  $\gamma_{0.7}$  предполагает высокоточное измерение деформации образца, что невозможно при акустическом просвечивании, поскольку уровень генерируемых им деформаций неизменен. В результате использования пары изгибных элементов возможны две ситуации.

В некоторых случаях расчет снижения жесткости

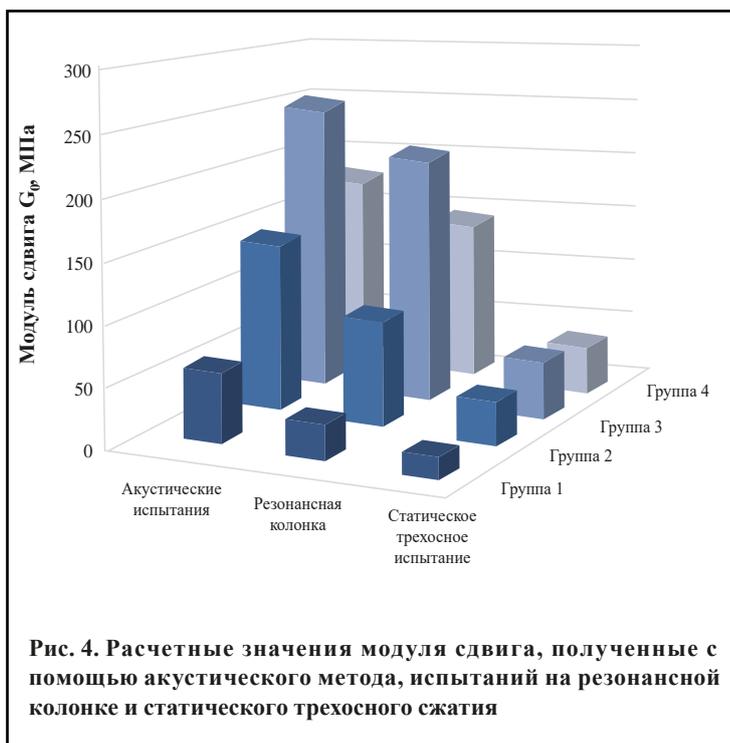


Рис. 4. Расчетные значения модуля сдвига, полученные с помощью акустического метода, испытаний на резонансной колонке и статического трехосного сжатия

по ее максимальному значению, принятому по результатам акустических измерений (рис. 6, а), позволяет получить очень хорошее совпадение с другим типом эксперимента, а значит, и адекватно моделировать поведение грунта при малых деформациях.

В других случаях, когда разница в значениях  $G_0$  по данным разных измерений слишком велика, может быть затруднительно определить пороговую деформацию сдвига (рис. 6, б). Напротив, приняв за  $G_0$  максимальное значение по данным испытаний на резонансной колонке, удастся однозначно определить пороговую деформацию и провести корректный

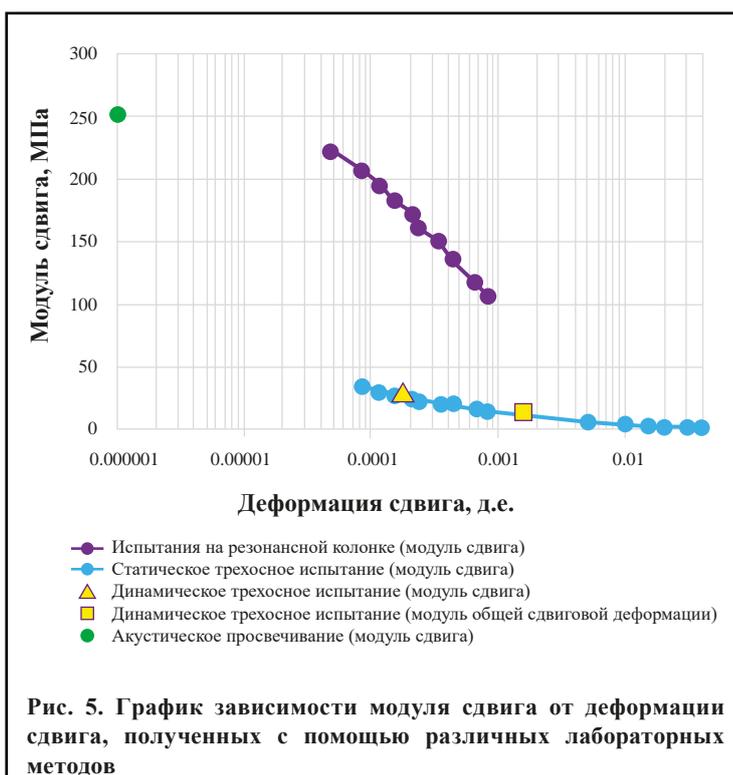
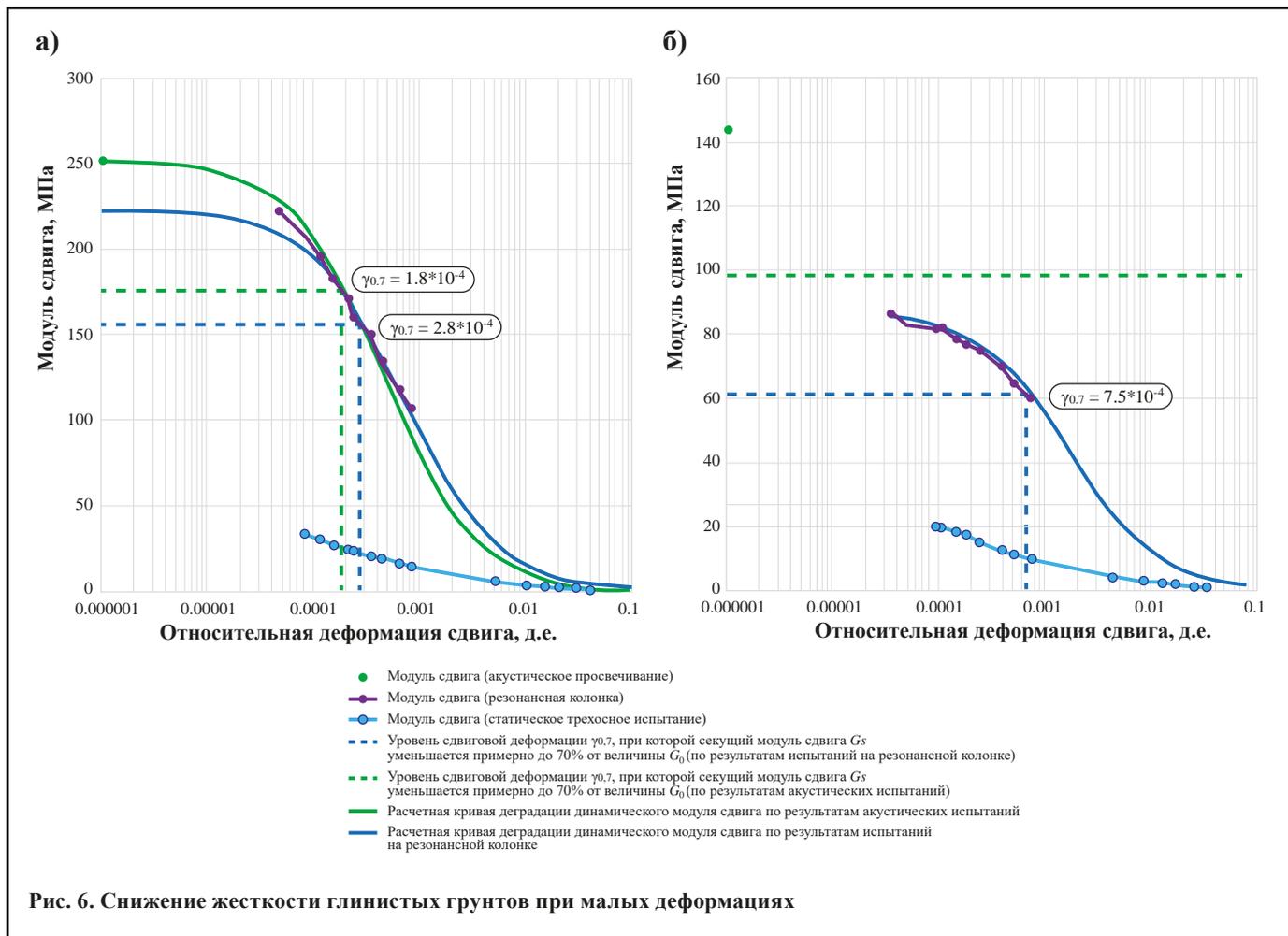


Рис. 5. График зависимости модуля сдвига от деформации сдвига, полученных с помощью различных лабораторных методов



расчет жесткости во всем диапазоне малых деформаций, не выходя в область сверхмалых значений.

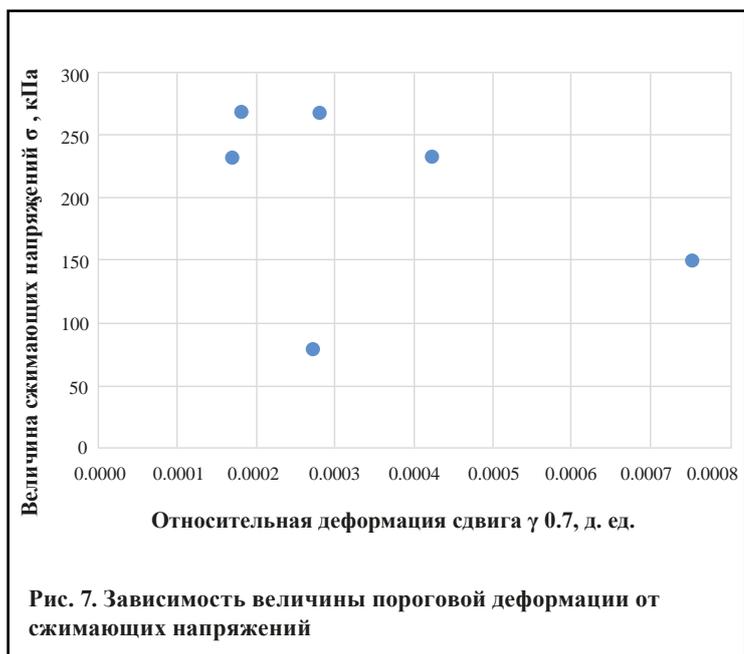
Сопоставление экспериментальных данных с расчетными кривыми снижения модуля сдвига в широком диапазоне деформаций, приведенных выше, показывает следующее.

1. Ключевым моментом получения зависимости, адекватно описывающей деградацию жесткости

грунта вплоть до больших деформаций, является надежное экспериментальное определение пороговой деформации  $\gamma_{0.7}$  на уровне 70% величины  $G_0$ . По нашим данным, эта деформация для исследованных грунтов находится в диапазоне  $(1,8-7,5) \cdot 10^{-4}$ . Этот диапазон достаточно широк, учитывая близость состава и свойств грунтов в выборке. Возможно, что пороговая деформация зависит также от уровня сжимающих напряжений (рис.7), что согласуется с данными и для других грунтов [1], однако этот вопрос требует дополнительного изучения.

2. Для расчета деградации кривой модуля сдвига за значение  $G_0$  целесообразно использовать данные, полученные с помощью акустического метода, в случае, когда соотношение модуля сдвига  $G_0$  по данным с резонансной колонки и по данным с изгибных элементов превышает 0,88. Тогда расчетная кривая дает наилучшее соответствие расчетной жесткости с измеренными значениями по данным лабораторных испытаний. В остальных случаях для корректного описания поведения грунта при малых деформациях за значение  $G_0$  следует принимать максимальное значение модуля по данным, полученным методом резонансной колонки.

3. Проведенный анализ показывает, что расчетные значения модулей по таким кривым деградации при деформациях, составляющих даже уже первые проценты, хорошо согласуются с их экспериментальными значениями, полученными в условиях трехосного сжатия. Причина этого



заключается в том, что при таком уровне деформаций погрешности их внешнего измерения становятся пренебрежимо малы в относительном выражении. Следовательно, испытания на резонансной колонке при деформациях сдвига  $10^{-5}$ – $10^{-3}$ , позволяют обеспечить математическое описание изменения жесткости глинистого грунта во всем практически важном диапазоне деформаций вплоть до разрушения в рамках одной гиперболической модели.

## Выводы

1. Модули деформации исследованных грунтов закономерно снижаются с увеличением достигнутой в испытании деформации вне зависимости от вида этого испытания, что согласуется с известными представлениями о нелинейности деформирования грунтов. При этом наибольшее снижение жесткости отмечается в диапазоне относительной деформации  $10^{-4}$ – $10^{-2}$ , что обусловлено ослаблением структурных связей в грунте при смещении частиц, сопоставимых с размером преобладающих фракций.
2. Нелинейность параметров жесткости проявляется в дисперсных грунтах уже при относительных деформациях в диапазоне  $10^{-6}$ – $10^{-5}$ , поскольку начальное значение модуля сдвига, определенное акустическим методом, оказывается всегда выше, чем при использовании любых других средств высокоточных лабораторных измерений.
3. Вид испытаний существенно влияет на

определяемое значение модуля деформации в одном и том же ее диапазоне. Это обусловлено как разными погрешностями измерения деформаций, так и различиями в принципе их измерения при использовании различной аппаратуры.

4. Установлено, что пороговая деформация сдвига исследованных глинистых грунтов, при которой начальная жесткость снижается на 30% ( $\gamma_{0,7}$ ), находится в достаточно широком диапазоне  $(1,8-7,5) \cdot 10^{-4}$  относительных сдвиговых деформаций и, по всей видимости, зависит от величины сжимающих напряжений.

5. Экспериментальное определение максимальной жесткости грунта ( $G_0$  или  $E_0$ ) и величины пороговой деформации сдвига ( $\gamma_{0,7}$ ) позволяет рассчитать модули деформации грунта во всем практически важном диапазоне вплоть до первых процентов. Максимальное значение жесткости может быть получено по данным малоамплитудных динамических испытаний на резонансной колонке либо акустическим просвечиванием. Если значение начального модуля сдвига, определенного акустическим методом, превышает значение, полученное методом резонансной колонки, более чем на 12%, то при расчете кривой деградации жесткости грунта следует пользоваться исключительно данными резонансных испытаний.

*Работа выполнена на оборудовании, приобретенном в рамках реализации Программы развития Московского университета.* 

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вознесенский Е.А., Никитин М.С., Сенцова Е.А. Методические вопросы определения параметров моделей, учитывающих повышение жесткости грунтов при малых деформациях // Геотехника. 2016. № 2. С. 5–16.
2. Вознесенский Е.А. Поведение грунтов при динамических нагрузках: учебное пособие. М.: Изд-во МГУ, 1997. 288 с.
3. Atkinson J.H. Non-linear soil stiffness in routine design. Geotechnique. 2000. Vol. 50, № 5. P. 487–508.
4. Benz T. Small strain stiffness of soils and its numerical consequences. PhD Dissertation. Universitat Stuttgart, 2007, 187 p.
5. Hardin B.O., Drnevich V.P. Shear modulus and damping in soils: Design equations and curves. ASCE Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division. 1972. Vol. 98. P. 667–692.
6. Mair R.J. Developments in geotechnical engineering research: application to tunnels and deep excavations. Proceedings on Institution of Civil Engineers, Civil Engineering. 1993. P. 27–41.
7. Mikhaltsevitch V., Lebedev M., Gurevich B. Low-frequency measurements of the mechanical parameters of sandstone with low permeability, 2012.
8. Kondner R.L., Zelasko J.S. A hyperbolic stress-strain formulation for sands. In 2<sup>nd</sup> Pan. Am. Conf. Soil Mech. Found. Eng., Brazil, 1963, vol. 1, P. 289–394.
9. PLAXIS 2D, Material models manual, Plaxis bv, AN Delft, The Netherlands.
10. Santos J.A., Correia A.G. Reference threshold shear strain of soil. Its application to obtain a unique strain-dependent shear modulus curve for soil. In 15<sup>th</sup> Int. Conf. SMGE, Instambul, 2001, vol. 1, P. 267–270.
11. Schanz T., Vermeer P.A., Bonnier P.G. Beyond 2000 in computational geotechnics (chapter formulation and verification of the Hardening-Soil Model). Rotterdam: Balkema, 1999. P. 281–290.