

УДК 57.045; 57

ПРИМЕНЕНИЕ НОВОГО МЕТОДА СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ УСТАНОВЛЕНИЯ СИНХРОННОСТИ ПРОЦЕССОВ В ГЕЛИОБИОЛОГИИ

© 2017 г. В.А. Ожередов, Т.К. Бреус

Институт космических исследований РАН, г. Москва, Россия

До настоящего времени основным носителем информации в биологических и гелиогеофизических сигналах считалась сумма периодических вариаций. Однако далеко не все представляющие интерес временные ряды содержат доминирующие периодические компоненты. Используемый в данной работе релаксационный анализ позволяет обобщить «спектральный» формализм на сигналы, не представимые в виде суммы ограниченного числа квазипериодических компонентов. Разработан алгоритм фильтрации шумов и длиннопериодных трендов, основанный на разделении исходного сигнала на быстро и медленно релаксирующие компоненты, и доказана основная теорема, гарантирующая его работоспособность. Описан метод построения ортонормированного базиса, компоненты которого обладают строго определенным временем релаксации. Результат разложения сигнала по этому базису мы называем релаксационным спектром. С его помощью возможно разделение временного ряда на сигнал и шум или осцилляцию и тренд в случае отсутствия адекватных фурье- или стохастических моделей. На основе автоматического алгоритма выделения достоверных спектральных пиков популяционных и гелиогеомагнитных временных рядов и выявления сходных пиков через меру Сьеренсена подтверждена высказанная гелиобиологами ранее гипотеза о том, что наиболее существенно на физиологические показатели биологических объектов (в том числе популяции в целом) влияют геомагнитные ритмы с периодами вблизи 7 и 9 сут.

Ключевые слова: обобщение «спектрального» формализма, фильтрация сигнала, генерация ортонормированного базиса, гелиобиофизика.

PACS 02.30-f

Введение

В гелиобиофизических исследованиях основное внимание уделяется поиску связей вариаций физиологических параметров с изменениями внешних условий (см., например, [Halberg *et al.*, 2003, 2008a, b; Breus *et al.*, 2008; Халберг и др., 2009; Зенченко и др.,

2013; Cornélissen, 2014]). В частности, эти связи могут проявлять себя в сходстве скоростей протекания биологических и гелиогеофизических процессов, что формально означает совпадение спектральных пиков временных рядов, разложенных по некоторому подходящему по контексту задачи базису. Поэтому в качестве основного носителя информации в биологических и гелиогеофизических сигналах часто рассматривают сумму периодических вариаций (см., например, [Vladimirskii et al., 1995; Владимирский, 2016]). Подобные представления лежат, например, в основе гелиобиологии и хрономедицины. Для выявления скрытых периодичностей временных рядов обычно используют спектральный анализ Фурье.

Термин «спектр» обозначает совокупность квадратов коэффициентов разложения сигнала по некоторому базису. Разложение по «базису», как известно, – это поворот системы координат. Хорошая сходимость при разложении, т.е. удовлетворительная аппроксимация малым числом базисных компонент, достигается при условии, что рассматриваемые сигналы хорошо проецируются на некоторое малоразмерное подпространство.

Если «физика» процессов, порождающих временные ряды, неизвестна, то выполнение этого условия гарантировать нельзя. Более того, практически все сложные системы (такие как магнитосфера и ее характеристики или биологический организм) порождают временные ряды, которые аналогично белому шуму равномерно заполняют пространство размерности их длины. Поэтому для этих рядов согласно известному критерию, что лучшим является то разложение, которое дает лучшую сходимость ряда (т.е. быстрее удастся найти коэффициенты разложения), любой базис будет одинаково плохим.

Ограничением использования фурье-анализа является также тот факт, что далеко не все представляющие интерес временные ряды содержат доминирующие периодические компоненты (см., например, рис. 1 с изображением вариаций такого физиологического параметра сердечно-сосудистой человека, как скорость распространения пульсовой волны (СРПВ) [Бреус и др., 2010; Gurfinkel et al., 2012]). Для анализа сходства скоростей изменения отдельных компонентов таких временных рядов, по-видимому, необходим

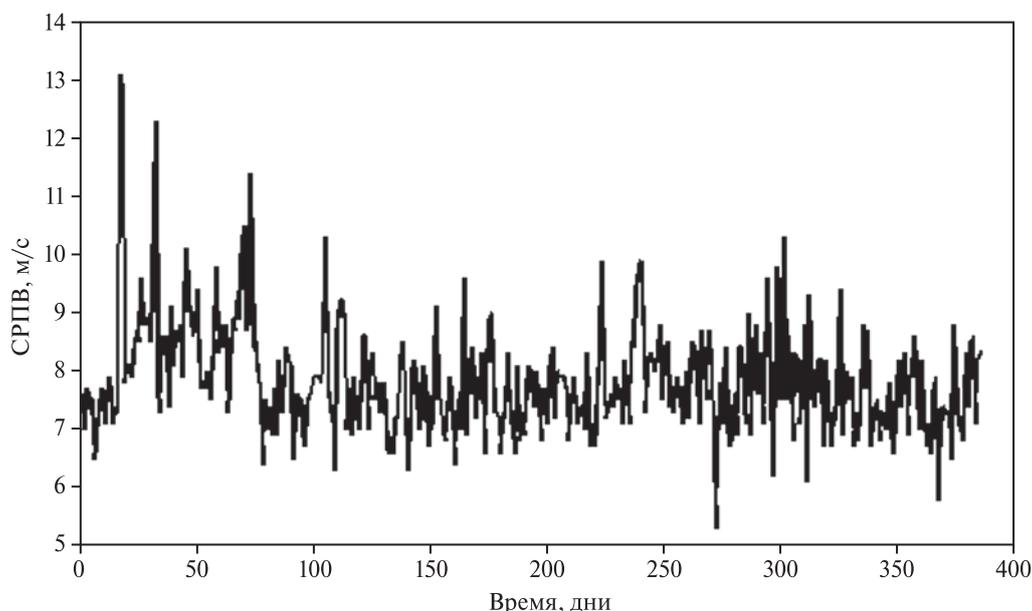


Рис. 1. Ежесуточный ход скорости распространения пульсовой волны (СРПВ) сердечно-сосудистой системы человека как пример абсолютно аперийного временного ряда

аппарат спектрального анализа, основанный на разложении по аperiodическому базису. Традиционно используемые в хронобиологии базисы Фурье и вейвлеты таковыми не являются.

Цель настоящей работы – разработка релаксационного анализа, позволяющего придать любому временному ряду аддитивную количественную характеристику, связанную с быстротой изменения параметра, представленного временным рядом. Для этого рассмотрено построение полного базиса, позволяющего дать исчерпывающее представление временного ряда через сумму компонентов с заранее заданными скоростями изменения, трактуемыми через *время релаксации* – промежуток, за который характерное изменение наблюдаемого параметра становится сравнимым с его вариацией за весь период наблюдений. Именно эта характеристика временного ряда является наиболее важной для исследования синхронности процессов в гелиобиологии. Она не имеет отношения к понятию ритмичности сигнала, но вместе с тем, как будет показано ниже, *период является частным случаем времени релаксации*.

Подчеркнем, что в статье не предлагается методика (методика появляется тогда, когда есть четкая постановка задачи и критерий качества ее решения), а лишь описываются свойства некоторого (векторного) параметра временного ряда, а именно его релаксационного спектра.

1. Время релаксации и его представление через квадратичную форму

Предположим, что имеется временной ряд $[x^1, x^2, \dots, x^N]$, содержащий $N = N_0$ отсчетов. Последовательность разностей (отсчетов временного ряда) $(k+1)$ -го порядка (или k -х разностей) является новым временным рядом, рекурсивно определяемым через исходный ряд следующим образом:

$$\Delta_{k+1}^i = \Delta_k^{i+1} - \Delta_k^i; \quad k = 1, 2, \dots; \quad i = 1, 2, \dots, N_k - 1; \quad \Delta_0^i \equiv x^i,$$

где N_k – число отсчетов временного ряда разностей k -го порядка. Очевидно, что $N_k = N_0 - k$, и для статистической достоверности выводов имеет смысл рассматривать только такие разности, для которых $k \ll N_0$. Соответственно через x будем обозначать исходный временной ряд как вектор и через Δ_k – векторное представление его k -й разности; k -й степенью вариабельности ряда будем называть отношение

$$V_k \equiv \frac{\|\Delta_k\|^2}{\|\Delta_0\|^2}. \quad (1)$$

Параметр (1) характеризует среднеквадратичную величину изменения k -й разности x за один отсчет по сравнению со среднеквадратичным размахом всего ряда, и чем эта величина больше, тем меньшего времени релаксации следует ожидать. Будем полагать, что время релаксации является однозначной функцией параметра V_k . Мы используем синусоидальный сигнал для нахождения явного вида этой зависимости (символ J вводится для обозначения мнимой единицы).

Рассмотрим синусоиду $x^i = A \cos(\omega i + \varphi)$. Тогда

$$\begin{aligned} \Delta_1^i &= A \cos(\omega i + \omega + \varphi) - A \cos(\omega i + \varphi) = -2A \sin \frac{\omega}{2} \sin \left(\omega i + \varphi + \frac{\omega}{2} \right) = \\ &= 2A \sin \frac{\omega}{2} \cos \left(\omega i + \varphi + \frac{\omega + \pi}{2} \right), \end{aligned}$$

т.е. первая разность синусоиды – это синусоида с той же частотой, но с измененными амплитудой и фазой, причем изменение амплитуды определяется изменением частоты. Отсюда следует, что все последующие разности описываются формулой

$$\Delta_k^i = \left(\frac{2 \sin \omega}{2} \right)^k A \cos \left(\omega i + \varphi + k \frac{\omega + \pi}{2} \right). \quad (2)$$

Таким образом, нам достаточно получить выражение для квадрата нормы вектора Δ_0 , из которого тривиально следует определение $\|\Delta_k\|^2$:

$$\begin{aligned} \|\Delta_0\|^2 &= \sum_{i=1}^N A^2 \cos^2(\omega i + \varphi) = \frac{A^2}{4} \sum_{i=1}^N (e^{J\varphi + J\omega i} + e^{-J\varphi - J\omega i})^2 = \\ &= \frac{A^2}{4} \left[\sum_{i=1}^N e^{2J\varphi + 2J\omega i} + \sum_{i=1}^N e^{-2J\varphi - 2J\omega i} + 2N \right] = \frac{NA^2}{2} + \frac{A^2}{4} \left[e^{2J\varphi} \sum_{i=1}^N e^{2J\omega i} + e^{-2J\varphi} \sum_{i=1}^N e^{-2J\omega i} \right]. \end{aligned}$$

Суммы $\sum_{i=1}^N e^{2J\omega i}$ и $\sum_{i=1}^N e^{-2J\omega i}$ представляют собой суммы геометрической прогрессии со знаменателем $e^{\pm 2J\omega}$, поэтому

$$\sum_{i=1}^N e^{\pm 2J\omega i} = \frac{e^{\pm 2J\omega(N+1)} - e^{\pm 2J\omega}}{e^{\pm 2J\omega} - 1}. \quad (3)$$

Подставим (3) в выражение для $\|\Delta_0\|^2$:

$$\begin{aligned} \|\Delta_0\|^2 &= \frac{NA^2}{2} + \frac{A^2}{4} \left[\frac{e^{2J\varphi} e^{2J\omega N} e^{2J\omega} - e^{2J\varphi} e^{2J\omega}}{e^{2J\omega} - 1} + \frac{e^{-2J\varphi} e^{-2J\omega N} e^{-2J\omega} - e^{-2J\varphi} e^{-2J\omega}}{e^{-2J\omega} - 1} \right] = \\ &= \frac{NA^2}{2} + \frac{A^2}{4} \frac{\cos 2(\omega N + \varphi) - \cos 2(\omega N + \omega + \varphi) - \cos 2\varphi + \cos 2(\omega + \varphi)}{1 - \cos 2\omega} = \\ &= \frac{NA^2}{2} + \frac{A^2}{4} \frac{\sin(2\omega N + 2\varphi + \omega) \sin \omega - \sin(\omega + 2\varphi) \sin \omega}{\sin^2 \omega} = \\ &= \frac{NA^2}{2} + \frac{A^2}{2} \frac{\sin \omega N}{\sin \omega} \cos(\omega(N+1) + 2\varphi). \end{aligned} \quad (4)$$

Сложная зависимость (4), однако, допускает существенное упрощение, если рассматривать только сигналы с так называемым истинно-синусоидальным поведением: с одной стороны, частота ω должна быть достаточно большой, чтобы на интервале $[1, 2, \dots, N]$ укладывалось существенное количество периодов сигнала и последний был бы похож именно на синусоиду, а не на низкочастотный тренд, с другой – ω должна быть сильно меньше частоты Найквиста.

Квадрат нормы $\|\Delta_0\|^2$ представляет собой сумму двух компонент (4). Сложным поведением обладает только вторая из них, которую мы будем обозначать через E :

$$E = \frac{A^2}{2} \frac{\sin \omega N}{\sin \omega} \cos(\omega(N+1) + 2\varphi).$$

На рис. 2 показано поведение E при изменении угловой частоты ω в ситуации, близкой к наихудшей, т.е. при относительно малом значении числа отсчетов временного

ряда $N = 50$. Видно, что для частот, далеких от нуля и границы Найквиста, т.е. при истинно-синусоидальном поведении сигнала,

$$E \ll \frac{NA^2}{2}.$$

При больших значениях N величина E еще быстрее убывает при удалении от нуля и границы Найквиста. Поэтому вторым слагаемым в (4) будем пренебрегать.

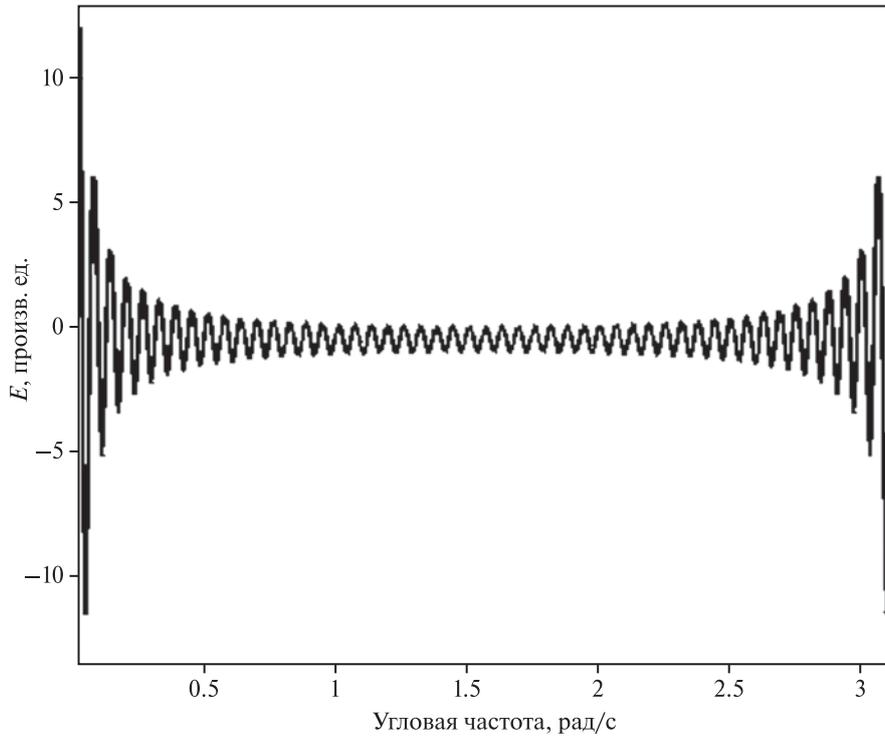


Рис. 2. Поведение наиболее сложно зависящей от частоты и начальной фазы синусоиды компоненты выражения для $\|\Delta\|^2$ при изменении частоты синусоидального сигнала

Окончательно имеем, что

$$\|\Delta_0\|^2 \approx \frac{NA^2}{2}.$$

Таким образом, с учетом (2) для $\|\Delta_k\|^2$ имеем равенство

$$\|\Delta_k\|^2 = A^2 \left(2 \sin \frac{\omega}{2} \right)^{2k} \frac{N}{2},$$

и для k -й степени вариабельности ряда получаем формулу

$$V_k = \frac{\|\Delta_k\|^2}{\|\Delta_0\|^2} = \left(2 \sin \frac{\omega}{2} \right)^{2k}.$$

Потребуем от сигнала с истинно-синусоидальным поведением достаточной гладкости (в противном случае его частота не будет отражать вариабельность V_k). Гладкость означает, что модули первых разностей временного ряда несравнимо меньше его амплитуды. Из (2) (при $k = 1$) следует, что первые разности временного ряда составляют

также синусоидальный временной ряд, амплитуда которого в $\left|2\sin\frac{\omega}{2}\right|$ отличается от амплитуды исходного временного ряда, откуда с учетом гладкости получаем, что

$$\left|2\sin\frac{\omega}{2}\right| \ll 1;$$

$$2\sin\frac{\omega}{2} \approx \omega.$$

Из последнего равенства следует определение угловой частоты и времени релаксации сигнала:

$$\begin{cases} \omega \equiv \left(\frac{\|\Delta_k\|^2}{\|\Delta_0\|^2}\right)^{\frac{1}{2k}}; \\ T \equiv 2\pi \left(\frac{\|\Delta_0\|^2}{\|\Delta_k\|^2}\right)^{\frac{1}{2k}}. \end{cases} \quad (5)$$

Дальнейшее изложение будет основываться на математическом аппарате собственных значений. Поэтому нам потребуется выражение угловой частоты и времени релаксации через квадратичную форму от исходного сигнала x .

Введем определение операторов левого и правого сдвига B_N^- и B_N^+ . Для $\forall x \in \square^N$: $B_N^-x = [x^1, x^2, \dots, x^{N-1}]$, $B_N^+x = [x^1, x^2, \dots, x^N]$. Нижний индекс оператора показывает размерность пространства входной переменной – это важно для дальнейших выкладок. Приведем примеры матричных выражений B_N^- и B_N^+ для случая временного ряда $N=6$:

$$B^- \equiv \begin{pmatrix} 1 & 0 & 00 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 00 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 00 & 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad B^+ \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 & 00 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 00 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 00 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда можно получить матричную запись рекурсивного соотношения между разностями двух следующих друг за другом порядков. Поскольку $\Delta_{k+1}^i = \Delta_k^{i+1} - \Delta_k^i$, то

$$\Delta_{k+1} = B_{N-k}^+ \Delta_k - B_{N-k}^- \Delta_k = (B_{N-k}^+ - B_{N-k}^-) \Delta_k.$$

Следовательно,

$$\|\Delta_{k+1}\|^2 = \Delta_{k+1}^T \Delta_{k+1} = \Delta_k^T (B_{N-k}^+ - B_{N-k}^-)^T (B_{N-k}^+ - B_{N-k}^-) \Delta_k. \quad (6)$$

Последовательно применяя (6) ко всем разностям исходного временного ряда от 1-й до k -й и учитывая, что $\Delta_0 \equiv x$, получаем явное выражение для квадрата нормы вектора Δ_k :

$$\|\Delta_k\|^2 = x^T \prod_{\alpha=0}^{k-1} (B_{N-\alpha}^+ - B_{N-\alpha}^-)^T \prod_{\alpha=k-1}^0 (B_{N-\alpha}^+ - B_{N-\alpha}^-) x. \quad (7)$$

Матрицу квадратичной формы (7) будем называть R-матрицей (R-matrix) порядка k , т.е.

$$R[k] \equiv \prod_{\alpha=0}^{k-1} (B_{N-\alpha}^+ - B_{N-\alpha}^-)^T \prod_{\alpha=k-1}^0 (B_{N-\alpha}^+ - B_{N-\alpha}^-).$$

Обратим особое внимание на порядок перемножения матриц в (7) – в первом произведении он прямой, во втором – обратный.

Таким образом, выражения для угловой частоты и времени релаксации k -го порядка переписываются в виде:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_k \equiv \left(\frac{x^T R[k] x}{\|x\|^2} \right)^{\frac{1}{2k}} ; \\ T_k \equiv 2\pi \left(\frac{\|x\|^2}{x^T R[k] x} \right)^{\frac{1}{2k}} . \end{array} \right. \quad (8)$$

Определение (5) выведено исходя из рассмотрения синусоидального сигнала, тогда как x в общем случае может содержать постоянный уровень или полиномиальный тренд степени меньше k , что приведет к бессмысленности определения (8). Первая разность полинома порядка n с отсчетами $y^i = \sum_{\alpha=0}^n c_{\alpha} (i)^{\alpha}$ представляет собой полином на единицу меньшего порядка и, таким образом, его $(n + 1)$ -я разность равна нулю:

$$\begin{aligned} \Delta_1^i &\equiv y^{i+1} - y^i = \sum_{\alpha=0}^n c_{\alpha} (i+1)^{\alpha} - \sum_{\alpha=0}^n c_{\alpha} (i)^{\alpha} = \\ &= c_{\alpha} (i)^{\alpha} + \mathbb{P}_{n-1}(i) + \sum_{\alpha=0}^{n-1} c_{\alpha} (i+1)^{\alpha} - c_{\alpha} (i)^{\alpha} - \sum_{\alpha=0}^{n-1} c_{\alpha} (i)^{\alpha} = \\ &= \mathbb{P}_{n-1}(i) + \sum_{\alpha=0}^{n-1} c_{\alpha} (i+1)^{\alpha} - \sum_{\alpha=0}^{n-1} c_{\alpha} (i)^{\alpha}, \end{aligned}$$

где $\mathbb{P}_{n-1}(i)$ введено для обозначения полинома $(n - 1)$ -го порядка. Следовательно, $\|\Delta_{n+1}\|^2 = y^T R[n+1]y = 0$, y принадлежит нуль-пространству оператора $R[n+1]$ и добавление его к сигналу x не изменяет числитель (знаменатель) верхней (нижней) формулы в определении (8), зато существенно влияет на значение квадрата нормы $\|x\|^2$. Поэтому сигналы с ненулевым средним уровнем и/или полиномиальным трендом порядка вплоть до $(k - 1)$ -го будут иметь неправдоподобно завышенные времена релаксации.

Для разрешения этого парадокса полезно привлечь аппарат собственных значений. Матрица $R[k]$ симметрична (это тривиально следует из ее определения) и положительна в том смысле, что для $\forall \xi \in \square^N \quad \xi^T R[k] \xi \geq 0$, поскольку последнее есть квадрат нормы вектора k -х разностей сигнала ξ . Следовательно, $R[k]$ имеет полный собственный базис $\{\varphi_j\}_{j=1,2,\dots,N}$, соответствующий набору собственных значений $\{\lambda_j\}_{j=1,2,\dots,N}$ в пространстве \square^N , причем, исходя из изложенного выше, любой полиномиальный тренд степени меньше k представим в виде линейной комбинации собственных векторов с нулевыми собственными значениями. Таким образом, все пространство \square^N распадается на прямое произведение (естественно, в координатах собственного базиса матрицы $R[k]$) линейных

оболочек ненулевых и нулевых собственных векторов $R[k]$. Проекцию исходного сигнала на линейную оболочку нулевых собственных векторов $R[k]$ будем называть *неустраняемым трендом* x_0 . По определению, неустраняемый тренд имеет бесконечное время релаксации, а поэтому имеет смысл переписать (исправленное) определение (8) в собственных координатах R-матрицы. Если $x = x_0 + \sum_{j=1, \lambda_j \neq 0}^N \xi^j \varphi_j$, то

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_k \equiv \left(\frac{\sum_{j=1, \lambda_j \neq 0}^N (\xi^j)^2 \lambda_j}{\sum_{j=1, \lambda_j \neq 0}^N (\xi^j)^2} \right)^{\frac{1}{2k}} ; \\ T_k \equiv 2\pi \left(\frac{\sum_{j=1, \lambda_j \neq 0}^N (\xi^j)^2}{\sum_{j=1, \lambda_j \neq 0}^N (\xi^j)^2 \lambda_j} \right)^{\frac{1}{2k}} . \end{array} \right. \quad (9)$$

Здесь и далее показателем N будем обозначать число «ненулевых» собственных векторов $R[k]$. Разумеется, определение (9) применимо, только если рассматриваемый сигнал содержит что-нибудь кроме неустраняемого тренда.

При создании метода релаксационного анализа ставилась цель придать любому временному ряду аддитивную количественную характеристику, связанную с быстротой изменения параметра, представленного временным рядом. Таким образом, при разложении рассматриваемого ряда по базису эта характеристика должна была быть выпуклой комбинацией характеристик базисных компонентов, т.е. как бы «средневзвешенной» характеристикой всех базисных компонентов с весами, пропорциональными амплитудным мощностям каждой компоненты. В самом деле, рассмотрим ω_k из формулы (9):

$$\omega_k \equiv \left(\frac{\sum_{j=1, \lambda_j \neq 0}^N (\xi^j)^2 \lambda_j}{\sum_{j=1, \lambda_j \neq 0}^N (\xi^j)^2} \right)^{\frac{1}{2k}} .$$

Перепишем эту формулу в несколько ином виде, возведя обе части в степень $2k$:

$$(\omega_k)^{2k} \equiv \sum_{j=1, \lambda_j \neq 0}^N \frac{(\xi^j)^2}{\sum_{j=1, \lambda_j \neq 0}^N (\xi^j)^2} \lambda_j . \quad (*)$$

С другой стороны, как было показано в начале раздела 3,

$$\omega_k[\varphi_i] \equiv \left(\frac{\sum_{j=1, \lambda_j \neq 0}^N (\xi^j[\varphi_i])^2 \lambda_j}{\sum_{j=1, \lambda_j \neq 0}^N (\xi^j[\varphi_i])^2} \right)^{\frac{1}{2k}} = \left(\frac{(\xi^i[\varphi_i])^2 \lambda_i}{(\xi^i[\varphi_i])^2} \right)^{\frac{1}{2k}} = (\lambda_i)^{\frac{1}{2k}} ,$$

т.е. $\lambda_i = (\omega_k[\varphi_i])^{2k}$. Если интерпретировать каждый коэффициент при собственном значении λ_i в (*) как «вес» базисного компонента w_j (который оказывается пропорциональным его амплитудной мощности), то

$$(\omega_k)^{2k} \equiv \sum_{j=1, \lambda_j \neq 0}^N w_j (\omega_k[\varphi_j])^{2k}.$$

В фурье-анализе временные свойства, такие как частота или период, могут быть приписаны временному ряду только в том случае, если он содержит единственную гармонику, и строго говоря, они присущи исключительно базисным компонентам. В релаксационном анализе функция частоты релаксации $(\omega_k)^{2k}$ определена для любого дискретного эквидистантного сигнала и, кроме того, она является взвешенным средним от этих же функций частоты релаксации каждой базисной компоненты $(\omega_k[\varphi_j])^{2k}$.

Для временного ряда СРПВ, график которого представлен на рис. 1, например, время релаксации 2-го, 3-го и 4-го порядков составляет соответственно 4.5, 4.1 и 3.9 дней.

2. Доказательство разделимости сигнала на существенно неравнозначные по временам релаксации компоненты

Процессы, совместно участвующие в формировании изучаемых временных рядов, чаще всего сильно различаются по скоростям протекания. Последний термин, будучи вполне корректно определенным, скажем, в химической кинетике, является по понятным причинам весьма расплывчатым в научных областях, характеризующихся отсутствием физических моделей (например, в гелиобиологии, экономике и компьютерном зрении). Названный параметр вводится для разложения временного ряда в сумму (некоррелированных по причине независимости рассматриваемых процессов) компонент, количество которых для простоты вычислений ограничено двумя, каждая из которых по отдельности имела бы место, если бы вторая (другой процесс) отсутствовала. Заметим, что под процессом не обязательно подразумевается выделенное именованное в науке и/или обыденности понятие – это может быть совокупность явлений, имеющих сходные скорости протекания. Разложимость исходного сигнала на сумму некоррелированных компонент с сильно различающимися между собой временами релаксации является необходимым условием корректности построения релаксационного спектрального анализа.

Обозначим за x координаты исходного сигнала в этом базисе, а за z – координаты одной из искомым компонент, для определенности – низкочастотной (здесь и далее будет подразумеваться угловая частота релаксации, если не оговорено обратное), и поставим задачу: найти наиболее близкий к x сигнал z , обладающий заданной угловой частотой релаксации $\omega_z < \omega_x$. (Символ ω обозначает частоту временного ряда, стоящего в нижнем индексе.) Таким образом, с формальной точки зрения, имеем проблему на условный минимум:

$$\left\{ \begin{array}{l} \min_z \sum_{i=1}^N (z^i - x^i)^2; \\ \frac{\sum_{i=1}^N (z^i)^2 \lambda^i}{\sum_{i=1}^N (z^i)^2} = \omega_z^{2k}. \end{array} \right. \quad (10)$$

Несмотря на кажущуюся простоту и компактность постановки, аналитическое решение задачи (10) отсутствует, а численное – неоправданно ресурсозатратно. Поэтому в данной работе предлагается разлагать x в сумму компонент z и $x - z$, являющихся решением двухступенчатой оптимизационной задачи. На первом этапе определяется некоторый вектор y , являющийся решением проблемы:

$$\min_z \sum_{i=1}^N (y^i - x^i)^2 + \gamma \sum_{i=1}^N (y^i)^2 \lambda^i; \quad (10a)$$

$$\frac{\sum_{i=1}^N (y^i)^2 \lambda^i}{\sum_{i=1}^N (y^i)^2} = \omega_z^{2k}. \quad (10б)$$

В этом случае ищется минимум достаточно тривиальной квадратичной формы (10a) с параметром $0 \leq \gamma$, удовлетворяющем условию (10б). Следующая теорема проясняет ситуацию по данной задаче.

Теорема 1. Если $\omega_z < \omega_x$ и среди ненулевых значений R-матрицы есть хотя бы два различных, то решение задачи (10a)–(10б) существует и оно единственно. Доказательство данной теоремы см. в Приложении.

На втором этапе алгоритма ищется окончательное решение в виде $z = cy$. Заметим, что такое преобразование оставляет постоянной угловую частоту релаксации:

$$\frac{\sum_{i=1}^N (cy^i)^2 \lambda^i}{\sum_{i=1}^N (cy^i)^2} = \frac{c^2 \sum_{i=1}^N (y^i)^2 \lambda^i}{c^2 \sum_{i=1}^N (y^i)^2} = \omega_z^{2k}.$$

Поэтому оптимизация параметра c приближает z к x , не приводя к нарушению равенства (10б):

$$\begin{aligned} \|cy - x\|^2 &= c\|y\|^2 - 2cx^T y + \|x\|^2 \rightarrow \min; \\ z &= \frac{x^T y}{\|y\|^2} y. \end{aligned} \quad (11)$$

Нетрудно видеть, что разность $v \equiv x - z$ ортогональна найденному сигналу z :

$$(x - z)^T z = \frac{x^T y}{\|y\|^2} \left(x^T - \frac{x^T y}{\|y\|^2} y^T \right) y = \frac{x^T y}{\|y\|^2} \left(x^T y - \frac{x^T y}{\|y\|^2} \|y\|^2 \right) = 0.$$

Квадрат нормы временного ряда естественно называть его амплитудной мощностью. Следующая основная теорема гарантирует разложение временного ряда в сумму компонент со временами релаксации, отличающимися на порядок (в подавляющем большинстве случаев в гелиобиологии эти компоненты трактуются либо как «сигнал» и «шум», либо как «модуляция» и «несущий тренд»).

Теорема 2. Пусть исходный сигнал представим в виде суммы $x = z + v$, где $z^T v = 0$. Тогда амплитудные мощности и угловые частоты релаксации перечисленных сигналов связаны неравенством

$$\|z\|^2 \omega_z^{2k} + \|v\|^2 \omega_v^{2k} \geq \frac{\|z\|^2 + \|v\|^2}{2} \omega_x^{2k}. \quad (12)$$

Доказательство теоремы 2 см. в Приложении.

3. Спектральный анализ

Выше упоминалось, что R-матрица порождает полный ортонормированный базис пространства \square^N , в котором лежит исходный сигнал, а из формулы (6) следует, что угловая частота релаксации каждой из базисных компонент (обозначим их как φ_i) равна

$$\omega_k[\varphi_i] \equiv \left(\frac{\sum_{j=1, \lambda_j \neq 0}^N (\xi^j[\varphi_i])^2 \lambda_j}{\sum_{j=1, \lambda_j \neq 0}^N (\xi^j[\varphi_i])^2} \right)^{\frac{1}{2k}} = \left(\frac{(\xi^i[\varphi_i])^2 \lambda_i}{(\xi^i[\varphi_i])^2} \right)^{\frac{1}{2k}} = (\lambda_i)^{\frac{1}{2k}},$$

т.е. возведенному в степень $\frac{1}{2k}$ i -му собственному значению R-матрицы. Соотношение

$$\sum_{i=1}^N (\xi^i[x])^2 = \|x\|^2,$$

напрямую следующее из известного равенства Парсеваля, позволяет представить любой сигнал как взвешенную сумму собственных векторов R-матрицы, а квадрат коэффициента перед каждым собственным вектором – как высоту соответствующего спектрального пика, ассоциированного с частотой релаксации $(\lambda_i)^{\frac{1}{2k}}$. Полученный таким образом спектр, в отличие от спектров Фурье и Морле, не будет определяться свойствами периодичности доминирующих в сигнале компонентов. Если природа временного ряда такова, что последний возникает в результате наложения двух или нескольких процессов, которые ни в коей мере не обладают периодичностью, но в то же время допускают четкое деление на «быстрые» и «медленные», этот спектр (назовем его *релаксационным*) более информативен по смыслу, чем спектры Фурье и Морле. Каждый пик спектра интерпретируется не как мощность компоненты заданной частоты, а как мощность компоненты, отвечающей за процесс, протекающий с заданной скоростью, и, таким образом, величина $2\pi(\lambda_i)^{\frac{1}{2k}}$ показывает, за какое характерное время происходит изменение состояния изучаемой системы, если на нее влияет только этот, ассоциированный с заданным спектральным пиком процесс.

4. Анализ совпадений спектральных пиков в популяционных и гелиогеомагнитных рядах

Согласно основной концепции гелиобиологии [Бреус и др., 2016; Комаров и др., 2017], сигналы гелиогеомагнитной природы «завели» биологические часы в живых организмах. В различных публикациях этот тезис обычно интерпретировался так: в популяционных физиологических рядах должны проявляться некоторые из ритмов гелиогеомагнитных рядов. Такие парные ритмы выявлены в целом ряде работ с помощью расчета фурье-спектров [Halberg et al., 2003, 2008a, b; Breus et al., 2008; Халберг и др., 2009; Cornélissen, 2014], выделение которых часто затруднялось из-за значительного шума, вызывало неоднозначные ответы и порождало сомнения.

В данной работе видоизменена интерпретация основной концепции гелиобиологии ввиду необходимости обобщения понятия «период» на существенно аperiodические сигналы, встречающиеся в гелиобиологии и гелиогеофизике. Теперь эта гипотеза зву-

чит так: популяционные ряды формируются под действием нескольких процессов, часть из которых существенно связана с гелиогеомагнитными явлениями, а поэтому имеет совпадающую с ними скорость протекания, т.е. сходное время релаксации. Иными словами, представляется целесообразным в гелиобиологических исследованиях искать совпадение пиков релаксационных спектров. Для объективности совпадающие пики будем искать с помощью компьютерной программы.

Итак, пусть имеется некий спектр. Его можно рассматривать как ряд обычных значений переменной y , индексируемой переменной t . Зададим некоторую погрешность dy , равную, к примеру, 2% от средней высоты спектра. Нам необходимо получить все точки t , соответствующие правдоподобным по отношению к заданной погрешности dy спектральным пикам. Пусть $t_{current}$ – точка, являющаяся кандидатом на пик. Введем четыре временных отсчета (рис. 3):

$$\begin{aligned} t_a^- &= \max\{t, t < t_{current}, y(t) < y(t_{current}) - dy\}; \\ t_a^+ &= \max\{t, t < t_{current}, y(t) > y(t_{current}) + dy\}; \\ t_b^- &= \min\{t, t > t_{current}, y(t) < y(t_{current}) - dy\}; \\ t_b^+ &= \min\{t, t > t_{current}, y(t) > y(t_{current}) + dy\}. \end{aligned}$$

Как видно из данных, представленных на рис. 3, два отсчета расположены выше, а два ниже $y(t_{current})$. Точка $t_{current}$ является достоверным пиком, если между t_a^- и t_b^- имеется существенная (характерный размер больше чем dy) выпуклость вверх, а между как t_a^+ и t_a^- , так и t_b^- и t_b^+ – существенная выпуклость вниз. Формально это означает выполнение системы строгих неравенств

$$t_a^+ < t_a^- < t_b^- < t_b^+.$$

Мы будем сопоставлять только пики, находящиеся не на краю спектра, т.е. такие, у которых есть соседи слева и справа. Подобные пики будем называть внутренними. Пусть у нас есть три идущих подряд достоверных пика с координатами t_1^* , t_2^* , t_3^* , т.е. пик с координатой t_2^* – внутренний. Назовем интервал $[t_1^*, t_3^*]$ носителем sup_2 пика с координатой t_2^* . Объективной мерой совпадения двух спектральных пиков двух разных временных рядов будет степень перекрытия их носителей, выраженная через корреляцию Сьеренсена:

$$\tilde{N} = \frac{|\text{sup}_{pop} \cap \text{sup}_{geo}|}{\max(|\text{sup}_{pop}|, |\text{sup}_{geo}|)},$$

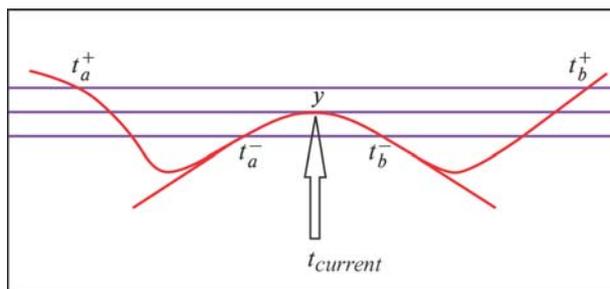


Рис. 3. Иллюстрация расположения вспомогательных временных отсчетов, используемых в алгоритме автоматического поиска спектрального пика

где sup_{pop} – носитель одного из пиков популяционного ряда; sup_{geo} – носитель сравниваемого с ним пика гелиогеомагнитного ряда, а знак модуля $|*|$ означает длину одного из носителей или их пересечения. Мы принимаем гипотезу о совпадении пиков в случае, если степень перекрытия носителей, выражаемая коэффициентом корреляции Стьеренса, больше 95 %.

На рис. 4 представлены результаты поиска совпадающих пиков в спектрах K_p -индекса и смертности людей от инфаркта миокарда в штате Миннесота (США), оба ряда имеют скважность 1 день и протяженность с 1972 по 1996 г. Данные о смертности в штате Миннесота были любезно предоставлены авторам профессором Ф. Халбергом.

Разработанный нами алгоритм выявил четыре сходных пика, подтвердив высказанную гелиобиологами ранее гипотезу о том, что наиболее сильно влияют на популяцию в целом геомагнитные ритмы с периодами вблизи 7 и 9 сут.

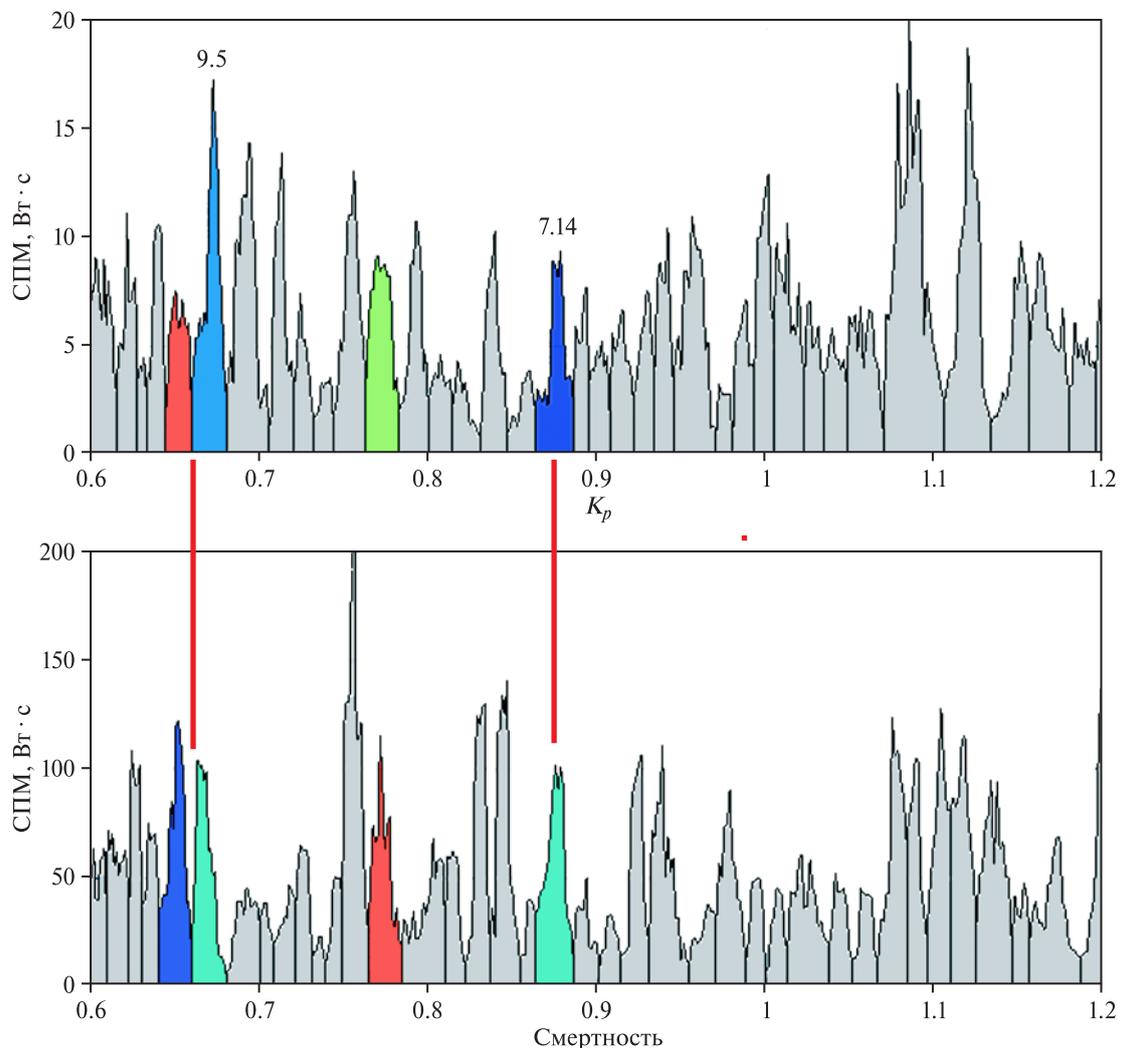


Рис. 4. Совпадающие пики релаксационных спектров (окрашены другим цветом) во временных рядах K_p -индекса и смертности людей от инфаркта миокарда в штате Миннесота (США)

Как объяснено выше, гелиобиология рассматривает взаимосвязь запредельно сложных систем, порождающих сигналы, которые равномерно заполняют пространство размерности их длины. Поэтому для таких сигналов все базисы одинаково плохие. Получение релаксационного спектра – ни в каком смысле не более оптимальная процедура, чем получение фурье-спектра. Это просто измерение других параметров. В частности, при замене релаксационных спектров на рис. 4 фурье-спектрами исчезает воспроизводимость сходства некоторых спектральных пиков (рис. 5).

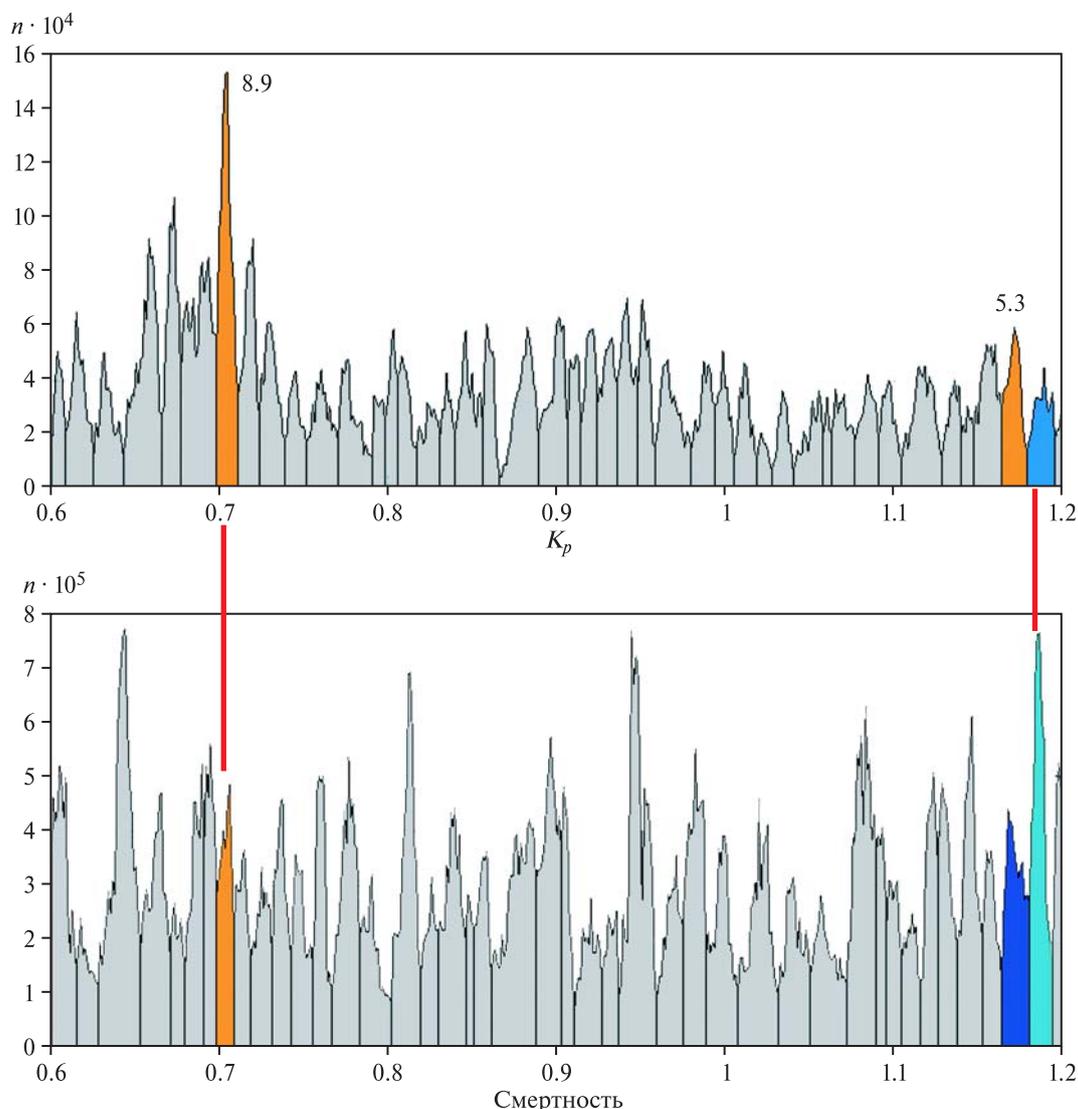


Рис. 5. Совпадающие пики фурье-спектров (окрашены другим цветом) во временных рядах K_p -индекса и смертности людей от инфаркта миокарда в штате Миннесота (США)

Заключение

Биологические и гелиогеофизические временные ряды данных, с которыми приходится иметь дело в гелиобиологии, далеко не всегда содержат доминирующие периодические компоненты. Поэтому возникает необходимость обобщения понятия «период» на существенно аperiodические сигналы через параметр «время релаксации», ко-

торый вводится в работе через усредненные квадраты конечных разностей. Показано, что для синусоиды время релаксации и период текстуально совпадают.

Разработан алгоритм фильтрации шумов и длиннопериодных трендов, основанный на разделении исходного сигнала на быстро и медленно релаксирующие компоненты (алгоритм применим не только для одномерных рядов, но и для двумерных изображений), и доказана основная теорема, гарантирующая его работоспособность. Описан метод построения ортонормированного базиса, компоненты которого обладают строго определенным временем релаксации. Результат разложения сигнала по этому базису был назван авторами релаксационным спектром.

Основные выводы из проведенного исследования следующие.

1. Релаксационный анализ позволяет обобщить «спектральный» формализм на сигналы, не представимые в виде суммы ограниченного числа квазипериодических компонентов.
2. Возможно разделение временного ряда на сигнал и шум или осцилляцию и тренд при отсутствии адекватных фурье- или стохастической модели.
3. Релаксационные спектры рядов K_p -индекса и смертности от инфаркта миокарда в штате Миннесота, США, содержат четыре пика, перекрывающие друг друга на 95 %.
4. Подтверждена высказанная гелиобиологами ранее гипотеза о том, что наиболее существенно влияют на физиологические показатели биологических объектов (популяцию в целом) геомагнитные ритмы с периодами вблизи 7 и 9 сут.

Благодарности

Работа выполнена при поддержке гранта Российского фонда фундаментальных исследований № 15-04-02945.

Литература

- Бреус Т.К., Бинги В.Н., Петрукович А.А.* Магнитный фактор солнечно-земных связей и его влияние на человека: Физические проблемы и перспективы // УФН. 2016. Т. 186, № 5. С. 568–576.
- Бреус Т.К., Гурфинкель Ю.И., Зенченко Т.А., Ожередов В.А.* Сравнительный анализ чувствительности различных показателей сосудистого тонуса к метеорологическим и геомагнитным факторам // Геофизические процессы и биосфера. 2010. Т. 9, № 2. С. 23–36.
- Владимирский Б.М.* Космическая погода и биосфера. История исследований и современность. М.: URSS, 2016. 112 с.
- Зенченко Т.А., Медведева А.А., Хорсева Н.И., Бреус Т.К.* Синхронизация показателей сердечного ритма человека и вариаций геомагнитного поля в диапазоне частот 0.5–3.0 мГц // Геофизические процессы и биосфера. 2013. Т. 12, № 4. С. 73–84. (*Zenchenko T.A., Medvedeva A.A., Khorseva N.I., Breus T.K.* Synchronization of human heart-rate and geomagnetic field variations in the frequency range of 0.5–3 mHz // *Izvestiya, Atmospheric and Oceanic Physics.* 2014. V. 50, is. 7. P. 736–744.)
- Халберг Ф., Корнелиссен Г., Бити Л.А., Отсука К., Ватанабе Е., Сотерн Р.Б., Катинас Г.С., Чаплицки Д., Санчез С. де ла Пена, Улмер В., Ревилла М., Земан М., Шварцкопф О., Сингх Р.Б., Исследовательская группа «Феникс», Рабочая группа проекта БИОКОС.* Успехи хрономики в 2006–2008 гг. Ч. 1. Согласованность ритмов биосферных и гелиогеофизических процессов // Геофизические процессы и биосфера. 2009. Т. 8, № 2. С. 43–74.

- Breus T.K., Zenchenko T.A., Stoilova I., Dimitrova S.* Heliogeomagnetic rhythms are indeed synchronizers of biological «clocks» // UN/ESA/NASA/JAXA/BAS Workshop on «The first results from the International Heliophysical Year 2007», Sozopol, Bulgaria, June 2–6, 2008. Sozopol, 2008. P. 70.
- Vladimirskii B.M., Narmanskii V.Ya., Temuriantz N.A.* Global rhythmic of the solar system in the terrestrial habitat // *Biophysics*. 1995. V. 40. P. 731–736.
- Cornélissen G.* Cosinor-based rhythmometry // *Theoretical Biology and Medical Modelling*. 2014. 11:16. URL: <http://www.tbiomed.com/content/11/1/16>
- Gurfinkel Yu., Breus T., Zenchenko T., Ozheredov V.* Investigation of the effect of ambient temperature and geomagnetic activity on the vascular parameters of healthy volunteers // *Open J. of Biophysics*. 2012. V. 2. P. 46–55. DOI 10.4236/ojbiphys.2012.22007.
- Halberg F., Cornélissen G., Bingham Ch. et al.* Chronomics: Imaging in time by phase synchronization reveals wide spectral-biospheric resonances beyond short rhythms // *Neuroendocrinol Lett*. 2003. V. 24, N 5. P. 355–380.
- Halberg F., Cornélissen G., Schwartzkopff O.* Quo vadis chronomics 2008: Measuring variability in us, among us and around us // Proc. Of the Conference «Noninvasive methods in cardiology», Brno, Czech Republic, October 4–7, 2008 / F. Halberg, T. Kenner, B. Fiser, J. Siegelova (Eds). Brno, 2008a. P. 16–25. URL: http://web.fnusa.cz/files/kfdr2008/sbornik_2008.pdf
- Halberg F., Cornélissen G., Sothorn R.B. et al.* Cycles tipping the scale between death and survival («life») // *Progress of Theoretical Physics*. 2008b. Suppl. V. 173. P. 153–181.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Доказательство теоремы 1

Поскольку минимум (10а) достигается на сигнале

$$y^i = \frac{x^i}{1 + \gamma \lambda^i}, \quad (\text{A11})$$

однозначно зависящем от параметра γ , остается лишь доказать существование и единственность решения уравнения (10б). Покажем вначале, что производная функции

$$F \equiv \frac{\sum_{i=1}^N (y^i(\gamma))^2 \lambda^i}{\sum_{i=1}^N (y^i(\gamma))^2} \quad (\text{A12})$$

монотонно убывает:

$$F' \equiv \frac{2 \left(\sum_{i=1}^N (y^i(\gamma))^2 \right) \sum_{i=1}^N y^i(\gamma) (y^i(\gamma))' \lambda^i - 2 \left(\sum_{i=1}^N (y^i(\gamma))^2 \lambda^i \right) \sum_{i=1}^N y^i(\gamma) (y^i(\gamma))'}{\left(\sum_{i=1}^N (y^i(\gamma))^2 \right)^2}. \quad (\text{A13})$$

Нас интересует только знак F' , поэтому мы исключим из рассмотрения знаменатель (10) как заведомо больший нуля (как видно из (8), тождественное равенство нулю сигнала y не достигается ни при одном допустимом значении γ). Далее, для удобства, мы

перенесем все индексы вниз и перейдем к двойным суммам в числителе (10); знак равенства при этом сменится на «~», означающий «пропорционально»:

$$F' \sim \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_j y_i^2 y_j y_j' - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_i y_i^2 y_j y_j'.$$

Учитывая, что

$$y_j' = -\frac{\lambda_j x_j}{(1 + \gamma \lambda_j)^2},$$

получаем:

$$y_j^2 = \frac{x_j^2}{(1 + \gamma \lambda_j)^2} = -\frac{1}{\lambda_j} \left(-\frac{\lambda_j x_j}{(1 + \gamma \lambda_j)^2} \right) x_j = -\frac{x_j}{\lambda_j} y_j'.$$

Последнее равенство правомерно в силу того, что $\gamma_j > 0$. Отсюда

$$\begin{aligned} F' &\sim -\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_j \frac{x_i}{\lambda_i} y_i' y_j y_j' + \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_i \frac{x_i}{\lambda_i} y_i' y_j y_j' = \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i y_i' y_j y_j' - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \lambda_j \frac{x_i}{\lambda_i} y_i' y_j y_j' = \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N x_i \frac{\lambda_i x_i}{(1 + \gamma \lambda_i)^2} \frac{x_j}{1 + \gamma \lambda_j} \frac{\lambda_j x_j}{(1 + \gamma \lambda_j)^2} - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\lambda_j}{\lambda_i} x_i \frac{\lambda_i x_i}{(1 + \gamma \lambda_i)^2} \frac{x_j}{1 + \gamma \lambda_j} \frac{\lambda_j x_j}{(1 + \gamma \lambda_j)^2}; \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{x_i^2 x_j^2}{(1 + \gamma \lambda_i)^2 (1 + \gamma \lambda_j)^2} \left[\frac{\lambda_i \lambda_j}{1 + \gamma \lambda_j} - \frac{\lambda_i^2}{1 + \gamma \lambda_i} \right] = \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{x_i^2 x_j^2}{(1 + \gamma \lambda_i)^3 (1 + \gamma \lambda_j)^3} (\lambda_i \lambda_j + \gamma \lambda_i^2 \lambda_j - \gamma \lambda_i^2 \lambda_j - \lambda_i^2) = \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{x_i^2 x_j^2 \lambda_i \lambda_j}{(1 + \gamma \lambda_i)^3 (1 + \gamma \lambda_j)^3} - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{x_i^2 x_j^2 \lambda_i^2}{(1 + \gamma \lambda_i)^3 (1 + \gamma \lambda_j)^3}. \end{aligned}$$

Рассмотрим два вектора ξ и η со следующими координатами:

$$\begin{cases} \xi_i \equiv \frac{x_i \lambda_i}{(1 + \gamma \lambda_i)^{3/2}}; \\ \eta_i \equiv \frac{x_i}{(1 + \gamma \lambda_i)^{3/2}}. \end{cases} \quad (A14)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{x_i^2 x_j^2 \lambda_i \lambda_j}{(1 + \gamma \lambda_i)^3 (1 + \gamma \lambda_j)^3} &= \left(\sum_{i=1}^N \frac{x_i^2 \lambda_i}{(1 + \gamma \lambda_i)^{3/2} (1 + \gamma \lambda_j)^{3/2}} \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^N \xi_i \eta_i \right)^2 = (\xi^T \eta)^2; \\ \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{x_i^2 x_j^2 \lambda_i^2}{(1 + \gamma \lambda_i)^3 (1 + \gamma \lambda_j)^3} &= \left(\sum_{i=1}^N \frac{x_i^2 \lambda_i^2}{(1 + \gamma \lambda_i)^3} \right) \left(\sum_{j=1}^N \frac{x_j^2}{(1 + \gamma \lambda_j)^3} \right) = \left(\sum_{i=1}^N \xi_i^2 \right)^2 \left(\sum_{i=1}^N \eta_i^2 \right)^2 = \|\xi\|^2 \|\eta\|^2. \end{aligned}$$

В силу неравенства Коши $(\xi^T \eta)^2 < \|\xi\|^2 \|\eta\|^2$. Исключение составляет случай коллинеарности векторов ξ и η , однако тогда, как нетрудно видеть из (A14):

$$\frac{\xi_i}{\eta_i} = \lambda_i = \text{const},$$

т.е. имеет место при единственном N -кратном собственном значении R -матрицы. Доказательство невозможности этого для R -матрицы любого порядка выходит за рамки данной работы, поэтому мы ограничимся лишь упоминанием того факта, что в результате огромного количества численных экспериментов такого не наблюдалось ни разу. Отсюда следует, что $F' < 0$ и функция (10б) монотонно убывает с ростом γ , т.е. решение, если оно есть, единственно. С другой стороны, из (8) тривиально следует, что $F = \omega_x^{2k}$ при $\gamma = 0$ и $F = 0$ при $\gamma \rightarrow \infty$, поэтому решение при $\omega_z^{2k} < \omega_x^{2k}$ существует. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 2

Очевидно, что для любой компоненты векторов z и v верно следующее:

$$(z_i + v_i)^2 - 2(z_i^2 + v_i^2) = -(z_i^2 + v_i^2 - 2z_i v_i) = -(z_i - v_i)^2 \leq 0;$$

$$z_i^2 + v_i^2 \geq \frac{(z_i + v_i)^2}{2}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|z\|^2 \omega_z^{2k} + \|v\|^2 \omega_v^{2k} &= \sum_{i=1}^N z_i^2 \lambda_i + \sum_{i=1}^N v_i^2 \lambda_i = \sum_{i=1}^N [z_i^2 + v_i^2] \lambda_i \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N (z_i + v_i)^2 \lambda_i = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N x_i^2 \lambda_i = \frac{\|x\|^2}{2} \omega_x^{2k}. \end{aligned}$$

С другой стороны, по причине ортогональности компонент z и v друг другу,

$$\|x\|^2 = (z + v)^T (z + v) = z^T z + 2v^T z + v^T v = \|z\|^2 + \|v\|^2,$$

откуда следует справедливость (12). Теорема доказана.

Сведения об авторах

ОЖЕРЕДОВ Вадим Андреевич – кандидат физико-математических наук, ведущий математик, Институт космических исследований РАН. 117997, г. Москва, ул. Профсоюзная, д. 84/32. Тел.: +7 (916) 551-85-42. E-mail: ojymail@mail.ru

БРЕУС Тамара Константиновна – доктор физико-математических наук, главный научный сотрудник, Институт космических исследований РАН. 117997, г. Москва, ул. Профсоюзная, д. 84/32. Тел.: +7 (916) 821-27-44. E-mail: breus36@mail.ru

APPLICATION OF A NEW METHOD OF SPECTRAL ANALYSIS FOR THE DETECTION OF SYNCHRONOUS PROCESSES IN HELIOBIOLOGY

B.A. Ozheredov, T.K. Breus

Space Research Institute, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Abstract. Until now, the main carrier of information in biological and heliogeophysical signals was the sum of periodic variations. However, not all heliobiological time series contain dominant periodic components. Relaxation analysis in this paper allows us to generalize the «spectral» formalism to signals that cannot be represented as a sum of a limited number of quasi-periodic components. The algorithm for filtering noise and long-period trends is developed, based on the separation of the original signal into fast and slowly relaxing components (applicable not only to one-dimensional series, but also to two-dimensional images), and the main theorem that guarantees its operability is proved. A method for constructing an orthonormal basis whose components have a strictly defined relaxation time is described. The result of signal decomposition over this basis is called the relaxation spectrum. With its help, the time series can be divided into «signal-to-noise» or «oscillation-trend» in the absence of adequate Fourier or stochastic models. Using an automatic extraction algorithm we verified spectral peaks of human population and heliogeomagnetic time series and identified similarity of these peaks through Sørensen's measure. Our results confirmed earlier hypothesis in heliobiology that geomagnetic rhythms with periods of near 7, and 9 days most significantly affect physiological parameters of biological objects (population in general).

Keywords: generalization of the «spectral» formalism, signal filtration, generation of an orthonormal basis, heliobiophysics.