

УДК 550.34.01

## АМПЛИТУДНЫЕ ДЕЛЬТА-ФАКТОРЫ И СДВИГИ ФАЗ ПРИЛИВНЫХ ВОЛН ДЛЯ ЗЕМЛИ С ОКЕАНОМ

© 2017 г. Е.А. Спиридонов

Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, г. Москва, Россия

В работе выполнено обобщение задачи М.С. Молоденского, описывающей состояние упругой самогравитирующей сжимаемой сферы, для случая двухосной гидростатически равновесной вращающейся эллиптической неупругой оболочки. В систему уравнений шестого порядка включены поправки за относительные и кориолисовы ускорения. Рассчитанные для различных вариантов моделей строения Земли (трех вариантов АК135, IASP91 и PREM) обычные и нагрузочные числа Лява второго порядка определены с учетом их широтной зависимости и диссипации. Задача решена методом Лява. Проведено сравнение полученных теоретических значений амплитудных дельта-факторов и сдвигов фаз волн второго порядка для Земли с океаном с их наиболее современными наблюдаемыми значениями, полученными на сверхпроводящих гравиметрах сети GGP. В частности, показано, что хорошее (до единиц в четвертом знаке после запятой) совпадение теоретических и наблюдаемых амплитудных факторов полусуточных волн не требует применения негидростатической теории.

**Ключевые слова:** приливные амплитудные дельта-факторы, числа Лява, прогнозирование земных приливов.

### Введение

*Silentium*

Все приведенные в настоящей работе результаты получены при помощи наиболее простой системы уравнений, описывающей состояние неупругой сжимаемой самогравитирующей эллипсоидальной оболочки. Простота примененных методов и самой системы шестого порядка позволяет легко обобщить задачу на случай произвольных распределений плотности, геопотенциала и параметров Ламе в недрах Земли, т.е. исследовать влияние на приливы латеральных неоднородностей коры и верхней мантии. Также достаточно просто учитываются рассчитанные в работе поправки за относительные и кориолисовы ускорения, полученные с учетом их широтной зависимости.

Основное отличие данной работы от работ других авторов в том, что решение поставленной задачи для асимметричной Земли осуществлено методом Лява. Такой подход для случая эллипсоидальной вращающейся Земли во многом противоречит установившейся за последние 40 лет научной парадигме. Поэтому, прежде чем перейти собственно к работе, обсудим эту ее особенность более подробно в настоящем введении, а также проведем краткий сравнительный анализ метода решения задачи, примененного в настоящей работе и в работах других авторов. Хотя при этом даются ссылки на некоторые формулы настоящей работы, автор посчитал, что это обсуждение необходимо поместить именно в начало статьи – во введение, а не в ее конец.

Поскольку в нашей стране теория приливов в асимметричной Земле разрабатывалась в основном в трудах С.М. Молоденского путем применения методов теории возмущений, то мы уделим этим работам особое внимание. Также будут рассмотрены работы зарубежных авторов, опирающихся в основном на метод разложения смещений по сферическим и тороидальным гармоникам.

На невозможность решения задачи для сферически асимметричной Земли методом Лява С.М. Молоденский указывал, в частности, в работе [Молоденский, 1984. С. 58]: «Основные трудности теории нутации реальной Земли связаны с тем, что подстановкой Лява уравнения динамического прилива ... не сводятся к конечной системе обыкновенных дифференциальных уравнений».

Действительно, метод Лява наталкивается на определенные трудности, но, как показано в настоящей работе, они вполне преодолимы.

Первое затруднение состоит в том, что как только мы вводим зависимость искомых функций  $H$  и  $T$  (фактически чисел Лява  $h$  и  $l$ ) от широты, объемное расширение начинает зависеть от производной по широте от внешнего потенциала, а в выражении для давления (21) появляются слагаемые, для которых не совсем ясно, как задать граничные условия. Чтобы избежать этого, необходимо изменить вид решения задачи. Это сделано в равенствах (6) путем добавления слагаемого  $-\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \left( \frac{\bar{\omega}}{r''} \right)$  в выражение для  $u_\theta$ . После

учета производных от всех трех искомых функций по широте в задаче снимается вырождение по угловым переменным. При этом каждой производной от внешнего потенциала, входящей в выражение для гравитационных сил, «зеркально» соответствует производная для упругих сил. Приравнивая слагаемые при одинаковых производных от внешнего потенциала, имеем уравнения (10)–(15), которые в дальнейшем преобразуются в интегрируемую систему обыкновенных дифференциальных уравнений. При этом в уравнениях сохраняются все производные по угловым переменным первого порядка малости по сжатию. Члены второго порядка, содержащие произведения членов первого порядка малости, были отброшены, хотя, при желании, их можно было и сохранить.

Однако здесь возникает вторая проблема. Дело в том, что вследствие анизотропии, т.е. различия свойств в широтном и долготном направлениях, значения функции  $T$ , величины которых на поверхности Земли определяют числа Шида, в выражениях для  $u_\theta$  и  $u_\varphi$  (6), строго говоря, должны различаться. Этому также соответствуют два уравнения (вместо одного для случая сферической симметрии) (11) и (12), выражающие соответственно действие упруго-гравитационных сил по широте и по долготе. Таким образом, при включении в итоговую систему уравнения (11) мы получаем один набор чисел Лява, а по уравнению (12) – другой. Итого чисел Лява должно быть 6. Тем не менее числа  $k$  и  $h$  определены в настоящей работе однозначно. Действительно, при расчете вызванных деформациями возмущений потенциала и вертикальных смещений нас интересует

не каждая из составляющих упруго-гравитационных сил по отдельности, а суммарный вектор. Этому вектору с точностью до членов второго порядка по сжатию соответствует полусумма уравнений (11) и (12). Обоснование этого положения приведено сразу после формулы (16). Что касается отличий значений чисел Шида от этого «среднего решения», то эта разница максимальна на экваторе и равна нулю на полюсе, а на широте  $45^\circ$  не превышает  $3.62 \cdot 10^{-6}$ . Величина этих разностей сохраняется и после включения в систему уравнений относительных и кориолисовых ускорений. Подобные отличия не могут быть обнаружены средствами современных наблюдений, и поэтому необходимость рассмотрения уравнений (11) и (12) по отдельности пока отсутствует, а для решения задачи вполне достаточно трех чисел Лява (во всяком случае до введения тороидальных колебаний).

Наконец, существует еще одно соображение против метода Лява. Оно возникает в связи с действием силы Кориолиса. По этому поводу С.М. Молоденский пишет следующее [Молоденский, 1984. С. 55]: «Подстановкой Лява ... уравнения ... не сводятся к системе обыкновенных уравнений. Это связано с наличием ... члена  $2[\vec{\omega} \dot{u}]$ , снимающего вырождение по угловым переменным».

Здесь необходимо отметить следующее. Вырождение по угловым переменным в представленных в настоящей работе уравнениях в значительной степени уже снято, однако это действительно не позволяет включить в рассмотрение силу Кориолиса тривиальным образом. В разделе 3 показано, что работу на перемещениях нулевого (сферического) решения производит (т.е. приводит к ненулевым смещениям) только та часть силы Кориолиса (52), которая определяется дополнительными смещениями, вызываемыми самой этой силой. В то же время, согласно теореме Э. Бэтти о взаимности работ, указанная работа равна работе упругих и гравитационных сил нулевого решения на добавочных смещениях, вызываемых силой Кориолиса. Степень же вырождения полученных в настоящей работе уравнений соответствует возможности включения выражения (52) в итоговую систему.

В связи с введением силы Кориолиса обсудим еще один важный момент.

Как уже было сказано выше, в настоящей статье применены поправки в числа Лява и амплитудные дельта-факторы для полусуточных и суточных волн за относительные и кориолисовы ускорения. Эти поправки были получены в работе [Спиридонов, 2016a]. В разделе 3 настоящей работы содержится более общий их вывод. Основной отличительной чертой этих поправок является то, что они, во-первых, зависят от широты, а, во-вторых, форма кривых полученных с их помощью широтных зависимостей одинакова для суточных и полусуточных волн. Поправки для зональных приливов в настоящей работе не рассматриваются.

Тем не менее факт зависимости поправок в числа Лява за кориолисовы ускорения от широты признается не всеми авторами. Вот что пишет С.М. Молоденский по поводу широтной зависимости этих поправок в своей работе [Молоденский, 1984. С. 59]: «Хотя подстановкой Лява уравнения упругогравитационных колебаний вращающейся сферы и не сводятся к обыкновенным, тем не менее при достаточно медленном вращении в первом порядке теории возмущений приращения  $\delta H$  и  $\delta R$  на поверхности Земли имеют ту же зависимость от  $\theta$ ,  $\varphi$  и ту же фазу, что и невозмущенное статическое решение  $(u^0, R^0)$ . Это значит, что влияние сил инерции как на полусуточные, так и на суточные приливы может быть учтено введением малых независимых от  $\theta$  и  $\varphi$  действительных поправок к числам Лява». Далее С.М. Молоденский рассчитывает поправки в числа Лява для полусуточных и суточных волн, а также зональных приливов (последние в

его работе, кстати, явно зависят от широты) и, говоря, в частности, о полусуточных волнах, заключает, что «поправки за относительные ускорения в значительной мере компенсируются поправкой обратного знака, учитывающей эффект кориолисовых ускорений (суммарный эффект относительных и кориолисовых ускорений втрое меньше каждого из слагаемых)» [Молоденский, 1984. С. 62].

Рассмотрим вопрос о зависимости составляющих кориолисовых ускорений от широты на примере полусуточных волн.

Согласно (54), вертикальная (направленная вдоль радиуса) составляющая силы Кориолиса для полусуточных волн полностью компенсирует относительные ускорения на экваторе и равна нулю на полюсе. Составляющая этой силы, направленная вдоль меридиана, наоборот, нарастает от полюса к экватору, а составляющая, направленная вдоль круга широты, собственно от широты не зависит (см. (52)). Тогда возникает достаточно логичный вопрос: Если в некотором первом порядке теории возмущений полагать явно зависящие от широты составляющие силы Кориолиса постоянными, то к какой все же широте относятся вычисленные С.М. Молоденским поправки в числа Лява  $h$  и  $k$ , полученные путем отбрасывания этой зависимости? Этот вопрос имеет чисто практическое значение, и на него можно ответить. Косвенный ответ для случая полусуточных волн дают выражения для  $\delta H$  и  $\delta R$  (35) из работы С.М. Молоденского на рассматриваемую тему [Молоденский, 1978. С. 18]:

$$\delta u_r = I^{(j=1)} P_{n_0}^{m_0}(\cos\theta) \cos(\sigma t - m_0\varphi), \quad \delta R = I^{(j=2)} P_{n_0}^{m_0}(\cos\theta) \cos(\sigma t - m_0\varphi).$$

Входящие в это выражение множители  $P_{n_0}^{m_0}(\cos\theta)$  представляют собой присоединенные полиномы Лежандра разложения приливообразующего потенциала (см. выражение (12) из цитируемой работы). В то же время, как следует из равенств (36) той же работы, выражающих поправки в числа Лява  $h$  и  $k$ , значения этих полиномов приняты равными единице, что в случае полусуточных волн означает проведение расчетов на экваторе. В этом также можно убедиться путем непосредственного сопоставления результатов вычислений. Рассмотрим для этого данные табл. 1, в которой раздельно показаны поправки в числа Лява  $h$  и  $k$  для полусуточных волн за относительные и кориолисовы ускорения, а также их разности, т.е. величины итоговых поправок.

**Таблица 1.** Поправки в числа Лява  $h$  и  $k$  для полусуточных волн за относительные и кориолисовы ускорения, вычисленные разными способами

Автор	Число Лява	Поправки		
		за относительные ускорения	за кориолисовы ускорения	итоговая
[Молоденский, 1978]	$h$	2.29E-03	1.58E-03	7.03E-04
	$k$	1.08E-03	7.96E-04	2.81E-04
Е.А. Спиридонов, вариант 1	$h$	2.23E-03	1.65E-03	5.77E-04
	$k$	1.05E-03	7.30E-04	3.18E-04
[Молоденский, 1984]	$h$	2.24E-03	1.70E-03	5.38E-04
	$k$	1.05E-03	8.64E-04	1.89E-04
Е.А. Спиридонов, вариант 2	$h$	2.23E-03	1.65E-03	5.77E-04
	$k$	1.05E-03	8.85E-04	1.63E-04
Е.А. Спиридонов, вариант 3	$h$	2.23E-03	1.93E-03	2.97E-04
	$k$	1.05E-03	8.85E-04	1.63E-04

*Примечание.* Пояснения к расчетам см. в тексте.

Значения поправок, приведенных в первых двух строках табл. 1, взяты непосредственно из работы [Молоденский, 1978. С. 18]. Итоговые поправки, содержащиеся в 5-й и 6-й строках табл. 1 ( $5.38E-04$  и  $1.89E-04$ ), приведены С.М. Молоденским в таблице на с. 62 работы [Молоденский, 1984]. Промежуточные значения для относительных и кориолисовых ускорений С.М. Молоденский в этой работе не приводит; они были вычислены нами по приведенной в цитируемой работе на с. 59 формуле (2.29а), а также формулам, стоящим перед (2.34) на с. 59, и данным табл. 2.3 на с. 62 [Молоденский, 1984].

Проанализируем, прежде всего, поправки за относительные ускорения.

Для расчета этих поправок, которые действительно не зависят от широты и могут быть получены методом Лява без замены вида решения (6), входящие в уравнения (30) и (31) настоящей работы слагаемые  $-2\rho r^2 \Omega^2 \sin^2 \theta$  (в скобках при  $\frac{1}{n} \bar{T}$ ) и  $-4\rho \Omega^2 \cos^2 \theta$

(в скобках при  $\frac{1}{n} \bar{H}$ ) были заменены на  $-4\rho r^2 \Omega^2$ . Из данных, приведенных в первом столбце табл. 1, видно, что поправки за относительные ускорения, вычисленные С.М. Молоденским и автором настоящей работы, практически полностью совпадают. Совпадение достигается несмотря на то, что С.М. Молоденский проводил все свои расчеты по модели строения Земли № 508 У. Гильберта и А.М. Дзиевонского, а нами использована модель PREM. О малой зависимости поправок за относительные и кориолисовы ускорения от модели строения Земли можно судить также по результатам работы [Спиридонов, 2016а]. Результаты приведены без учета диссипации. Уменьшение величины обеих поправок в работе [Молоденский, 1984] по сравнению с работой [Молоденский, 1978] на 2.2 % вполне может быть связано с изменением шага интегрирования.

В то же время не до конца объяснимым является видимое в работе [Молоденский, 1984] увеличение поправок в числа  $h$  и  $k$  на 7.3 и 8.5% соответственно по сравнению с их значениями, приведенными С.М. Молоденским в работе [Молоденский, 1978]. Впрочем, изменение поправки в число  $k$  до некоторой степени все же поддается объяснению. Дело в том, что расчет этой поправки в разных работах производился С.М. Молоденским по разным формулам. В 1978 г. для этой цели применялся второй интеграл из формул (23) [Молоденский, 1978. С. 16]. В работе 1984 г. этот интеграл без каких-либо комментариев был заменен интегралом (2.31), отличающимся от предыдущего добавлением третьего слагаемого в подынтегральное выражение. По своему виду это слагаемое соответствует дополнительному учету при расчете изменения потенциала тангенциальной составляющей силы Кориолиса. Интеграл же, предназначенный для вычисления поправок в число  $h$ , в обеих работах одинаков, т.е. схема их расчета не меняется. В связи с вышесказанным для сравнения поправок, вычисленных в двух работах С.М. Молоденского, с их значениями, полученными в настоящей работе для полусуточных волн на экваторе, нами также применены две схемы расчета.

Согласно первой схеме (см. вариант 1 в табл. 1), в первой из формул (54) было занулено второе слагаемое, что соответствовало отбрасыванию тангенциальной составляющей силы Кориолиса. Таким образом, учет этой силы на экваторе задавался лишь слагаемым  $+4\rho \Omega^2$  (в скобках при  $\frac{1}{n} \bar{H}$ ) в уравнении (31). Такой подход наиболее близко соответствовал расчету С.М. Молоденского 1978 г. В результате наши поправки к числам  $h$  и  $k$  ( $1.65 \cdot 10^{-3}$  и  $7.30 \cdot 10^{-4}$  соответственно) отличаются от рассчитанных в работе [Молоденский, 1978] на 6 ед. в пятом знаке после запятой. Наша поправка для числа  $h$  больше на 4.3%, а для числа  $k$  – меньше на 8.3 %. Эти различия в разы больше приведенных выше относительных разностей между относительными ускорениями (2.2 %) и, поэто-

му, не могут быть объяснены, например, разницей в шаге интегрирования. Основной причиной здесь, видимо, является применением С.М. Молоденским при расчете поправок к  $h$  и  $k$  двух различных интегралов, т.е. изменение одного числа ничего уже не добавляет в изменение второго. В нашем же случае производится решение системы уравнений, и поправки к обоим числам становятся в большей степени взаимосвязанными. Конечно, ради «чистоты эксперимента» можно было бы «заморозить» в системе некоторые переменные, однако мы не стали этого делать, поскольку, строго говоря, полученные различия и без того малых поправок не являются значимыми с практической точки зрения.

Во второй схеме расчета (см. вариант 2 в табл. 1) мы возвращаем опущенное при первом расчете тангенциальное кориолисово ускорение на экваторе. Это действие сводится к добавлению в уравнение (30) слагаемого  $+2pr^2\Omega^2$  (в скобках при  $\frac{1}{n}\bar{T}$ ). При

этом пересчитывается только поправка к числу  $k$ . Это соответствует указанному выше изменению формулы для расчета этой поправки в работе [Молоденский, 1984] при неизменности формулы для расчета поправки к  $h$ . Теперь наша поправка за кориолисовы ускорения к числу  $h$  оказывается на 2.8 % меньше, а поправка к числу  $k$  – на 2.5 % больше, чем в работе [Молоденский, 1984], при практически равных поправках за относительные ускорения.

Наконец, третий вариант нашего расчета (см. вариант 3 в табл. 1) подразумевает учет тангенциального кориолисова ускорения также и в числе  $h$ . Именно он и является окончательным в настоящей работе. Значение поправки к числу  $h$  отличается теперь от значения, полученного в работе [Молоденский, 1984] почти на 14 %.

В целом из сравнения результатов, приведенных во втором столбце табл. 1, следует, что значения поправок, вычисленных С.М. Молоденским и автором настоящей работы, на экваторе достаточно близки между собой. Полученные отличия являются величинами следующего порядка малости. Из сказанного следует, что рассчитанные С.М. Молоденским поправки в числа Лява за относительные и кориолисовы ускорения относятся к экватору.

В то же время поправки в числа  $h$  и  $k$  за кориолисовы ускорения, рассчитанные на экваторе, представляют собой оценку сверху. Величины этих поправок уменьшаются к полюсу в 3.4 и в 2.8 раза соответственно и уже в значительно меньшей степени компенсируют поправки за относительные ускорения. Наряду с небольшим влиянием эллиптичности это приводит к появлению широтной зависимости амплитудных дельта-факторов (см. раздел 4 настоящей работы). Для модели строения Земли IASP91 рост амплитудных факторов от полюса к экватору за счет учета эллиптичности и кориолисовых ускорений составляет  $8.4 \cdot 10^{-4}$  и как и форма кривой является одинаковым для суточных и полусуточных волн. Кривые для суточных волн при этом отличаются на константу  $4.24 \cdot 10^{-4}$  за счет различий в значениях поправок за относительные ускорения и диссипацию (см. раздел 4 настоящей работы). К сожалению, это различие не было учтено в работе [Спиридонов, 2016а]. Этот недостаток восполнен в настоящей работе, что привело к гораздо лучшему совпадению теоретических и наблюдаемых значений амплитудного фактора для волны  $O1$  (см. раздел 5 настоящей работы).

Различия широтных зависимостей амплитудных дельта-факторов суточных и полусуточных волн проявляются лишь после учета для суточных волн резонансных нутационных членов. Настоящее исследование, как и предыдущие работы автора, пока не имеет собственной резонансной кривой, т.е. тороидальные моды нами не рассматриваются. Резонанс учитывается согласно работе [Dehant et al., 1999]. В отличие от работы [Спиридонов, 2016б], в настоящей работе учтена зависимость от частоты не только среднего значения амплитудного дельта-фактора  $\delta_0$ , но и амплитуды широтного слагаемого  $\delta^+$ . Сами же зависимости амплитудных факторов от широты представлены в виде формул

(56а) и (56б) из работы [Dehant et al., 1999]. Это позволило исправить и адекватно сравнить результаты, полученные в настоящей работе (см. табл. 2 в разделе 4), и в работе [Dehant et al., 1999]. В работах [Спиридонов, 2016а, б] подобная возможность фактически отсутствовала. Также сопоставимыми стали и кривые широтных зависимостей амплитудных факторов суточных волн, приведенные в нашей работе и в работе [Dehant et al., 1999] (см. рис. 1 в разделе 4).

Что касается итоговых результатов теории приливов С.М. Молоденского, то максимальное полученное им по модели строения Земли 1066А значение амплитудного дельта-фактора, например, полусуточных волн составляет 1.15996. Это значение можно получить добавив к значениям чисел Лява  $h$  и  $k$  для сферической упругой Земли [Молоденский, 1984. Табл. 1.1. С. 37] поправки за диссипацию [Там же. С. 101] и уже рассмотренные поправки за относительные и кориолисовы ускорения. Это значение ниже соответствующего значения негидростатической модели DDW/Н [Dehant et al., 1999] на экваторе на  $2.8E-04$ . И хотя подобная разность на экваторе еще может быть объяснена различиями между моделями 1066А и PREM, но уже на широте  $45^\circ$ , вблизи которой расположена большая часть гравиметров сети GGP в Европе, она составляет  $5.0E-04$ , а на полюсе достигает величины  $7.1E-04$ . В то же время величины амплитудных факторов полусуточных волн негидростатической модели DDW/Н и полученного в настоящей работе значения для модели строения Земли IASP91 на широте  $45^\circ$  наилучшим образом совпадают с данными самых современных наблюдений и составляют 1.16194 и 1.16161 соответственно. Отличия от величины дельта-фактора, полученного С.М. Молоденским [1984], достигают в данном случае  $1.98E-03$  и  $1.65E-03$  соответственно. Таким образом, отсутствие в сделанных С.М. Молоденским оценках величины амплитудного дельта-фактора полусуточных волн широтной зависимости, обусловленной эллиптичностью Земли и зависимостью от широты поправок за кориолисовы ускорения, делает их малоприменимыми при проведении анализа современных гравиметрических наблюдений.

Еще хуже ситуация для суточных волн. Так, на с. 71 работы [Молоденский, 1984] приведена табл. 2.4, содержащая поправки в дельта-факторы за нутацию. Из текста, предвещающего таблицу, однозначно следует, что показанные в ней поправки положительны и их надо прибавлять, а не вычитать из значений дельта-факторов. После учета этих поправок значения дельта-факторов суточных волн получаются неоправданно завышенными. Так, например, для волны  $O1$  имеем значение 1.16386 (модель 1066А). Подобную величину невозможно снизить до наблюдаемой за счет применения сколько-нибудь разумной резонансной кривой. К сказанному следует добавить, что уже в 1981 г. были известны значения дельта-факторов суточных волн, вычисленные в работе [Wahr, 1981]. Среднее (без учета широтной зависимости) значение амплитудного фактора волны  $O1$  составляло у Дж. Вора 1.152. Та же величина, полученная в настоящей работе для модели строения Земли IASP91, меняется от 1.15321 на экваторе до 1.15369 на полюсе и расходится с наблюдаемыми на европейских гравиметрах сети GGP значениями в основном на единицы в четвертом знаке после запятой (см. табл. 6–8 и раздел 5).

Также известен расчет, проведенный С.М. Молоденским с целью учета латеральных неоднородностей строения Земли разного масштаба [Молоденский, Крамер, 1980; Молоденский, 1984. Гл. 7]. Для этого был разработан метод, базирующийся на применении теории возмущений [Молоденский, 1976, 1977]. В основе метода лежит положение о самосопряженности (эрмитовости) дифференциального оператора  $L$ , выражающего левую часть уравнения (6). В частном случае вариаций, удовлетворяющих тем же уравнениям, что и уравнения нулевого (сферического) решения, полученные С.М. Молоденским соотношения переходят в теорему взаимности Бетти, обобщенную

на случай неоднородного самогравитирующего тела с гидростатическим распределением начальных напряжений. Полученные в результате интегральные соотношения определяют искомый вектор смещений и изменение потенциала через решения невозмущенных граничных задач. Именно при помощи этого метода были получены приведенные выше значения поправок за кориолисовы ускорения к дельта-фактору полусуточных волн. Указанные поправки почти на порядок меньше эффектов порядка сжатия. Для вариаций же порядка сжатия устойчивость метода теории возмущений, развитой С.М. Молоденским в теории приливов, строго говоря, показана не была. Какие-либо аналитические или численные оценки, касающиеся этого вопроса, в его работах также отсутствуют. Что касается упомянутых выше оценок амплитудных дельта-факторов с учетом латеральных неоднородностей, то они оказались в разы, если не на порядок выше принятых современных значений. Этот вопрос кратко обсуждается в разделе 4 настоящей работы.

Другим широко распространенным методом решения задачи для асимметричной Земли является подход, основанный на разложении смещений в бесконечный ряд по сфероидальным и тороидальным функциям. Этот метод был в основном разработан в работах [Smith, 1974, 1976, 1977] и впервые реализован Дж. Вором в работах [Wahr, 1979, 1981]. Существенным недостатком полученных при помощи этого метода решений «является то, что используемая в них цепочка обыкновенных дифференциальных уравнений не содержит малого параметра. Поэтому вопрос о сходимости ряда и о величине ошибок, возникающих вследствие замены бесконечной системы конечной, остается открытым» [Молоденский, 1984. С. 39].

В работе [Wahr, 1981] рассмотрен прилив в эллипсоидальной вращающейся упругой Земле без океана. При расчете амплитудных факторов полусуточных волн удержаны две сфероидальные гармоники порядков 2 и 4 степени 2. Для суточных волн разложение опять включает два сфероидальных (порядков 2 и 4 степени 1) и два тороидальных (порядков 1 и 3 степени 1) скаляра. Полученные в этой работе амплитудные дельта-факторы волны  $M_2$  достигают 1.164 на экваторе и всего 1.149 на широте  $45^\circ$ . Вычисленная величина амплитуды широтной зависимости амплитудных факторов ( $G_+$ ) суточных волн одинакова для всех этих волн и достаточно мало отличается от соответствующей амплитуды для полусуточных волн.

Результаты первых работ Дж. Вора были исправлены почти 20 лет спустя в работе [Dehant et al., 1999]. В ней, в частности, указано (с. 1039) на то, что градиент внешней силы вдоль нормали к эллипсоиду может быть выражен в виде суммы следующих слагаемых: 1) радиальной производной от внешнего потенциала; 2) членов, определяемых тем фактом, что нормаль к эллипсоиду не является радиальным вектором, за исключением полюсов и экватора; 3) членов, необходимость которых вызвана тем фактом, что градиент потенциала представляет собой не только радиальную производную. Последние два набора членов, а также поправка за переход от сферы к эллипсоиду не вошли в определение Дж. Вора. В результате, например, в выражении (18) цитируемой работы, определяющем амплитудные факторы полусуточных волн, появляются дополнительные по сравнению с ранними работами Дж. Вора [Там же, выражение (19)] слагаемые, позволяющие более полно учесть производную от внешнего потенциала на поверхности эллипсоида. После учета указанных дополнительных членов в работе [Dehant et al., 1999] были получены значения амплитудных факторов для Земли без океана для полусуточных и суточных волн, которые и по сей день достаточно хорошо соответствуют данным гравиметрических наблюдений.



Здесь необходимо отметить, что подход, реализуемый в настоящей работе, свободен от указанной проблемы, связанной с правильным представлением градиента внешнего потенциала на поверхности эллипсоида, поскольку сам эллипсоид заменен эквивалентной сферой с соответствующими распределениями потенциала и плотности на сферических поверхностях. Помимо этого, зависимости чисел Лява от широты явно определяются породившей их причиной. Так, производные по кошироте от функций  $T$  и  $H$  (равенства (13) и (14)) явно зависят от производных по кошироте от геопотенциала на сферических поверхностях. Если учесть зависимость от кошироты параметров Ламе, то в выражения для указанных производных от искомым функций войдут также производные по кошироте от этих параметров [Спиридонов, 2016б].

Интересно, что несмотря на различие подходов и методов решения задачи, результаты вычисления амплитудных факторов для модели PREM, полученные в настоящей работе и в работе [Dehant et al., 1999] для той же модели строения Земли в гидростатическом приближении (модель DDW/H), практически совпадают (см. табл. 2, рис. 1, 2).

Полученное нами для модели PREM среднее значение амплитудного фактора  $\delta_0$  полусуточных волн отличается от такового для DDW/H всего на  $3.4E-4$  (см. табл. 2). Подобное отличие, вероятно, вызвано разной трактовкой верхнего океанического слоя при использовании модели PREM разными авторами. Так, в работе [Dehant et al., 1999] этот слой заменен двумя различными слоями коры с сохранением общей массы и момента инерции планеты. В нашей работе плотность океанического слоя оставлена неизменной, а значения параметров Ламе заменены на их значения для верхнего слоя коры. В работе [Dehant et al., 1999. С. 1044] по этому поводу сказано, что в результате проверки степени влияния плотности поверхностного слоя на результаты вычислений было найдено, что ее вклад проявляется как раз в четвертом знаке после запятой. Также определенную роль могло сыграть различие выбранных для учета диссипации функций крипа.

Что касается амплитуды широтной зависимости дельта-факторов  $\delta^+$ , то ее значение для полусуточных волн, полученное в настоящей работе, ближе к значению модели DDW/NH, нежели модели DDW/H, и практически не зависит от варианта модели строения Земли. Полученная в настоящей работе зависимость амплитудных факторов от широты несколько резче, чем в модели DDW/NH. Так, при совмещении средних значений кривых наших моделей и модели DDW/NH для полусуточных волн на широте  $45^\circ$  значения, полученные по этим моделям, расходятся на полюсе и экваторе не более чем на  $1.2E-04$ . Понятно, что подобные разности пока невозможно обнаружить в ходе самых современных гравиметрических наблюдений. Это тем более верно, в связи с тем, что большая часть пунктов сети GGP расположена в средних широтах. К сказанному следует добавить, что указанные различия формы широтных кривых практически полностью определяются учетом в настоящей работе дополнительного напряжения, связанного с отличием от нуля функции  $\tau$  (D5), зависящей, в свою очередь, от производных по радиусу плотности и модуля сдвига, а также полным учетом горизонтальной составляющей силы Кориолиса (см. раздел 3 настоящей работы). В отсутствие указанных добавок кривые широтной зависимости дельта-факторов полусуточных волн наших моделей и модели DDW/NH совпадают с точностью до единиц в шестом знаке после запятой.

Таким образом, полученные в настоящей работе результаты в целом подтверждают выводы, сделанные по моделям DDW. Основным отличием нашего подхода является то, что при его реализации показана возможность получения теоретических амплитуд-

ных факторов, совпадающих с наблюдаемыми в пределах сотых долей процента, без привлечения предположения о негидростатическом поведении мантии Земли. Так, для получения наилучших в смысле совпадения теории с наблюдениями значений обычных и нагрузочных амплитудных факторов достаточной оказалась замена коры и верхней мантии модели PREM моделью IASP91. Помимо этого, достаточным явилось использование логарифмической функции крипа при учете диссипации суточных и полусуточных волн. Обоснованию этого утверждения посвящена работа [Жарков, Молоденский, 1977]. Примененная в настоящей работе более простая математика после небольшого дополнения способна существенно облегчить решение задачи расчета чисел Лява с учетом латеральных неоднородностей коры и верхней мантии Земли.

При сравнении теоретических значений амплитуд и дельта-факторов основных приливных волн с наблюдениями, в частности, выяснилось, что сами по себе кривые зависимостей амплитудных факторов для Земли без океана не позволяют судить о степени близости теоретических и наблюдаемых величин. Дело в том, что различные варианты моделей строения Земли приводят к заметным различиям не только обычных, но и нагрузочных дельта-факторов, применяемых при расчете океанического гравиметрического эффекта. Так, например, применение модели АК135-F приводит к значениям амплитудных факторов для Земли без океана, очень мало отличающихся от таковых для модели PREM. В то же время различие нагрузочных амплитудных факторов этих моделей приводит к тому, что после учета океанического эффекта прогнозные амплитудные факторы модели АК135-F для Земли с океаном существенно превосходят их значения не только для PREM, но и, например, для модели IASP91, для которой кривые амплитудных факторов для Земли без океана лежат существенно выше, чем кривые для моделей PREM и АК135-F. Одной из задач настоящей работы собственно и является сравнение результатов расчета прогнозных амплитудных дельта-факторов и сдвигов фаз приливных волн второго порядка для Земли с океаном, полученных по различным вариантам моделей строения Земли. Прежде всего, расчеты проведены для модели PREM и модифицированной (см. раздел 2) модели IASP91. Помимо этого, была применена модель строения Земли АК135-F и две ее модификации, описание которых дано в разделе 2 настоящей работы. Как показано, в частности, в работе [Спиридонов, Виноградова, 2017], на поверхности земного шара практически отсутствуют участки, свободные от действия океанической приливной нагрузки. Так, например, учет этой нагрузки в глубине европейского континента приводит к изменению амплитудного фактора волны  $M_2$  на 0.01–0.02, т.е. имеет решающее значение при сопоставлении теоретических и наблюдаемых данных. Высокоточный расчет этого эффекта наряду с применением наиболее современных океанических приливных моделей требует учета достаточно большого количества дополнительных факторов [Спиридонов, Виноградова, 2017]. Сравнение прогнозных и наблюдаемых значений, полученных на 14 сверхпроводящих гравиметрах сети GGP, проведено в разделе 5 настоящей работы. Наилучшие результаты получены по данным модели строения Земли IASP91 и океанической приливной модели FES2012 для волн  $M_2$  и  $O_1$ . Расхождение теории с наблюдениями составляет здесь сотые доли процента.

Результаты настоящей и предшествующих работ автора позволили создать первую отечественную программу прогноза параметров земных приливов ATLANTIDA3.1\_2014 [Спиридонов, 2014; Spiridonov et al., 2015]. Эта программа позволяет вычислять амплитуды и фазы океанического гравиметрического эффекта с учетом диссипации по шести океаническим приливным моделям и двум моделям строения Земли. Помимо этого, с ее

помощью можно получить значения амплитудных дельта-факторов приливных волн для упругой Земли без океана с учетом их широтной зависимости, а также прогнозные амплитудные дельта-факторы и сдвиги фаз для упругой Земли с океаном. Возможно также получение временных рядов приливов. Среди дополнительных возможностей программы можно выделить расчет амплитуд и фаз океанического гравиметрического эффекта в узлах сетки, а также расчет горизонтальных составляющих океанического эффекта. Программа защищена авторским свидетельством [Спиридонов, 2015б] и входит в комплект поставки отечественных абсолютных гравиметров GABL.

Здесь можно отметить, что программа ATLANTIDA3.1\_2014 уже успела зарекомендовать себя как надежное средство обработки данных отечественных абсолютных гравиметров. Так, в июне–июле 2013 г. по инициативе Центрального научно-исследовательского института геодезии, аэросъемки и картографии им. Ф.Н. Крассовского (ЦНИИГАиК) в России были проведены повторные международные сравнения абсолютных гравиметров на шести пунктах, расположенных в городах Москва, Звенигород, Пулково и Светлый (50 км от г. Выборг). В исследованиях принимали участие следующие организации: Геодезический институт Финляндии (Finnish Geodetic Institute, FGI, г. Хельсинки), Институт автоматизации и электротехники СО РАН (г. Новосибирск), НИИМоргеофизика-Сервис.ком (г. Мурманск) и ЦНИИГАиК (г. Москва). Кроме разностей в значениях приборов, были получены уникальные данные по изменениям силы тяжести на пунктах сравнения за период 2005–2013 гг. К сожалению, при обработке данных выяснилось несовершенство применявшейся в то время приливной программы российских гравиметров. Разница приливных поправок российских и американских абсолютных гравиметров достигала 6 мкГал, что в 2–3 раза перекрывало сходимость повторных измерений. После применения программы ATLANTIDA3.1\_2014 систематические разности некоторых приборов достигли нулевых значений. Таким образом, результаты сравнений показали, что российские гравиметры работают на уровне, близком к уровню американских, что позволяет сохранять статус российской абсолютной гравиметрии как одной из передовых в мире (В.Д. Юшкин, Государственный астрономический институт им. П.К. Штернберга Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова, устное сообщение). Последнюю версию этой программы можно найти на сайте Института физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН (URL: <http://www.ifz.ru/applied/prognoz-parametrov-zemnykh-prilivov/>).

Структура статьи следующая. В разделе 1 получена система уравнений шестого порядка и выписаны граничные условия. В этой части настоящая работа является прямым продолжением работ [Молоденский, 1953; Молоденский, Крамер, 1961]. Реальный эллипсоид заменен сферой с соответствующими распределениями плотности и потенциала на сферических поверхностях. В разделе 2 рассмотрены основные методы вычислений и дано краткое описание исходных данных, в том числе применяемых вариантов моделей строения Земли. Раздел 3 посвящен выводу формул для расчета относительных и кориолисовых ускорений. В разделе 4 резюмируются основные численные результаты работы. В частности, проведено сравнение результатов, полученных по различным моделям строения Земли, а также по известным моделям DDW/H и DDW/NH. В разделе 5 проведен сравнительный анализ теоретических и наблюдаемых значений амплитудных дельта-факторов и сдвигов фаз полусуточных и суточных приливных волн для Земли с океаном. В разделе 6 кратко обсуждаются полученные результаты. Для облегчения понимания приведенных материалов работа дополнена Приложениями.

## 1. Уравнения и граничные условия

Представленная в настоящем разделе итоговая система уравнений (26)–(31) представляет собой ее модификацию, полученную в работе [Спиридонов, 2016б]. Отличие состоит в отказе от принятого ранее допущения (9') относительно функции  $\tau$  (здесь она дана и обсуждается сразу после выражения (9)), а также в независимости параметров Ламе от широты. Также в настоящей работе более детально прописан механизм получения уравнения (18) из уравнений (11) и (12) и немного изменен ход вывода уравнений. И хотя отличие результатов, полученных при помощи обеих обсуждаемых систем, достаточно мало, приведенный в настоящей статье вариант уравнений является, на наш взгляд, более правильным.

Двухосная эллиптическая оболочка Земли представлена в виде сферических слоев с зависящим от широты потенциалом (32). Плотность  $\rho$  на сферических поверхностях зависит от ее среднего значения на эллипсоидах  $\rho_0$ , радиуса  $r$ , а также кошироты  $\theta$  и сжатия  $\varepsilon$  следующим образом:

$$\rho = \rho_0 (1 - \varepsilon p_2). \quad (1)$$

Здесь  $p_2 = 1/3 - \cos^2 \theta$ .

Легко показать, что распределение плотности по сферическим поверхностям вида (1) соответствует реальному потенциалу эллиптической оболочки с точностью до первого порядка по сжатию. Потенциал на сферических поверхностях (32) зависит от широты известным образом. Зависящими от широты полагаются также и три искомые функции  $H, T, R$ , через которые определяются обычные и нагруженные числа Лява.

Внешний (или нагружающий) потенциал  $\omega$  является однородным гармоническим многочленом порядка  $n$ :

$$\Delta \omega = 0, \quad (2)$$

$$r \frac{\partial \omega}{\partial r} = n \omega. \quad (3)$$

Этот потенциал, в частности, вызывает появление добавочного потенциала  $V_i$ , возникающего вследствие смещения масс из-за деформации. Из (3) следует, что  $\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\omega}{r^n} \right) = 0$ .

Координаты вектора смещения  $\vec{u}$  в направлении радиуса, кошироты и долготы обозначим как  $u_r, u_\theta, u_\varphi$ . Тогда составляющие тензора деформаций примут вид

$$\begin{aligned} u_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r}; & u_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}; & u_{\varphi\varphi} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_\theta}{r} \operatorname{ctg} \theta + \frac{u_r}{r}; \\ 2u_{\theta\varphi} &= \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_\varphi}{\partial \theta} - u_\varphi \operatorname{ctg} \theta \right) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \varphi}; & 2u_{r\theta} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta}; \\ 2u_{\varphi r} &= \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r} - \frac{u_\varphi}{r}. \end{aligned} \quad (4)$$

Объемное расширение равно:

$$\delta = \operatorname{div} \vec{u} = u_{rr} + u_{\theta\theta} + u_{\varphi\varphi}. \quad (5)$$

В приведенных обозначениях уравнение, описывающее напряженное состояние упругой оболочки, имеет вид

$$\left[ \text{grad}((\vec{u} \cdot \text{grad} V) + \omega + V_i) - \delta \cdot \text{grad} V \right] + \text{grad}(\lambda \delta) + \nabla \hat{T} = 0. \quad (6)$$

Это уравнение аналогично уравнениям (1.15) из работы [Молоденский, 1953]. В дальнейшем в правой части уравнения (6) также будут учтены относительные и кориолисовы ускорения (см. раздел 3). Здесь  $\hat{T}$  – тензор напряжений:

$$\begin{aligned} \hat{T}_{rr} &= 2\mu \cdot u_{rr}; & \hat{T}_{\theta\theta} &= 2\mu \cdot u_{\theta\theta}; & \hat{T}_{\varphi\varphi} &= 2\mu \cdot u_{\varphi\varphi}; \\ \hat{T}_{\theta\varphi} &= \mu 2u_{\theta\varphi}; & \hat{T}_{r\theta} &= \mu 2u_{r\theta}; & \hat{T}_{\varphi r} &= \mu 2u_{\varphi r}, \end{aligned}$$

а  $\lambda$  и  $\mu$  – параметры Ламе.

Решение уравнений (6) будем искать в виде

$$\begin{aligned} u_r &= H \cdot \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right), \\ u_\theta &= -\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \frac{T}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right), \\ u_\varphi &= T \cdot \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Помимо этого, введем следующие обозначения:

$$V_i + \omega = R \frac{\bar{\omega}}{r^n}; \quad \bar{\omega} = \frac{\omega \cdot a^{n-1}}{g_0}.$$

В (7) входят три вспомогательных функции глубины и широты: функция  $H$ , характеризующая радиальное смещение;  $T$  – тангенциальное смещение;  $R$  – изменение потенциала в результате деформации. Значения этих функций на поверхности Земли, как было сказано выше, фактически представляют собой искомые числа Лява.

Первый член в выражении для  $u_\theta$  необходим для того, чтобы объемное расширение не зависело от производных внешнего потенциала по координатам.

С учетом (7) и (4) объемное расширение (5) равно (см. также Приложение А):

$$\delta = (f - \varphi) \cdot \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right), \quad (8)$$

где  $f = H' + \frac{2}{r} \cdot H - \frac{n(n+1)}{r^2} \cdot T$ , а  $\varphi = \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \text{ctg} \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right)$ .

Компоненты тензора напряжений имеют вид

$$\begin{aligned} \hat{T}_{rr} &= 2\mu \cdot H' \cdot \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right); \\ \hat{T}_{\theta\theta} &= \left[ \frac{2\mu}{r} H - \frac{2\mu}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right] \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \frac{2\mu}{r^2} T \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right); \\ \hat{T}_{\varphi\varphi} &= \left[ \frac{2\mu H}{r} - \frac{2\mu}{r^2} \text{ctg} \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right] \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \frac{2\mu T}{r^2} \text{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \frac{2\mu T}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{T}_{r\theta} &= \left[ \frac{\mu}{r} \tau \right] \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \left[ \mu T' - \frac{2\mu}{r} T + \mu H \right] \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right); \\ \hat{T}_{r\varphi} &= \left[ \mu T' - \frac{2\mu}{r} T + \mu H \right] \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right); \\ \hat{T}_{\theta\varphi} &= -\frac{2\mu T}{r^2 \sin \theta} \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \frac{2\mu T}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \varphi} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right).\end{aligned}\quad (9)$$

Здесь  $\tau = -\frac{\partial T'}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial H}{\partial \theta}$ .

Первое слагаемое  $\left[ \frac{\mu}{r} \tau \right] \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right)$  в выражении для  $\hat{T}_{r\theta}$  является следствием зависимости искомых функций на сферических поверхностях от широты. Сдвиговое по своей природе, это напряжение действует по нормали к сферическим поверхностям (см. также выражение (21)), не приводя в то же время к изменению объемного расширения (8). Анализ показывает, что данное напряжение зависит от первой производной геопотенциала по широте и производных от плотности и модуля сдвига по радиусу. (Вывод функции  $\tau$  содержится в Приложении D.) Строго говоря, это напряжение полностью независимо от вводимых ниже напряжений  $N$  (22) и  $M$  (23), что позволяет применять их при приведении итоговой системы уравнений к виду, наиболее удобному для интегрирования.

Группируя в (6) члены, стоящие при одинаковых производных от  $\left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right)$  (можно легко показать, что эта процедура корректна хотя бы вследствие того, что функция  $\left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right)$  и ее производная по широте не выражаются друг через друга линейно), имеем следующую систему (подробный вывод этих уравнений содержится в Приложении B):

$$\begin{aligned}2\mu' H' + \frac{\mu(T' - H) \cdot n(n+1)}{r^2} + 2\mu f' + \frac{2\mu}{r} \varphi + \rho(HV' + R)' - \rho(f - \varphi)V' + (\lambda(f - \varphi))' + \\ + \frac{\mu}{r^2} \left( \frac{\partial \tau}{\partial \theta} + \operatorname{ctg} \theta \cdot \tau \right) = 0,\end{aligned}\quad (10)$$

$$\rho(HV' + R) + \lambda(f - \varphi) + \mu T'' + 2\mu f - \mu H' + \mu' \left( T' - \frac{2T}{r} + H \right) + \rho \frac{T}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} - \frac{2\mu}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0,\quad (11)$$

$$\rho(HV' + R) + \lambda(f - \varphi) + \mu T'' + 2\mu f - \mu H' + \mu' \left( T' - \frac{2T}{r} + H \right) - \frac{4\mu}{r^2} \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0,\quad (12)$$

$$\frac{\rho T}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{2\mu}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0,\quad (13)$$

$$2\mu \frac{\partial H}{\partial \theta} + \rho r^2 \left( \frac{T}{r^2} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right)' = 0,\quad (14)$$

$$\begin{aligned}\frac{\rho}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (HV' + R) - \frac{\rho}{r} (f - \varphi) \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{\lambda}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (f - \varphi) + \frac{2\mu}{r^2} \left( \frac{\partial H}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) - \\ - \frac{2\mu}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} + \frac{(\mu\tau)'}{r} + \frac{2\mu\tau}{r^2} = 0.\end{aligned}\quad (15)$$

Уравнение (13) позволяет исключить из остальных уравнений производную  $\partial T / \partial \theta$ :

$$\frac{\partial T}{\partial \theta} = - \left( \frac{\rho}{2\mu} \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) \cdot T, \quad (16)$$

а уравнение (14) – производную  $\partial H / \partial \theta$ .

Численный анализ показал, что уравнения (11) и (12) приводят к одинаковым результатам вычисления дельта-факторов с точностью почти до членов второго порядка по сжатию, несмотря на то, что сами эти уравнения отличаются на величины первого порядка по сжатию. В дальнейшем мы будем рассматривать полусумму этих уравнений (18), которая приводит в дальнейшем к уравнению (30). Применение полусуммы можно обосновать следующим образом. Левые части уравнений (11) и (12) представляют собой ортогональные между собой (в направлении кошироты и долготы) составляющие одной и той же тангенциальной силы. При вычислении чисел Лява  $k$  и  $h$ , отвечающих за изменение потенциала и вертикальные смещения, мы, строго говоря, работаем с модулем этой силы (тангенциального напряжения), а не с ее проекциями на оси. В то же время, если учесть, что функции  $\rho \frac{T}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} - \frac{2\mu}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = \delta_1$  и  $-\frac{4\mu}{r^2} \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} = \delta_2$  являются членами первого порядка по сжатию, то, отбрасывая члены второго порядка по сжатию, для модуля вектора с координатами  $(A + \delta_1; A + \delta_2)$ , где

$$A = \rho(HV' + R) + \lambda(f - \varphi) + \mu T'' + 2\mu f - \mu H' + \mu' \left( T' - \frac{2T}{r} + H \right),$$

имеем:

$$\sqrt{(A + \delta_1)^2 + (A + \delta_2)^2} \approx \sqrt{2} \left( A + \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} \right).$$

Другой вопрос, что при вычислении составляющих тангенциальных напряжений и чисел Шиды функции  $\delta_1$  и  $\delta_2$  должны учитываться в итоговом уравнении (30) отдельно. Однако, как мы увидим из приведенных ниже оценок, получаемые при этом изменения настолько малы, что ими вполне можно пренебречь при обработке результатов самых высокоточных современных измерений.

Обсудим величины разностей значений амплитудных дельта-факторов и чисел Лява второго порядка, рассчитанных по указанной полусумме и отдельно по уравнениям (11) и (12), на примере полусуточных волн. Эти разности определяются анизотропией свойств оболочки, т.е. различиями в изменениях плотности и потенциала в широтном и долготном направлениях (эллиптичность), а также различием в действии сил инерции и Кориолиса.

Для проведения отдельного расчета по уравнениям (11) и (12) необходимо в уравнении (30) заменить слагаемое  $-\frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \psi$  (в скобках при  $T/n$ ) на  $-\frac{2\mu\lambda}{\lambda + 2\mu} \psi - K \cos 2\theta$  и  $-\frac{2\mu\lambda}{\lambda + 2\mu} \psi - K \cos^2 \theta$  соответственно. Здесь

$$K = 4\rho \left[ \frac{4\pi G}{5} \left( \frac{I_2}{r^3} + r^2 I_3 + \frac{r^2 \Omega^2}{2} \right) \right],$$

где  $G$  – гравитационная постоянная;  $\Omega$  – угловая скорость вращения Земли; значения интегралов  $I_2, I_3$  приведены в формулах (33). Помимо этого, необходимо также учесть различия в указанных двух направлениях (по кошироте и долготе) сумм относительных и кориоли-

совых ускорений (см. раздел 3). Если этого не сделать, то разности на экваторе возрастут почти на порядок. При расчете по уравнению (11) слагаемое  $-2\rho r^2 \Omega^2 \sin^2 \theta$  (в скобках при  $T/n$ ) в уравнении (30) необходимо заменить на  $-4\rho r^2 \Omega^2 \sin^2 \theta$ , а при расчете по (12) его следует занулить (полная компенсация относительных и кориолисовых ускорений).

Полученные в результате указанных действий отклонения значений амплитудного дельта-фактора от среднего варианта (полусуммы уравнений (11) и (12)) и от результатов, полученных по (11) и (12) в отдельности, плавно нарастают от полюса к экватору, принимая значения от нуля до  $1.25 \cdot 10^{-5}$  соответственно ( $6.21 \cdot 10^{-6}$  – на широте  $45^\circ$ ). Причем широтные зависимости амплитудных факторов и чисел Лява, полученные по (11) и (12), полностью симметричны относительно зависимости, рассчитанной по (18). Для чисел Лява  $k$ ,  $h$ , и  $l$  указанные отклонения на экваторе равны соответственно  $2.78 \cdot 10^{-5}$ ,  $5.42 \cdot 10^{-5}$  и  $7.21 \cdot 10^{-6}$ , что составляет  $9.3 \cdot 10^{-3}$ ,  $8.9 \cdot 10^{-3}$  и  $8.4 \cdot 10^{-3}$  % от величины этих чисел. На широте  $45^\circ$  те же отклонения по абсолютной величине составляют  $1.39 \cdot 10^{-5}$ ,  $2.71 \cdot 10^{-5}$  и  $3.62 \cdot 10^{-6}$  соответственно. Приведенные здесь различия почти на полтора порядка величины меньше исследуемых в настоящей работе широтных изменений. Таким образом, изменением амплитудных факторов и чисел Лява, связанных с анизотропией свойств оболочки, можно полностью пренебречь.

Из (10)–(13) имеем первые два необходимых уравнения:

$$-(\lambda(f - \varphi) + 2\mu H')' = \rho(HV' + R)' - \rho V'f + \frac{4\mu}{r} \left( H' - \frac{H}{r} \right) - \frac{n \cdot (n+1)}{r^2} \mu \cdot \left( T' + H - \frac{4T}{r} \right) + \left( \rho V' + \frac{2\mu}{r} \right) \cdot \varphi + \frac{\mu}{r^2} \left( \frac{\partial \tau}{\partial \theta} + \text{ctg} \theta \cdot \tau \right); \quad (17)$$

$$-\left[ \mu \cdot \left( T' + H - \frac{2}{r} T \right) \right]' = \rho(HV' + R) + \lambda f + \frac{2\mu}{r} \left( 2H + T' - \frac{n^2 + n + 1}{r} T \right) - (2\mu + \lambda) \varphi. \quad (18)$$

Здесь

$$\varphi = \left[ -\frac{\rho}{2\mu} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \text{ctg} \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) \right] \frac{T}{r^2} = -\psi \frac{T}{r^2}, \quad (19)$$

где

$$\psi = \frac{\rho}{2\mu} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \text{ctg} \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right).$$

Выражение (19) получено путем подстановки равенства (16) в выражение для  $\varphi$ , следующее после равенства (8).

Третье уравнение получается из уравнения Пуассона:

$$\Delta V_i = 4\pi G \cdot \text{div}(\rho u).$$

При этом

$$\Delta V_i = \Delta \left( R \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) = \left( R'' + \frac{2}{r} R' - \frac{n(n+1)}{r^2} R + \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2 R}{\partial \theta^2} + \text{ctg} \theta \frac{\partial R}{\partial \theta} \right) \right) \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \frac{2}{r^2} \frac{\partial R}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right),$$

а

$$\text{div}(\rho u) = \rho' u_r + \frac{1}{r} \frac{\partial \rho}{\partial \theta} u_\theta + \rho \delta.$$



Приравнивая члены при одинаковых производных от нагружающего потенциала и учитывая (19) и (1), получим

$$R'' + \frac{2}{r} R' - \frac{n(n+1)}{r^2} R = 4\pi G \left[ \rho(f - \varphi) + \rho' H - 3\varepsilon \rho p_2 \frac{T}{r^2} \right]. \quad (20)$$

Система уравнений (23)–(26) очень похожа на аналогичную систему из работы [Молоденский, 1953] и отличается от нее только пятью членами, содержащими  $\varphi$ ,  $\tau$  и  $\varepsilon$ . Появление этих членов связано с зависимостью от широты на сферических поверхностях потенциала и плотности и, как следствие, искомым функций  $H$ ,  $T$  и  $R$ .

Давление на рассматриваемых сферических поверхностях с учетом (9) будет равно:

$$P = P_0 + \left( \lambda \delta + \hat{T}_{rr} \right) + \hat{T}_{r\theta} + \hat{T}_{r\varphi} = P_0 + (2\mu H' + \lambda(f - \varphi)) \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \left( \frac{\mu}{r} \tau \right) \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \left[ \mu T' - \frac{2\mu}{r} T + \mu H \right] \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \left[ \mu T' - \frac{2\mu}{r} T + \mu H \right] \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right). \quad (21)$$

Из уравнений (17)–(20) можно получить шесть уравнений первого порядка путем введения следующих переменных:

$$N = (\lambda + 2\mu) H' + \frac{2\lambda}{r} H - \lambda \left( \varphi + \frac{n(n+1)}{r^2} T \right), \quad (22)$$

$$M = r^2 \mu \left( T' - \frac{2}{r} T + H \right), \quad (23)$$

$$L = r^2 (R' - 4\pi G \rho H). \quad (24)$$

Эти переменные имеют тот же смысл, что и в работе [Молоденский, Крамер, 1961], а именно:  $M$  и  $N$  – тангенциальная и нормальная (к поверхности сферы) компоненты напряжения;  $L$  – функция, связанная с изменением потенциала в результате деформации сферы;  $G$  – гравитационная постоянная. Напряжение  $N$  (22) в силу сказанного при обсуждении равенств (9) ведет себя независимо от входящего в (21) напряжения, содержащего функцию  $\tau$ , и независимо входит в граничное условие (37).

При решении системы (17)–(20) были приняты следующие нормировки: за единицу длины принят средний радиус Земли, за единицу плотности – ее средняя плотность, а за единицу ускорения – ускорение силы тяжести на ее поверхности. В эти же единицы были пересчитаны постоянные Ламе  $\lambda$ ,  $\mu$  и гравитационная постоянная. Кроме того, в связи с быстрым ростом искомым функций по мере увеличения порядка  $n$  и необходимостью дальнейшего расчета не только обычных, но и нагрузочных чисел Лява, было предпринято следующее нормирование относительно порядка искомым функций [Перцев, 1976]:

$$\begin{aligned} H &= (2n+1) \bar{H} / r^n, & T &= \bar{T} / r^n, & R &= \bar{R} / r^n, \\ L &= (n+1) \bar{L} / r^n, & M &= n \bar{M} / r^n, & N &= n(2n+1) \bar{N} / r^n. \end{aligned} \quad (25)$$

В результате интегрируемая система шестого порядка принимает вид

$$\bar{H}' = \left( n - 2 \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \right) \frac{1}{r} \bar{H} + \left[ [n(n+1) - \psi] \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \right] \frac{1}{2n+1} \frac{1}{r^2} \bar{T} + \frac{n}{\lambda + 2\mu} \bar{N}; \quad (26)$$

$$\bar{T}' = -(2n+1) \bar{H} + \frac{1}{r} (n+2) \bar{T} + \frac{n}{r^2 \mu} \bar{M}; \quad (27)$$

$$\bar{R}' = 4\pi G\rho(2n+1)\bar{H} + \frac{n}{r}\bar{R} + \frac{1}{r^2}(n+1)\bar{L}; \quad (28)$$

$$\bar{L}' = 4\pi G\rho\left(\frac{\Psi - 3\varepsilon p_2}{n+1} - n\right)\bar{T} + n\bar{R} + \frac{n}{r}\bar{L}; \quad (29)$$

$$\begin{aligned} \bar{M}' = & -\left[2\mu r \frac{2\mu + 3\lambda}{\lambda + 2\mu} + \rho r^2 V'\right] \frac{2n+1}{n} \bar{H} + \\ & + \left[n(n+1) \frac{2\mu\lambda}{\lambda + 2\mu} + 2\mu(n^2 + n - 1) - \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \Psi - 2\rho r^2 \Omega^2 \sin^2 \theta\right] \frac{1}{n} \bar{T} - \\ & - \frac{\rho r^2}{n} \bar{R} + \frac{n}{r} \bar{M} - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} r^2 (2n+1) \bar{N}; \end{aligned} \quad (30)$$

$$\begin{aligned} N' = & \left[\frac{4}{r^2} \cdot \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + 2\mu} + \frac{4}{r} \rho V' + \frac{2\mu\Psi}{r^2} - 2\rho\Omega^2 - 4\rho\Omega^2 \cos^2 \theta\right] \frac{1}{n} \bar{H} - \\ & - \left[\left(\rho V' + \frac{2}{r}\mu + \frac{4}{r} \frac{\mu\lambda}{\lambda + 2\mu}\right) \left[(n+1) - \frac{\Psi}{n}\right] + \left(\frac{\rho}{2\mu}\right)' \cdot \left(\frac{2\mu}{\rho}\right) \frac{\mu\Psi}{n}\right] \frac{1}{r^2} \frac{1}{2n+1} \bar{T} - \frac{\rho}{r^2} \frac{n+1}{n(2n+1)} \bar{L} + \\ & + \frac{1}{r^4} \frac{n(n+1)}{2n+1} \bar{M} + \frac{1}{r} \left[n - 4 \frac{\mu}{\lambda + 2\mu}\right] \bar{N}. \end{aligned} \quad (31)$$

Уравнения (26), (27) и (28) получаются непосредственно из (22), (23) и (24) путем выражения производных искомых функций. Для получения уравнения (29) необходимо из (24) выразить  $R'$  и  $R''$  и подставить в (20). Для вывода уравнения (30), прежде всего, осуществляется подстановка (23) в (18), затем раскрываются выражения для функций  $f$  и  $\varphi$  (19), а после этого применяются ненормированные варианты уравнений (26) и (27) для исключения производных по радиусу от функций  $H$  и  $T$ . Наконец, чтобы получить (31), необходимо подставить в левую часть (17) ее выражение, полученное из (22), затем заменить  $H'$  ненормированным уравнением (26). После группировки слагаемых, нормировки и применения (35) приходим к (31). Вывод уравнений (26)–(31) содержится в Приложении С.

Входящие в уравнения (30) и (31) слагаемые  $-2\rho r^2 \Omega^2 \sin^2 \theta$  (в скобках при  $\frac{1}{n} \bar{T}$ ) и  $-4\rho \Omega^2 \cos^2 \theta$  (в скобках при  $\frac{1}{n} \bar{H}$ ) выражают поправки за относительные и кориолисовы ускорения для полусуточных волн, вычисленные в разделе 3 настоящей работы (формулы (54)), а также в работе [Спиридонов, 2016а]. Для суточных волн эти поправки соответственно будут иметь вид (55)  $-\rho r^2 \Omega^2 (1 - 4\cos^2 \theta - 2\sin^2 \theta)$  и  $-\rho \Omega^2 (1 - 4\sin^2 \theta)$ . Здесь  $\Omega$  – средняя угловая скорость вращения Земли. Из приведенных выражений видно, что зависимость обсуждаемых поправок как для суточных, так и для полусуточных волн от широты фактически представляет собой функцию  $p_2$ . Таким образом, формы кривых, выражающих широтные зависимости амплитудных дельта-факторов на поверхности Земли, вызванных добавлением относительных и кориолисовых ускорений, должны полностью совпадать, а сами кривые отличаться лишь на константу вследствие в том числе различий, проявляющихся при учете диссипации. Мы вернемся к обсуждению этого вопроса в разделе 4.

Входящий в (19) и систему (26)–(31) невозмущенный геопотенциал  $V$  на сферических поверхностях равен [Буллен, 1978]:

$$V = 4\pi G \left[ \frac{1}{r} I_1 + \int_{r_x}^a \rho q dq + \frac{p_2}{5} \left( \frac{1}{r^3} I_2 + r^2 I_3 \right) \right] + \frac{r^2 \Omega^2 (2 + 3p_2)}{6}, \quad (32)$$

где, как и в (1),  $p_2 = \frac{1}{3} - \cos^2 \theta$ , и

$$I_1 = \int_0^{r_x} \rho q^2 dq; \quad I_2 = \int_0^{r_x} \rho \frac{d(\varepsilon q^5)}{dq} dq; \quad I_3 = \int_{r_x}^a \rho \frac{d\varepsilon}{dr} dr; \quad (33)$$

$$V' = 4\pi G \left[ -\frac{I_1}{r^2} + \frac{p_2}{5} \left( -\frac{3}{r^4} I_2 + 2r I_3 \right) \right] + \frac{r \Omega^2 (2 + 3p_2)}{3}; \quad (34)$$

$$\rho V'' - \frac{2}{r} \rho V' = -\frac{2\mu\psi}{r^2} + 2\rho \Omega^2 - 4\pi G \rho^2 - \frac{4}{r} \rho V'; \quad (35)$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} = -4\pi G \cdot \frac{6p_2}{5} \left( \frac{1}{r^3} I_2 + r^2 I_3 \right) - 3r^2 \Omega^2 p_2. \quad (36)$$

Изменение сжатия и его производной с глубиной рассчитывалось при помощи уравнения Клеро в приближении Радо. Это приближение справедливо с точностью до второго порядка по сжатию.

Если порядок внешнего потенциала  $n \geq 2$ , граничные условия на поверхности сферы радиуса  $a$  при расчете чисел Лява для упругой Земли без океана будут следующими [Перцев, 1976] (приводятся без нормировки):

$$N = 0, \quad (37)$$

$$M = 0, \quad (38)$$

$$L = (2n + 1) a^2 g_0 - \frac{n + 1}{a} R, \quad (39)$$

где  $g_0 = -V'(a)$  – ускорение силы тяжести на поверхности Земли. При расчете нагрузочных чисел Лява условие (37) заменяется условием

$$N = -\frac{g_0^2}{3n} r_m^{n+1}.$$

Еще три условия определены на границе ядро–мантия:

$$L - r(n + rv)R + 4\pi G \rho_i r^2 H = 0, \quad (40)$$

$$M = 0, \quad (41)$$

$$N + \rho_i (R + V'H) = 0. \quad (42)$$

Здесь  $\rho_i$  – плотность ядра на границе с мантией;  $G$  – гравитационная постоянная;  $r_m$  – радиус мантии. Функция  $v$  вычисляется согласно уравнению [Молоденский, 1953]

$$v' + v^2 + \frac{2(n+1)}{r} v + 4\pi G \frac{\rho'}{V'} = 0.$$

Интегрирование этого уравнения ведется от центра Земли до границы ядро–мантия.

Значения плотности, ускорения свободного падения и потенциала в условиях (37)–(42) полагаются зависящими от широты согласно (1) и (34). Предварительно условия (37)–(42) также нормировались согласно (25).

Особенности вычисления нагрузочных чисел Лява порядка 0 и 1 обсуждаются в работе [Vinogradova, Spiridonov, 2013].

## 2. Основные методы вычислений и исходные данные

В основу интегрирования приведенных выше уравнений положен метод ломаных Эйлера, однако полученный алгоритм решения задачи можно легко переформулировать и для метода Рунге–Кутты, что с учетом указанного ниже шага интегрирования точности значений исходных данных и возможностей современной вычислительной техники вряд ли имеет смысл. Интегрирование краевой задачи (26)–(31) фактически было сведено к решению задачи Коши. Для этого векторы-столбцы значений шести искомых функций на верхней и нижней границах были связаны между собой через матрицу, представляющую собой произведение вспомогательных матриц, элементы которых, в свою очередь, последовательно выражают переменные коэффициенты уравнений (26)–(31) на конкретной глубине, умноженные на шаг интегрирования. Подробнее с методом интегрирования краевой задачи можно ознакомиться, например, в работе [Vinogradova, Spiridonov, 2013].

Интегрирование проводилось для пяти вариантов моделей строения Земли.

Модель АК135-F представляет собой один из вариантов модели сейсмических скоростей, полученный в работе [Kennett et al., 1995]. Этот вариант дополнен кривыми плотности и добротности из работы [Montagner, Kennett, 1996]. В настоящей работе рассмотрены еще два варианта этой модели, которые в дальнейшем будем обозначать как АК135-Q<sub>PREM</sub> и АК135-760. Модель АК135-Q<sub>PREM</sub> отличается от модели АК135-F только тем, что в ней значения факторов добротности из работы [Montagner, Kennett, 1996] на всех глубинах заменены таковыми из модели PREM [Dziewonski, Anderson, 1981]. В модели АК135-760 до глубины 760 км применены значения из модели АК135-Q<sub>PREM</sub>, а ниже – из модели PREM.

Также интегрирование краевой задачи проводилось для моделей PREM и IASP91. Данные модели PREM были взяты из работы [Dziewonski, Anderson, 1981], а модели IASP91 – из [Kennett, Engdahl, 1991]. Поскольку модель IASP91 не имеет собственной кривой плотности, то оценки плотности для этой модели до глубины 760 км были взяты из работы [Geissler et al., 2008], а значения фактора добротности приняты такими, что и для модели PREM. Ниже указанной границы как плотность, так и упругие параметры Ламе и добротность были взяты из модели PREM. Таким образом, основное внимание было уделено влиянию на величину обычных и нагрузочных чисел Лява различных референц-моделей особенностей строения коры и верхней мантии Земли.

С целью учета диссипации скорости сейсмических волн предварительно пересчитывались с референц-периода модели строения Земли на периоды приливных волн при помощи логарифмической функции крипа. В дальнейшем по ним определялись параметры Ламе. Полученные функции плотности, модуля всестороннего сжатия, модуля сдвига и ускорения свободного падения, а также сжатия рассчитывались с шагом  $t = 33.(3)$  м. Затем их значения, а также значения радиуса и шага нормировались и производилось вычисление переменных коэффициентов, входящих в правые части уравнений (26)–(31). Принятая величина шага интегрирования обеспечивает точность вычисления амплитудных дельта-факторов второго порядка до нескольких единиц в шестом знаке после запятой, а также дает возможность вычисления нагрузочных дельта-факторов до  $n = 50\,000$  с относительной погрешностью не хуже 0.05 %. Изменение сжатия с глубиной, как уже было сказано выше, вычислялось согласно уравнению Клеро в приближении Радо.

При определении амплитудных дельта-факторов суточных волн была применена резонансная кривая (24) и данные табл. 15 из работы [Dehant et al., 1999].

Океанический гравиметрический эффект вычислялся путем подстановки в известные формулы полученных нагрузочных чисел Лява вместе с коэффициентами разложения по сферическим функциям океанической приливной модели FES2012 [Carrère et al., 2012]. Разложение котидальных карт модели FES2012 велось до 1120 порядка. Фактически при расчете океанического гравиметрического эффекта была принята во внимание следующая группа факторов: 1) выбор модели строения Земли; 2) выбор океанической приливной модели, в том числе региональной; учет: 3) диссипации; 4) относительных ускорений; 5) кориолисовых ускорений; 6) эллиптичности Земли; 7) сил инерции; 8) сил, определяемых членами разложения геопотенциала до первого порядка по сжатию; 9) необходимость отказа от массовой коррекции; 10) необходимость отказа от методики, основанной на применении ближней зоны и функций Грина; 11) адекватный выбор шага интегрирования при вычислении нагрузочных чисел Лява высоких порядков [Стиридонов, Виноградова, 2016].

Прогнозные амплитудные дельта-факторы и сдвиги фаз (в градусах) для упругой Земли с океаном вычислялись по формулам

$$\delta_p = \sqrt{(A \cdot \delta_E + A_{oc} \cos \varphi_{oc})^2 + (A_{oc} \sin \varphi_{oc})^2} / A; \quad (43)$$

$$\Delta\varphi_p = \arctg(A_{oc} \sin \varphi_{oc} / (A \cdot \delta_E + A_{oc} \cos \varphi_{oc})) \cdot 180 / \pi. \quad (44)$$

Здесь  $\delta_p$  и  $\Delta\varphi_p$  – вычисляемые прогнозные амплитудные факторы и сдвиги фаз;  $\delta_E$  – амплитудный дельта-фактор для неупругой Земли без океана;  $A_{oc}$  и  $\varphi_{oc}$  – амплитуда и локальная фаза океанического гравиметрического эффекта;  $A$  – амплитуда рассматриваемой приливной волны для твердой эллипсоидальной Земли без океана.

### 3. Вычисление относительных и кориолисовых ускорений

В результате действия относительных и кориолисовых ускорений правая часть уравнений (6) становится отличной от нуля и принимает вид

$$\vec{L} = \rho \left( \ddot{\vec{u}} + 2 \left[ \vec{\omega} \dot{\vec{u}} \right] \right). \quad (45)$$

Здесь  $\vec{L}$  – вектор, представляющий собой сумму упругих и гравитационных сил. Этот вектор равен левой части уравнения (6). Два слагаемых в правой части –  $\ddot{\vec{u}}$  и  $2 \left[ \vec{\omega} \dot{\vec{u}} \right]$  – относительные и кориолисовы ускорения;  $\vec{u}$  – вектор смещения;  $\rho$  – плотность.

В сферической системе координат правую часть (45) можно представить в виде

$$\vec{a} = \ddot{\vec{u}} + 2 \left[ \vec{\omega} \dot{\vec{u}} \right] = \begin{bmatrix} \ddot{u}_\theta - 2\omega_r \dot{u}_\varphi \\ \ddot{u}_\varphi + 2\omega_r \dot{u}_\theta - 2\omega_\theta \dot{u}_r \\ \ddot{u}_r + 2\omega_\theta \dot{u}_\varphi \end{bmatrix}. \quad (46)$$

Здесь  $\omega_\theta$  и  $\omega_r$  – составляющие вектора угловой скорости вращения Земли  $\Omega$  ( $\omega_\varphi = 0$ ). Компоненты вектора  $\vec{a}$  в формуле (46) перечислены сверху вниз в порядке  $\theta$ ,  $\varphi$ ,  $r$ .

Учитывая, что

$$\ddot{\vec{u}} = -\sigma^2 \vec{u}; \quad \ddot{\vec{u}} = \sigma \dot{\vec{u}}; \quad \dot{\vec{u}} = -\sigma \vec{u};$$

а

$$\omega_\theta = -\Omega \sin \theta \quad \text{и} \quad \omega_r = \Omega \cos \theta,$$

выражение (46) можно переписать в виде

$$\vec{a} = \begin{bmatrix} -\sigma^2 u_\theta + 2\sigma\Omega \cos \theta \cdot u_\varphi \\ -\sigma^2 u_\varphi - 2\sigma\Omega \cos \theta \cdot u_\theta - 2\sigma\Omega \sin \theta \cdot u_r \\ -\sigma^2 u_r + 2\sigma\Omega \sin \theta \cdot u_\varphi \end{bmatrix}. \quad (47)$$

Рассмотрим отдельно кориолисовы ускорения. Представим вектор смещения в виде суммы вектора смещения нулевого решения  $\vec{u}^0$ , возникающего вследствие действия на сферическую оболочку только упругих и гравитационных сил, и дополнительного вектора смещения  $\delta\vec{u}$ , возникающего вследствие действия кориолисовых сил:

$$\vec{u} = \vec{u}^0 + \delta\vec{u}.$$

Подставляя это выражение в последние слагаемые (47), для кориолисова ускорения  $\vec{a}_{\text{COR}}$  имеем:

$$\vec{a}_{\text{COR}} = \begin{bmatrix} 2\sigma\Omega \cos \theta \cdot u_\varphi^0 \\ -2\sigma\Omega \cos \theta \cdot u_\theta^0 - 2\sigma\Omega \sin \theta \cdot u_r^0 \\ 2\sigma\Omega \sin \theta \cdot u_\varphi^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2\sigma\Omega \cos \theta \cdot \delta u_\varphi \\ -2\sigma\Omega \cos \theta \cdot \delta u_\theta - 2\sigma\Omega \sin \theta \cdot \delta u_r \\ 2\sigma\Omega \sin \theta \cdot \delta u_\varphi \end{bmatrix}. \quad (48)$$

В то же время составляющие вектора  $\delta\vec{u}$  равны

$$\delta\vec{u} = \begin{bmatrix} -2\frac{\Omega}{\sigma} \cos \theta \cdot u_\varphi \\ 2\frac{\Omega}{\sigma} \cos \theta \cdot u_\theta + 2\frac{\Omega}{\sigma} \sin \theta \cdot u_r \\ -2\frac{\Omega}{\sigma} \sin \theta \cdot u_\varphi \end{bmatrix}. \quad (49)$$

Подставляя (49) во второе слагаемое (48), имеем

$$\vec{a}_{\text{COR}} = \begin{bmatrix} 2\sigma\Omega \cos \theta \cdot u_\varphi^0 \\ -2\sigma\Omega \cos \theta \cdot u_\theta^0 - 2\sigma\Omega \sin \theta \cdot u_r^0 \\ 2\sigma\Omega \sin \theta \cdot u_\varphi^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4\Omega^2 \cos^2 \theta \cdot u_\theta + 4\Omega^2 \cos \theta \sin \theta \cdot u_r \\ 4\Omega^2 \cdot u_\varphi \\ 4\Omega^2 \cos \theta \sin \theta \cdot u_\theta + 4\Omega^2 \sin^2 \theta \cdot u_r \end{bmatrix}. \quad (50)$$

Работа  $A$  силы (50) на перемещениях нулевого решения равна:

$$A = \begin{bmatrix} 2\sigma\Omega \cos \theta \cdot u_\varphi^0 u_\theta^0 \\ -2\sigma\Omega \cos \theta \cdot u_\theta^0 u_\varphi^0 - 2\sigma\Omega \sin \theta \cdot u_r^0 u_\varphi^0 \\ 2\sigma\Omega \sin \theta \cdot u_\varphi^0 u_r^0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 4\Omega^2 \cos^2 \theta \cdot u_\theta u_\theta^0 + 4\Omega^2 \cos \theta \sin \theta \cdot u_r u_\theta^0 \\ 4\Omega^2 \cdot u_\varphi u_\varphi^0 \\ 4\Omega^2 \cos \theta \sin \theta \cdot u_\theta u_r^0 + 4\Omega^2 \sin^2 \theta \cdot u_r u_r^0 \end{bmatrix}. \quad (51)$$

Она же, следуя теореме Э. Бэтти о взаимности работ, равна работе упругих и гравитационных сил на добавочных смещениях  $\delta\vec{u}$ , вызываемых силой Кориолиса.

После интегрирования (51) по угловым переменным интегралы, содержащие смешанные произведения нулевого решения  $u_\varphi^0 u_\theta^0$  и  $u_r^0 u_\varphi^0$ , обратятся в нуль вследствие их зависимости от внешнего потенциала вида (7) (без первого слагаемого при  $u_\theta^0$ ). Обращение интегралов в нуль дает интегрирование по долготе. Для зональных приливов  $u_\varphi^0 = 0$ . Что касается произведений  $u_r u_\theta^0$  и  $u_\theta u_r^0$ , то соответствующие им составляющие силы Кориолиса (50) имеют смысл только в предположении зависимости чисел Лява от широты, попадая в этом случае в два дополнительных уравнения (14) и (15). Таким об-

разом, очевидно отличными от нуля и входящими в интегрируемые в дальнейшем уравнения (10), (11) и (12) являются только составляющие силы Кориолиса, соответствующие в (51) произведениям  $u_\theta u_\theta^0$ ,  $u_\varphi u_\varphi^0$  и  $u_r u_r^0$ , работа которых очевидно отлична от нуля. С учетом вышесказанного выражение для кориолисового ускорения имеет вид

$$\vec{a}_{\text{COR}} = \begin{bmatrix} 4\Omega^2 \cdot \cos^2 \theta \cdot u_\theta \\ 4\Omega^2 \cdot u_\varphi \\ 4\Omega^2 \cdot \sin^2 \theta \cdot u_r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4\Omega^2 \cdot \cos^2 \theta \cdot \frac{T}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) \\ 4\Omega^2 \cdot \frac{T}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) \\ 4\Omega^2 \cdot \sin^2 \theta \cdot H \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) \end{bmatrix}. \quad (52)$$

В таком виде это ускорение не снимает вырождения в уравнениях по угловым переменным в методе Лява. В то же время в уравнения (11) и (12) войдут различные составляющие этого ускорения, а именно, члены, содержащие  $4\Omega^2 \cos^2 \theta$  и  $4\Omega^2$ . Следуя той же логике, которую мы применяли при обсуждении этих уравнений, вместо указанных отдельных горизонтальных составляющих в дальнейшем будем рассматривать их полу-сумму, которая равна  $4\Omega^2 \cos^2 \theta + 2\Omega^2 \sin^2 \theta$ . (Для зональных волн второе слагаемое отсутствует.) Тогда, с учетом относительных ускорений, суммарная сила в тангенциальном и радиальном направлениях будет

$$\begin{cases} F_\tau = \rho \left( -\sigma^2 + 4\Omega^2 \cos^2 \theta + 2\Omega^2 \sin^2 \theta \right) \frac{T}{r}, \\ F_r = \rho \left( -\sigma^2 + 4\Omega^2 \sin^2 \theta \right) \cdot H. \end{cases} \quad (53)$$

Для полусуточных волн  $\sigma^2 = -4\Omega$ , и

$$\begin{cases} F_\tau = \rho \left( -4\Omega^2 \sin^2 \theta + 2\Omega^2 \sin^2 \theta \right) \frac{T}{r}, \\ F_r = \rho \left( -4\Omega^2 \cos^2 \theta \right) \cdot H, \end{cases} \quad (54)$$

а для суточных  $-\sigma^2 = -\Omega^2$ :

$$\begin{cases} F_\tau = \rho \left( -\Omega^2 (1 - 4\cos^2 \theta) + 2\Omega^2 \sin^2 \theta \right) \frac{T}{r}, \\ F_r = \rho \left( -\Omega^2 (1 - 4\sin^2 \theta) \right) \cdot H. \end{cases} \quad (55)$$

Силы (54) и (55) входят в приведенные выше уравнения (30) и (31). Выражения (54) для полусуточных волн отличаются от выражений (9), полученных в работе [Спирidonов, 2016], слагаемым  $+2\Omega^2 \sin^2 \theta$ , дополняющим тангенциальную составляющую силы Кориолиса до полного вектора этой силы. Помимо этого, вывод силы Кориолиса в указанной работе отличается меньшей общностью. Фактически он выполнен только для волн второго порядка нулевой степени. Тем не менее результаты обеих работ совпадают, а указанное выше дополнительное слагаемое  $+2\Omega^2 \sin^2 \theta$  могло быть введено также и в [Спирidonов, 2016], но, к сожалению, эта возможность была тогда нами упущена. Также интересно отметить, что полученные выражения для составляющих силы Кориолиса (52) фактически не зависят от частоты волны. От частоты зависят только относительные ускорения. Этот на первый взгляд парадоксальный результат связан с тем обстоятельством, что та часть силы Кориолиса, которая совершает ненулевую часть работы (51), реализуется на смещениях (49), обратно пропорциональных частоте приливного потенциала.

#### 4. Основные численные результаты

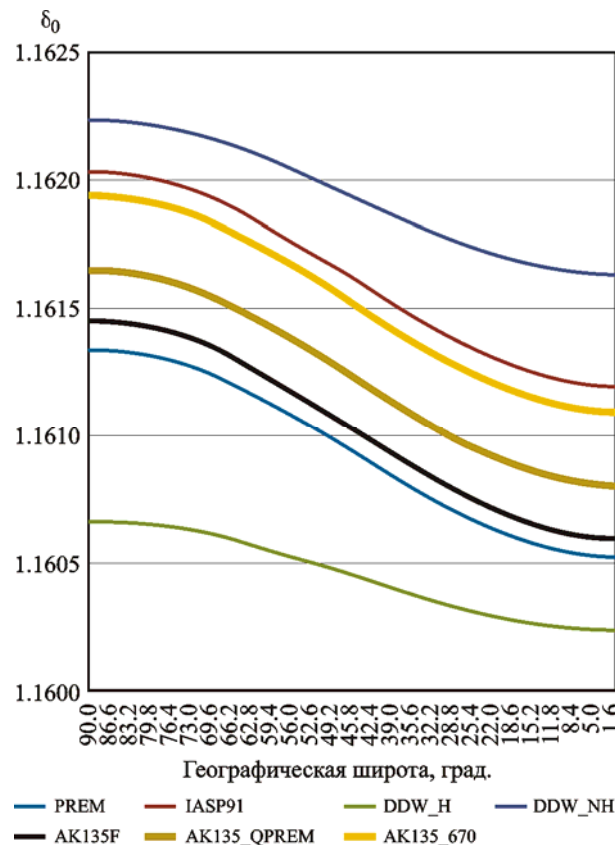
В этом разделе мы рассмотрим основные результаты расчетов, полученные по описанным выше трем вариантам модели строения Земли АК135 (АК135-F, АК135\_Q<sub>PREM</sub>, АК135\_760), а также по моделям PREM и IASP91, и сравним рассчитанные значения с результатами известных приливных моделей DDW/H и DDW/NH.

Прежде всего были определены значения амплитудных дельта-факторов полусуточных волн для сферической невращающейся неупругой Земли. Для этого из уравнений (26)–(31) были исключены слагаемые, содержащие функции  $\psi$  и  $\tau$ , а также сжатие  $\epsilon$ , а в граничных условиях (37)–(42) не учитывалась зависимость плотности и ускорения свободного падения от широты. Амплитудные факторы для вариантов модели строения Земли АК135 (АК135-F, АК135\_Q<sub>PREM</sub>, и АК135\_760) при этих условиях равны 1.15739, 1.15759 и 1.15777 соответственно. Для моделей PREM и IASP91 имеем 1.15731 и 1.15798 соответственно. Таким образом, разница между амплитудными факторами, вычисленными по вариантам моделей АК135-F, АК135\_Q<sub>PREM</sub> и АК135\_760 и полученными по модели PREM, составляет  $8.0 \cdot 10^{-5}$ ,  $2.8 \cdot 10^{-4}$  и  $4.6 \cdot 10^{-4}$  соответственно. При переходе от модели PREM к модели IASP91 указанная разность достигает  $6.7 \cdot 10^{-4}$ . При этом последние два значения ( $4.6 \cdot 10^{-4}$  и  $6.7 \cdot 10^{-4}$ ) характеризуют различия принятых строения коры и верхней мантии в сравниваемых референц-моделях. Напомним, что мы использовали значения модели IASP91 лишь до глубины 760 км, принимая при этом кривые плотности, более характерные для территории Европы, нежели для мира в целом, из работы [Geissler et al., 2008]. Модель АК135\_760 простиралась лишь до глубины 670 км. При этом значения факторов добротности для обеих моделей были взяты из модели PREM. В то же время следует отметить, что изменения дельта-факторов, связанные с латеральной неоднородностью коры и верхней мантии, определяемой относительно принятой референц-модели, должны быть несколько меньше – порядка  $(2-3) \cdot 10^{-4}$ . Что касается разности дельта-факторов в вариантах моделей АК135\_Q<sub>PREM</sub> и АК135-F, то она составляет  $2.0 \cdot 10^{-4}$  и характеризует различия диссипативных моделей. Все полученные выше разности мало меняются при всех дальнейших расчетах, что свидетельствует о слабой зависимости вводимых далее поправок за эллиптичность, вращение, а также за относительные и кориолисовы ускорения от выбора варианта модели строения Земли.

Учет эллиптичности неупругой оболочки и соответственно вращения Земли (без поправок за относительные и кориолисовы ускорения) приводит к появлению слабо выраженной зависимости амплитудных дельта-факторов от широты, а именно, к небольшому падению их значений для полусуточных волн от полюса к экватору. Это падение составляет  $3.38 \cdot 10^{-4}$ ,  $3.32 \cdot 10^{-4}$  и  $3.35 \cdot 10^{-4}$  для вариантов моделей АК135-F, АК135-Q<sub>PREM</sub> и АК135-760 соответственно и  $3.23 \cdot 10^{-4}$  и  $3.05 \cdot 10^{-4}$  для моделей IASP91 и PREM. Средние (на широте 45°) значения амплитудных факторов достигают последовательно для трех вариантов модели АК135 величин 1.16072, 1.16091 и 1.16120, а также 1.16063 – для модели PREM и 1.16131 – для модели IASP91. Для модели АК135 это на  $3.3 \cdot 10^{-3}$  больше приведенных выше значений для сферической невращающейся Земли. Такие же разности получаются для моделей PREM и IASP91.

Наконец, после учета относительных и кориолисовых ускорений, приходим к зависимостям амплитудных дельта-факторов полусуточных волн от широты, показанным на рис. 1. Для сравнения на этом же рисунке показаны соответствующие кривые для моделей DDW/H и DDW/NH. Значения дельта-факторов для трех вариантов модели АК135 на широте 45° составляют соответственно 1.16103, 1.16123 и 1.16152, а для моделей PREM и IASP91 – соответственно 1.16093 и 1.16161, что для каждой из моделей на  $3.0 \cdot 10^{-4}$  выше их значений без учета относительных и кориолисовых ускорений. Видно, что ближе всего расположены друг к другу кривые для моделей PREM и АК135-F, а также для моделей IASP91 и АК135-760. Характерные разности значений





**Рис. 1.** Зависимость от широты амплитудных дельта-факторов полусуточных волн для Земли без океана, вычисленных автором настоящей статьи для трех вариантов модели строения Земли АК135 и для моделей PREM и IASP91 и вычисленных в работе [Dehant et al., 1999] для моделей DDW/H и DDW/NH

между указанными парами моделей составляют величину порядка  $1 \cdot 10^{-4}$ . Амплитудные дельта-факторы нарастают от экватора к полюсу на  $8.5 \cdot 10^{-4}$  для всех трех вариантов модели АК135, на  $8.2 \cdot 10^{-4}$  – для модели PREM и на  $8.4 \cdot 10^{-4}$  – для модели IASP91. При этом формы кривых полученных в настоящей работе широтных зависимостей амплитудных факторов полусуточных волн отличаются от таковых для модели DDW/NH в пределах  $1 \cdot 10^{-4}$ . Эти отличия почти целиком определяются учетом дополнительного напряжения, содержащего функцию  $\tau$  (см. обсуждение после формулы (9) и Приложение D), а также члена  $+2\Omega^2 \sin^2 \theta$  в выражении (54) для силы Кориолиса. До учета этих добавок указанное совпадение формы кривых лежало в пределах единиц в шестом знаке после запятой, т.е. при совмещении по высоте полученные нами кривые полностью совпадали с кривыми модели DDW/NH.

В целом наши кривые несколько резче кривых моделей DDW. В этом можно убедиться, анализируя данные табл. 2, в которой показаны коэффициенты  $\delta_0$  и  $\delta^+$  принятых в работе [Dehant et al., 1999] аппроксимаций широтных зависимостей дельта-факторов полусуточных и суточных волн, выражаемых в виде формул (56а) и (56б) соответственно:

$$\delta(\theta) = \delta_0 + \delta^+ \frac{\sqrt{3}}{2} (7 \cos^2 \theta - 1), \tag{56a}$$

$$\delta(\theta) = \delta_0 + \delta^+ \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} (7 \cos^2 \theta - 3). \tag{56б}$$

Коэффициент  $\delta^+$  отвечает за форму широтной кривой;  $\theta$  – коширота.

Таблица 2. Значения амплитудных дельта-факторов полусуточных и суточных приливных волн, вычисленные по формулам (56а) и (56б)

Волна	Частота, цикл/сут.		DDW/H		DDW/NH		PREM		IASP		AK135-F		AK135_QPREM		AK135_670	
	$\delta_0$	$\delta^+$	$\delta_0$	$\delta^+$	$\delta_0$	$\delta^+$	$\delta_0$	$\delta^+$	$\delta_0$	$\delta^+$	$\delta_0$	$\delta^+$	$\delta_0$	$\delta^+$	$\delta_0$	$\delta^+$
M2	Полусуточные		1.16030	0.00007	1.16172	0.00010	1.16064	0.00013	1.16132	0.00014	1.16072	0.00014	1.16093	0.00014	1.16121	0.00014
P1	1.111613	1.216397	1.15474	0.00008	1.15623	0.00012	1.15515	0.00016	1.15582	0.00017	1.15523	0.00017	1.15544	0.00017	1.15572	0.00017
O1	1.080797	1.109950	1.15477	0.00008	1.15622	0.00012	1.15515	0.00016	1.15582	0.00017	1.15523	0.00017	1.15544	0.00017	1.15572	0.00017
OO1	1.073202	1.078825	1.15479	0.00009	1.15628	0.00013	1.15520	0.00017	1.15587	0.00018	1.15528	0.00018	1.15549	0.00018	1.15577	0.00018
O1	1.039193	1.073201	1.15505	0.00010	1.15648	0.00014	1.15541	0.00019	1.15608	0.00019	1.15549	0.00019	1.15569	0.00019	1.15598	0.00019
J1	1.036910	1.039192	1.15531	0.00011	1.15682	0.00015	1.15575	0.00020	1.15642	0.00021	1.15583	0.00021	1.15603	0.00021	1.15632	0.00021
THE1	1.010333	1.036748	1.15551	0.00012	1.15703	0.00016	1.15596	0.00021	1.15663	0.00022	1.15604	0.00022	1.15624	0.00022	1.15653	0.00022
F11	1.007904	1.008655	1.16776	0.00051	1.17029	0.00060	1.16921	0.00081	1.16988	0.00083	1.16929	0.00084	1.16949	0.00084	1.16978	0.00084
PS11	1.003651	1.007903	1.23734	0.00273	1.26974	0.00388	1.26856	0.00523	1.26929	0.00537	1.26865	0.00545	1.26887	0.00542	1.26918	0.00544
K1	1.002575	1.003650	1.13284	-0.00060	1.13489	-0.00057	1.13384	-0.00077	1.13450	-0.00079	1.13392	-0.00080	1.13411	-0.00079	1.13440	-0.00080
KS	1.001826	1.002574	1.13865	-0.00042	1.13859	-0.00046	1.13753	-0.00062	1.13819	-0.00063	1.13761	-0.00064	1.13781	-0.00064	1.13809	-0.00064
S1	0.997734	1.001825	1.14446	-0.00023	1.14589	-0.00020	1.14482	-0.00028	1.14549	-0.00028	1.14490	-0.00029	1.14510	-0.00029	1.14539	-0.00029
P1	0.995143	0.997733	1.14777	-0.00013	1.14915	-0.00010	1.14809	-0.00013	1.14875	-0.00013	1.14817	-0.00014	1.14837	-0.00013	1.14865	-0.00014
P11	0.989049	0.995142	1.14933	-0.00008	1.15072	-0.00004	1.14965	-0.00006	1.15032	-0.00006	1.14973	-0.00006	1.14993	-0.00006	1.15022	-0.00006
P1C	0.971598	0.989048	1.15080	-0.00003	1.15290	0.00001	1.15183	0.00001	1.15250	0.00001	1.15191	0.00001	1.15211	0.00001	1.15240	0.00001
CH1	0.970994	0.971597	1.15226	0.00002	1.15369	0.00006	1.15262	0.00008	1.15329	0.00008	1.15270	0.00008	1.15290	0.00008	1.15318	0.00008
CHM	0.968566	0.970993	1.15233	0.00002	1.15378	0.00006	1.15271	0.00008	1.15338	0.00008	1.15279	0.00008	1.15299	0.00008	1.15328	0.00008
M1	0.963399	0.968565	1.15240	0.00003	1.15384	0.00006	1.15277	0.00008	1.15344	0.00009	1.15285	0.00009	1.15305	0.00009	1.15334	0.00009
MTU	0.940017	0.963398	1.15259	0.00003	1.15393	0.00007	1.15286	0.00010	1.15353	0.00010	1.15294	0.00010	1.15314	0.00010	1.15343	0.00010
TAU1	0.932583	0.940016	1.15278	0.00004	1.15422	0.00008	1.15315	0.00011	1.15382	0.00011	1.15323	0.00011	1.15343	0.00011	1.15372	0.00011
TO	0.929684	0.932582	1.15278	0.00004	1.15424	0.00008	1.15316	0.00011	1.15383	0.00011	1.15324	0.00011	1.15344	0.00011	1.15373	0.00011
O1	0.928932	0.929683	1.15279	0.00004	1.15424	0.00008	1.15317	0.00011	1.15384	0.00011	1.15325	0.00011	1.15345	0.00011	1.15374	0.00011
OR	0.898264	0.928931	1.15280	0.00005	1.15426	0.00008	1.15318	0.00011	1.15385	0.00012	1.15327	0.00012	1.15347	0.00012	1.15375	0.00012
RO1	0.896129	0.898263	1.15280	0.00005	1.15426	0.00009	1.15319	0.00012	1.15386	0.00012	1.15327	0.00012	1.15347	0.00012	1.15375	0.00012
RQ	0.893407	0.896128	1.15280	0.00005	1.15425	0.00009	1.15318	0.00012	1.15385	0.00012	1.15326	0.00012	1.15346	0.00012	1.15375	0.00012
Q1	0.892934	0.893406	1.15279	0.00005	1.15425	0.00009	1.15318	0.00012	1.15385	0.00012	1.15326	0.00012	1.15346	0.00012	1.15375	0.00012
QSIG	0.866977	0.892933	1.15275	0.00005	1.15422	0.00009	1.15315	0.00012	1.15382	0.00012	1.15323	0.00012	1.15343	0.00012	1.15371	0.00012
SIG1	0.859381	0.866976	1.15271	0.00005	1.15417	0.00009	1.15310	0.00012	1.15377	0.00012	1.15318	0.00012	1.15338	0.00012	1.15366	0.00012
2Q1	0.721500	0.859380	1.15269	0.00005	1.15415	0.00009	1.15308	0.00012	1.15375	0.00012	1.15316	0.00012	1.15336	0.00012	1.15365	0.00012

Поскольку заранее не было известно, что полученные нами кривые для полусуточных волн удовлетворяют (56а), для определения коэффициентов  $\delta_0$  и  $\delta^+$  был применен метод наименьших квадратов. Отклонения от полученной аппроксимации при этом не превосходили единиц в седьмом знаке после запятой. Для получения тех же коэффициентов суточных волн для формулы (56б) была применена резонансная кривая из работы [Dehant et al., 1999]. Прежде всего, по формуле (24) из указанной работы (с. 1049) вычислялись значения коэффициентов  $\delta_0$  и  $\delta^+$  формулы (56б) для показанных в табл. 2 частот для модели DDW/NH. Затем находились отношения  $m_1$  и  $m_2$  этих коэффициентов к их значениям для волны M2  $\delta_{0\_M2}$  и  $\delta^{+\_M2}$ , входящим в (56а), для той же модели. После этого формула (56б) переписывалась в виде

$$\delta(\theta) = \delta_0 \left( m_1 - \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \frac{\delta^{+\_M2}}{\delta_{0\_M2}} \right) + \frac{m_2 \delta^{+\_M2}}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{3}}{2} (7 \cos^2 \theta - 1),$$

и в нее подставлялись коэффициенты  $\delta_{0\_M2}$  и  $\delta^{+\_M2}$  наших моделей, входящие в формулу (56а). К полученным в результате кривым был применен метод наименьших квадратов, при помощи которого были вычислены соответствующие коэффициенты наших моделей, входящих в формулу (56б). Расхождения между указанными кривыми и их аппроксимациями опять же нигде не превосходили единиц в седьмом знаке после запятой.

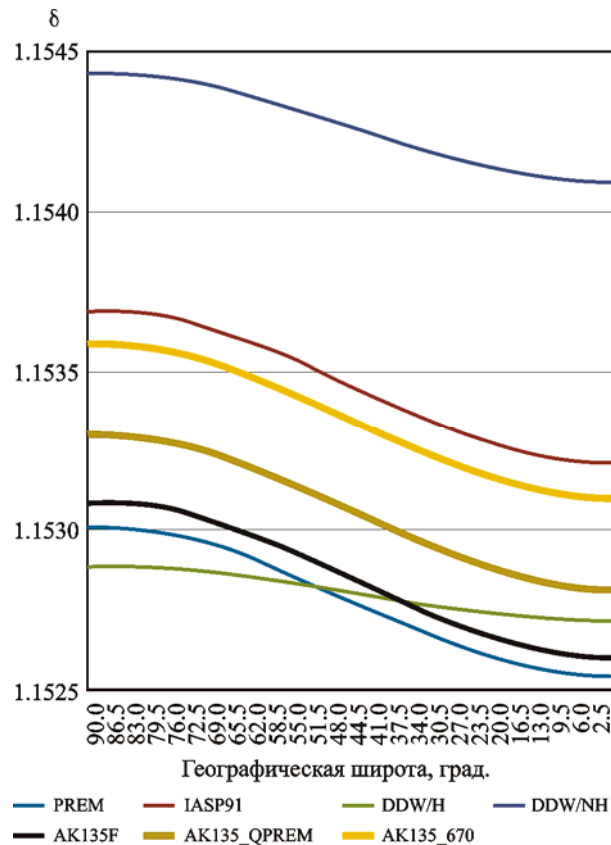
Помимо результатов, рассчитанных нами для моделей строения Земли PREM, IASP91 и АК135-F, на рис. 1 и в табл. 2 приведены значения для еще двух обсуждаемых в настоящей работе вариантов последней из этих моделей – АК135-Q<sub>PREM</sub> и АК135-760. Кривая зависимости амплитудного дельта-фактора полусуточных волн от широты для модели АК135-Q<sub>PREM</sub> лежит в среднем выше кривой, соответствующей варианту АК135-F, на  $2.0 \cdot 10^{-4}$  вне зависимости от широты, еще на  $2.9 \cdot 10^{-4}$  выше кривая для варианта АК135-760.

Кривая дельта-факторов полусуточных волн, рассчитанная по модели АК135-F, выше кривой, рассчитанной по модели DDW/NH, в среднем на  $5.8 \cdot 10^{-4}$ , и ниже кривой, рассчитанной по модели DDW/NH, на  $9.1 \cdot 10^{-4}$ , т.е. почти на  $3.3 \cdot 10^{-4}$  ближе к гидростатической модели. Что касается кривой для модели АК135-Q<sub>PREM</sub>, то здесь значения выше, чем для модели DDW/NH в среднем на  $7.8 \cdot 10^{-4}$ , и меньше, чем для модели DDW/NH на  $7.1 \cdot 10^{-4}$ . Соответствующие значения для модели АК135-760 составляют  $1.08 \cdot 10^{-3}$  и  $4.2 \cdot 10^{-4}$ . Наша кривая для модели IASP91 расположена ниже кривой для модели DDW/NH в среднем на  $3.2 \cdot 10^{-4}$  и близка к кривой для модели АК135-760, а кривая для модели PREM – выше кривой для модели DDW/NH в среднем на  $4.8 \cdot 10^{-4}$  и расположена вблизи кривой для модели АК135-F. Из данных, приведенных в табл. 2 и на рис. 1, видно, что амплитудные дельта-факторы модели АК135 нарастают от полюса к экватору немного быстрее, чем рассчитанные по другим моделям. Впрочем, скорость роста значений для модели IASP91 уступает таковой для модели АК135 незначительно.

Вследствие различий в поправках за относительные ускорения для суточных и полусуточных волн кривая для суточных волн модели IASP91 еще до применения резонансной кривой расположена ниже кривой для полусуточных волн на  $5.0 \cdot 10^{-4}$ . Эта разность немного компенсируется (на  $7.7 \cdot 10^{-5}$ ) за счет различия значений дельта-факторов суточных и полусуточных волн, связанных с учетом диссипации. В итоге обсуждаемые разности составляют  $4.43 \cdot 10^{-4}$  для модели АК135-F,  $4.31 \cdot 10^{-4}$  и  $4.32 \cdot 10^{-4}$  соответственно для моделей АК135-Q<sub>PREM</sub> и АК135-760,  $4.24 \cdot 10^{-4}$  и  $4.30 \cdot 10^{-4}$  соответственно для моделей IASP91 и PREM. Эти поправки применяются после расчета амплитудных факторов

по данным табл. 2. Важным является то, что до применения резонансной кривой широтные зависимости дельта-факторов суточных и полусуточных волн практически не отличаются по форме. То есть эллиптичность Земли, относительные и кориолисовы ускорения, за исключением указанной выше постоянной поправки, не приводят к отличиям амплитудных факторов суточных и полусуточных волн.

На рис. 2 показаны широтные зависимости амплитудных дельта-факторов волны  $O1$  с учетом резонанса. Как и в предыдущем случае, видно, что кривые, полученные в настоящей работе, несколько резче изменяются с широтой, чем кривая, соответствующая модели DDW/NH, а расположены они в среднем ниже, как и в случае полусуточных волн.



**Рис. 2.** Зависимость от широты амплитудных дельта-факторов для Земли без океана волны  $O1$ , вычисленных автором настоящей статьи для трех вариантов модели строения Земли AK135 и для моделей PREM и IASP91 и вычисленных в работе [Dehant et al., 1999] для моделей DDW/H и DDW/NH

Также нами была проведена оценка влияния на величину амплитудных дельта-факторов латеральных неоднородностей порядка сжатия. Для этого достаточно заметить в уравнениях (26)–(31) функцию  $\varphi$  (19) выражением

$$\varphi = \left[ -\frac{\rho}{2\mu} \left( \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) - \frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial^2 \mu}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial \mu}{\partial \theta} \right) \right] \frac{T}{r^2} = [-6\epsilon p_2 - \psi] \frac{T}{r^2}.$$

Это выражение предполагает введение в уравнения широтной зависимости параметров Ламе вида (1). Полученные в результате такой замены значения амплитудных дельта-факторов отличаются от приведенных выше значений в среднем на 0.03 %, что, очевидно, является оценкой сверху. Эта оценка достаточно хорошо согласуется с результатами, полученными в [Wang, 1991] по модели латеральных неоднородностей мантии

Земли, построенной по данным сейсмической томографии восьмого порядка. Для Европы модель Р. Ванга (R. Wang) дала эффект порядка 0.01 %. Ранее С.М. Молоденский и М.В. Крамер [1980] (см. также [Молоденский, 1984]) полагали, что связанные с латеральными неоднородностями характерные изменения  $\delta$ -факторов полусуточных волн, как правило, составляют 0.2–0.75 %. Меньшее значение получалось при изменении скоростей продольных и поперечных сейсмических волн на 5 % в верхнем 331-километровом слое, а большее – при тех же изменениях во всей мантии. Таким образом, полученные С.М. Молоденским величины латеральных изменений амплитудных факторов в разы, если не на порядок, больше различий, принятых в настоящее время, а также полученных в данной работе.

В табл. 3 приведены значения вычисленных нами нагрузочных чисел Лява для вариантов моделей АК135: АК135-F, АК135-Q<sub>PREM</sub> и АК135-760. В табл. 4 даны те же показатели для моделей PREM и IASP91. Из сравнения данных табл. 3 и табл. 4 видно, что нагрузочные числа для модели АК135 больше, чем для моделей PREM и IASP91. В особенности это касается числа  $h$ .

**Таблица 3.** Нагрузочные числа Лява  $k$  и  $h$  для полусуточных и суточных волн для вариантов моделей АК135

$n$	АК135-F				АК135-Q <sub>PREM</sub>				АК135-760			
	Полусуточные волны		Суточные волны		Полусуточные волны		Суточные волны		Полусуточные волны		Суточные волны	
	-1000 $kn$	-1000 $h$	-1000 $kn$	-1000 $h$	-1000 $kn$	-1000 $h$	-1000 $kn$	-1000 $h$	-1000 $kn$	-1000 $h$	-1000 $kn$	-1000 $h$
0	0	134	0	134	0	134	0	134	0	134	0	134
1	0	291	0	291	0	291	0	291	0	291	0	291
2	619	1094	617	1093	620	1092	618	1090	621	1093	619	1091
3	600	1196	600	1196	602	1192	602	1192	603	1193	603	1193
4	551	1241	551	1241	553	1237	554	1237	554	1237	554	1237
5	545	1316	545	1317	547	1311	548	1311	547	1310	548	1311
6	568	1415	568	1417	571	1409	571	1410	570	1409	571	1410
7	605	1526	605	1528	608	1519	609	1520	608	1518	609	1519
8	648	1639	648	1641	651	1631	652	1633	651	1631	652	1632
9	692	1752	693	1754	696	1743	697	1744	696	1742	697	1744
10	737	1863	738	1865	741	1852	742	1854	741	1852	742	1854
20	1122	2825	1125	2831	1126	2800	1129	2804	1127	2800	1130	2805
30	1376	3573	1381	3582	1379	3532	1384	3539	1380	3532	1385	3539
40	1529	4183	1534	4195	1533	4130	1539	4138	1534	4129	1540	4137
50	1621	4718	1627	4731	1629	4653	1636	4662	1630	4651	1637	4660
60	1679	5212	1685	5227	1691	5137	1699	5147	1692	5134	1700	5144
70	1717	5684	1724	5700	1736	5601	1744	5612	1737	5596	1745	5607
80	1746	6144	1752	6161	1771	6053	1779	6064	1772	6047	1780	6059
90	1769	6597	1775	6615	1800	6499	1809	6511	1801	6492	1810	6504
100	1790	7048	1796	7067	1827	6942	1836	6954	1828	6934	1836	6945
200	2037	11 549	2040	11 576	2106	11 337	2114	11 350	2105	11 315	2113	11 328
300	2424	16 094	2426	16 132	2482	15 730	2489	15 744	2479	15 695	2485	15 708
400	2914	20 649	2917	20 699	2948	20 118	2954	20 132	2941	20 070	2947	20 084
500	3478	25 193	3483	25 255	3484	24 491	3489	24 506	3474	24 429	3479	24 444
600	4101	29 714	4107	29 788	4076	28 840	4080	28 855	4062	28 766	4067	28 781
700	4769	34 205	4777	34 292	4712	33 159	4716	33 175	4695	33 073	4699	33 089
800	5477	38 662	5487	38 762	5385	37 443	5389	37 460	5364	37 346	5368	37 362
900	6219	43 084	6231	43 197	6091	41 690	6095	41 708	6066	41 582	6070	41 600
1000	6993	47 467	7008	47 593	6826	45 899	6830	45 918	6797	45 780	6801	45 799
2000	16 007	88 985	16 060	89 257	15 351	85 564	15 359	85 599	15 281	85 370	15 288	85 405
3000	25 856	124 632	25 953	125 058	24 645	119 266	24 657	119 319	24 549	119 076	24 561	119 130
5000	41 532	169 228	41 694	169 889	39 493	160 912	39 512	160 992	39 432	160 965	39 452	161 045
7500	52 125	185 748	52 315	186 510	49 735	176 163	49 758	176 254	49 734	176 471	49 757	176 563
10 000	59 138	188 253	59 333	189 031	56 690	178 458	56 713	178 551	56 702	178 831	56 726	178 924

**Таблица 4.** Нагрузочные числа Лява  $k$  и  $h$  для полусуточных и суточных волн для моделей PREM и IASP91

$n$	PREM				IASP91			
	Полусуточные волны		Суточные волны		Полусуточные волны		Суточные волны	
	-1000 $kn$	-1000 $h$	-1000 $kn$	-1000 $h$	-1000 $kn$	-1000 $h$	-1000 $kn$	-1000 $h$
0	0	132	0	133	0	133	0	133
1	0	288	0	287	0	290	0	290
2	619	998	617	996	620	1001	619	1000
3	601	1062	600	1061	602	1066	602	1066
4	551	1069	552	1069	552	1074	553	1074
5	544	1106	545	1107	545	1111	545	1111
6	567	1169	568	1170	567	1173	568	1174
7	604	1242	605	1243	603	1246	604	1247
8	647	1318	648	1320	645	1322	646	1323
9	691	1394	693	1396	688	1397	689	1399
10	736	1468	737	1470	731	1470	732	1472
20	1113	2057	1116	2061	1098	2057	1101	2060
30	1355	2428	1360	2435	1332	2426	1337	2431
40	1502	2665	1508	2673	1470	2659	1475	2665
50	1595	2830	1601	2839	1554	2817	1559	2823
60	1657	2956	1665	2965	1611	2936	1615	2941
70	1702	3058	1710	3068	1653	3032	1657	3037
80	1738	3147	1746	3158	1689	3116	1692	3121
90	1767	3228	1775	3239	1722	3194	1725	3198
100	1793	3304	1802	3314	1755	3267	1758	3271
200	2059	3988	2066	3998	2180	3959	2181	3961
300	2397	4648	2402	4657	2692	4572	2693	4574
400	2770	5278	2774	5285	3186	5054	3187	5056
500	3146	5861	3150	5867	3628	5405	3630	5408
600	3509	6389	3512	6394	4019	5649	4021	5652
700	3850	6861	3853	6866	4369	5814	4371	5817
800	4170	7281	4172	7286	4687	5924	4689	5927
900	4471	7657	4473	7661	4984	5995	4986	5998
1000	4756	7995	4758	7999	5266	6041	5268	6044
2000	7351	10 442	7352	10 447	7850	6119	7852	6122
3000	10 040	12 345	10 041	12 351	10 383	6120	10 385	6123
5000	15 492	14 752	15 494	14 760	15 448	6120	15 450	6124
7500	22 022	15 699	22 024	15 708	21 778	6121	21 780	6124
10 000	28 390	15 860	28 392	15 869	28 108	6121	28 110	6124

Как и при расчете обычных чисел Лява, в нагрузочных числах, как уже было сказано выше, учитывались диссипация, эллиптичность, а также поправки за относительные и кориолисовы ускорения. Значения приведены для широты  $45^\circ$ . Учет перечисленных факторов (в особенности эллиптичности) привел к существенному отличию показанных в табл. 3 и 4 значений нагрузочных чисел Лява для больших  $n$  от вычисленных ранее, например, в работах [Pagiatakis, 1990; Jentzsch, 1997; Gegout et al., 2010; Vinogradova, 2012]. В то же время соответствующее указанным отличиям чисел Лява изменение амплитуды океанического гравиметрического эффекта обычно не превышает 0.5–1 %. Более подробно причины указанных отличий и влияние на значение нагрузочных чисел различных факторов обсуждаются в работе [Спиридонов, Виноградова, 2017] на примере модели IASP91.

## 5. Сравнение теоретических результатов с данными наблюдений

Для сравнения полученных в настоящей работе теоретических значений с наблюдаемыми были выбраны результаты приливного анализа рядов наблюдений, полученных на 14 пунктах сети сверхпроводящих гравиметров GGP. Основные характеристики пунктов и сроки проведения наблюдений показаны в табл. 5. Из приведенных в табл. 5 данных видно, что длина рядов наблюдений колеблется от трех (Schiltach) до 18 (Cantley) лет, составляя в среднем (по 14 станциям) величину порядка 12 лет.

Таблица 5. Основные характеристики пунктов сети GGP и сроки наблюдений на них

Станция	Координаты*, град.		Высота, м над ур. моря	Тип гравиметра	Срок наблюдения		Общее число дней наблюдений	Коэффициент регрессии**
	Широта	Долгота			Начало	Конец		
Bad Homburg	50.229	8.611	190	GWR 30_L + GWR C044	13.02.2001	30.01.2013	4622	-3.373
Canberra (Stromlo)	-35.321	149.008	763	GWR CT 031	02.07.1997	30.07.2013	5591	-3.372
Cantley	45.585	-75.807	269	GWR T012 TT70	07.11.1989	03.12.2007	6634	-3.423
Kamioka	36.425	137.308	358	SUP-GWR T016	23.10.2004	30.07.2013	3006	-2.852
Medicina	44.522	11.645	28	GWR C023	02.01.1998	30.01.2014	5802	-3.559
Membach (Baelen)	50.609	6.007	250	GWR C021	04.08.1995	30.12.2011	5720	-3.304
Metsahovi	60.217	24.396	56	TT70	11.08.1994	30.12.2013	5564	-3.684
Moxa	50.646	11.616	455	CD 034 HIGH	02.01.2000	29.06.2012	4381	-3.339
Pecny	49.914	14.786	535	GWR OSG-050	02.05.2007	30.07.2013	2251	-3.322
Schiltach	48.330	8.327	589	GWR CD056 U	02.10.2009	29.09.2013	1137	-3.376
Strasbourg	48.622	7.684	185	GWR C026	02.03.1997	30.12.2012	5387	-3.380
Sutherland	-32.381	20.811	1791	GWR CT 037	01.10.2000	29.06.2012	3404	-2.454
Vienne (Autriche)	48.249	16.357	193	SUP-GWR C 025	02.08.1995	21.10.2007	4278	-3.498
Wetzell	49.144	12.878	580	GWR CD029_L	05.11.1998	06.10.2010	4245	-3.373

\* Значение со знаком «-» – соответственно градусы южной широты и западной долготы.

\*\* Коэффициент регрессии, необходимый для учета эффекта атмосферного давления.

Прежде всего отметим, что наилучшие результаты в смысле сравнения расчетов с наблюдениями получены для рассматриваемого в настоящей работе варианта модели строения Земли IASP91 и наиболее современной океанической приливной модели FES2012. Поэтому в дальнейшем речь пойдет в основном об амплитудных дельта-факторах и сдвигах фаз, полученных именно по этим моделям. Прочие модели строения Земли и приливные модели приводят к более далеким от наблюдений результатам. Сравнению моделей PREM и IASP91, в частности, посвящена работа [Спиридонов, 2015а].

Что касается обсуждаемых выше трех вариантов модели АК135, то уже для варианта АК135-F амплитудные дельта-факторы приливных волн оказываются в целом (по волнам и станциям) несколько завышенными по сравнению с их наблюдаемыми значениями. Это происходит несмотря на то, что амплитудные факторы для Земли без океана для этого варианта модели являются самыми маленькими из трех и лишь немного превосходят таковые для модели PREM. Таким образом, основную негативную роль здесь, очевидно, играют иные, чем у моделей IASP91 и PREM, значения нагрузочных чисел Лява, т.е. величина океанического нагрузочного эффекта. Рассчитанные по вариантам модели АК135 амплитудные дельта-факторы и сдвиги фаз суточных и полусуточных

волн для Земли с океаном более далеки от наблюдаемых, нежели таковые для модели IASP91, как правило, в 65–70 % случаев. Эта оценка была получена из анализа амплитуд разностных векторов, обсуждаемых ниже. Несколько успешней, чем IASP91, варианты моделей АК135 оказываются в основном только по двум волнам:  $K1$  и  $S2$ . Преимущество результатов для этих волн сказывается, как правило, на станциях Canberra, Kamioka, Metsahovi и Респу. Также в основном именно для этих двух волн результаты по модели АК135 оказались лучше, чем по модели PREM.

Приведенные ниже численные результаты были получены при помощи уже упомянутой во Введении программы прогноза параметров земных приливов ATLANTIDA3.1\_2014 [Спиридонов, 2014; Spiridonov et al., 2015] для модели строения Земли IASP91 и океанической приливной модели FES2012. В этой программе полностью реализованы теоретические разработки, изложенные в настоящей работе.

В табл. 6 приведены значения наблюдаемых амплитудных дельта-факторов ( $\delta$ ) и сдвигов фаз ( $\Delta\varphi$ ) в градусах для восьми основных приливных волн ( $Q1$ ,  $O1$ ,  $P1$ ,  $K1$ ,  $N2$ ,  $M2$ ,  $S2$ ,  $K2$ ). Эти значения получены для рядов, показанных в табл. 5, при помощи программы ANALYZE (версия 3.40) [Schueller, 2015]. Как сами ряды наблюдений, так и результаты их анализа были любезно предоставлены автору настоящей работы профессором Б. Дюкармом. В табл. 7 приведены значения амплитудных факторов и сдвигов фаз, вычисленные при помощи программы ATLANTIDA3.1\_2014 по модели строения Земли IASP91 и приливной океанической модели FES2012.

Из сравнения данных табл. 6 и 7 следует, что в 44 % случаев (49 из 112, по восьми волнам и 14 станциям) наблюдаемые значения амплитудных дельта-факторов приливных волн (см. табл. 6) отличаются от их теоретических значений (см. табл. 7) на единицы в четвертом знаке после запятой. Подавляющая часть столь малых разностей приходится на девять европейских станций: Bad Homburg, Medicina, Membach, Мох, Респу, Schiltach, Strasbourg, Vienne и Wetzell. По этим станциям доля таких разностей составляет 47 %. В разрезе волн наименьшие разности соответствуют волнам  $O1$  и  $M2$  (11 и 10 станций соответственно). В 57 % случаев разность между наблюдаемыми и вычисленными фазами меньше 0.05 град.

Необходимо отметить, что проведение сравнительного анализа величин амплитудных факторов и сдвигов фаз по отдельности, строго говоря, не совсем содержательно. Гораздо больший смысл имеет рассмотрение амплитуд соответствующих разностных векторов  $\vec{A}_{\text{dif}}$ :

$$\vec{A}_{\text{dif}} = \vec{A}_p - \vec{A}_0,$$

где  $\vec{A}_p$  и  $\vec{A}_0$  – прогнозируемый и наблюдаемый приливные вектора, имеющие координаты  $(A\delta_p \cos \Delta\varphi_p; A\delta_p \sin \Delta\varphi_p)$  и  $(A\delta_0 \cos \Delta\varphi_0; A\delta_0 \sin \Delta\varphi_0)$  соответственно. Здесь  $A$  – амплитуда рассматриваемой приливной волны на твердой эллипсоидальной Земле без океана;  $\delta_0$  и  $\Delta\varphi_0$  – наблюдаемые амплитудные факторы и сдвиги фаз, показанные в табл. 6;  $\delta_p$  и  $\Delta\varphi_p$  – прогнозные амплитудные факторы и сдвиги фаз, вычисляемые с помощью программы ATLANTIDA3.1\_2014 (см. табл. 7). Координаты прогнозируемого вектора также равны

$$A\delta_p \cos \Delta\varphi_p = A\delta_E + A_{oc} \cos \varphi_{oc}; \quad A\delta_p \sin \Delta\varphi_p = A_{oc} \sin \varphi_{oc}, \quad (57)$$

где  $\delta_E$  – амплитудный дельта-фактор для неупругой Земли без океана;  $A_{oc}$  и  $\varphi_{oc}$  – соответственно амплитуда и локальная фаза океанического гравиметрического эффекта.



**Таблица 6.** Значения амплитудных дельта-факторов и сдвигов фаз различных приливных волн по результатам наблюдений на станциях сети GGP

Станция	Q1		O1		P1		K1		N2		M2		S2		K2	
	$\delta$	$\Delta\varphi$	$\delta$	$\Delta\varphi$	$\delta$	$\Delta\varphi$	$\delta$	$\Delta\varphi$	$\delta$	$\Delta\varphi$	$\delta$	$\Delta\varphi$	$\delta$	$\Delta\varphi$	$\delta$	$\Delta\varphi$
Bad Homburg	1.14787	-0.2303	1.15011	0.1055	1.15084	0.2011	1.13797	0.2503	1.17597	2.6445	1.18869	1.9748	1.18975	0.5357	1.19161	0.7936
Canberra	1.18386	-0.6651	1.16734	-0.7469	1.14576	-0.8567	1.12974	-0.8377	1.19664	-2.6583	1.17865	-2.5231	1.15489	-1.3772	1.16061	-1.1007
Cantley	1.16481	0.5656	1.16535	0.5540	1.16035	0.4809	1.14725	0.5850	1.20981	0.0835	1.20319	-0.5066	1.18390	-1.1399	1.18409	-0.9046
Kamioka	1.20311	0.9860	1.20096	0.5704	1.19218	-0.1430	1.18059	-0.1437	1.18626	0.1170	1.19058	0.5172	1.20027	-0.3582	1.19994	0.0676
Medicina	1.14773	-0.1372	1.14879	0.1371	1.14750	0.2555	1.13497	0.3481	1.17280	1.7065	1.18081	1.2497	1.17914	0.1383	1.18152	0.4311
Membach	1.14688	-0.2092	1.14936	0.1068	1.14967	0.2267	1.13725	0.2803	1.17245	3.0652	1.18787	2.4418	1.19277	0.7689	1.19465	1.0403
Metsahovi	1.14365	0.0750	1.14997	0.2536	1.15082	0.0468	1.13718	0.0865	1.17516	1.0518	1.17804	0.7100	1.17193	0.0731	1.17381	0.1878
Moxa	1.14638	-0.1641	1.14876	0.1242	1.14927	0.1733	1.13628	0.2257	1.17540	2.1524	1.18555	1.5828	1.18417	0.3425	1.18602	0.5792
Pecny	1.14772	-0.0945	1.15007	0.1243	1.14996	0.1200	1.13682	0.1957	1.17714	1.7538	1.18506	1.2408	1.18217	0.1687	1.18327	0.4008
Schiltach	1.14816	-0.2949	1.14911	0.0894	1.14999	0.1987	1.13690	0.2590	1.17179	2.7685	1.18671	2.0313	1.18803	0.5857	1.18913	0.8435
Strasbourg	1.14716	-0.2680	1.14887	0.0860	1.14971	0.2194	1.13696	0.2713	1.17360	2.7967	1.18704	2.1558	1.18927	0.6473	1.19131	0.9089
Sutherland	1.16126	0.5884	1.16317	0.1110	1.15036	-0.5186	1.13490	-0.5019	1.13962	5.5004	1.15723	5.2385	1.19927	4.2650	1.19602	4.7589
Vienne	1.14749	-0.1068	1.14979	0.1159	1.14873	0.1499	1.13574	0.1982	1.17818	1.5392	1.18345	1.0776	1.18071	0.1088	1.18219	0.3336
Wetzell	1.14723	-0.1543	1.14967	0.1164	1.14998	0.1356	1.13665	0.2087	1.17772	1.9617	1.18556	1.4274	1.18348	0.2659	1.18543	0.5074

**Таблица 7.** Прогнозные амплитудные дельта-факторы и сдвиги фаз различных приливных волн, вычисленные при помощи программы ATLANTIDA3.1\_2014 (модели FES2012, IASP91) для пунктов сети GGP

Станция	Q1		O1		P1		K1		N2		M2		S2		K2	
	$\delta$	$\Delta\varphi$	$\delta$	$\Delta\varphi$	$\delta$	$\Delta\varphi$	$\delta$	$\Delta\varphi$	$\delta$	$\Delta\varphi$	$\delta$	$\Delta\varphi$	$\delta$	$\Delta\varphi$	$\delta$	$\Delta\varphi$
Bad Homburg	1.14572	-0.1729	1.14937	0.1112	1.15013	0.1594	1.13567	0.1943	1.17524	2.5894	1.18809	1.9602	1.19133	0.7469	1.19263	0.7856
Canberra	1.18211	-0.7224	1.17168	-0.7799	1.14861	-0.9379	1.13323	-0.9444	1.19899	-2.6373	1.18302	-2.4113	1.16264	-0.9289	1.17156	-0.9942
Cantley	1.16112	0.5753	1.16209	0.5334	1.15597	0.5201	1.14238	0.5544	1.20690	-0.0525	1.20127	-0.4596	1.18174	-0.7342	1.18304	-0.7566
Kamioka	1.20273	0.8135	1.20117	0.6196	1.19350	0.0069	1.17822	-0.1007	1.18389	0.1593	1.19066	0.5691	1.20045	0.0390	1.20297	0.0828
Medicina	1.14660	-0.0981	1.14913	0.1499	1.14833	0.2762	1.13391	0.2957	1.17303	1.7347	1.18139	1.2582	1.18219	0.3987	1.18237	0.3965
Membach	1.14566	-0.1696	1.14969	0.1182	1.15049	0.1830	1.13592	0.2289	1.17250	3.0592	1.18854	2.4199	1.19552	1.0038	1.19756	1.0519
Metsahovi	1.14232	0.1563	1.14832	0.2302	1.14680	-0.0637	1.13405	0.0572	1.17497	1.1030	1.17865	0.6555	1.17555	0.2149	1.17841	0.1363
Moxa	1.14558	-0.1293	1.14945	0.1204	1.14977	0.1297	1.13533	0.1593	1.17704	2.1302	1.18676	1.5480	1.18749	0.5301	1.18859	0.5578
Ресны	1.14575	-0.0870	1.14953	0.1194	1.14903	0.1118	1.13461	0.1354	1.17786	1.7472	1.18503	1.2238	1.18405	0.3684	1.18487	0.3895
Schiltach	1.14614	-0.2235	1.14907	0.0905	1.14981	0.1759	1.13544	0.2061	1.17337	2.6279	1.18672	2.0186	1.19072	0.8036	1.19156	0.8484
Strasbourg	1.14606	-0.2343	1.14901	0.0900	1.14996	0.1821	1.13557	0.2139	1.17312	2.7638	1.18736	2.1365	1.19198	0.8605	1.19294	0.9091
Sutherland	1.16178	0.6821	1.16275	0.2348	1.14912	-0.2615	1.13316	-0.3823	1.13821	5.4106	1.15787	5.1458	1.19968	4.4184	1.19362	4.6793
Vienne	1.14621	-0.0627	1.14954	0.1129	1.14827	0.1177	1.13390	0.1390	1.17745	1.5409	1.18336	1.0679	1.18201	0.3107	1.18250	0.3312
Wetzell	1.14595	-0.1204	1.14943	0.1116	1.14916	0.1329	1.13477	0.1581	1.17671	1.9474	1.18531	1.4049	1.18549	0.4689	1.18626	0.4952

Амплитуда разностного вектора соответственно равна

$$A_{\text{dif}} = A \sqrt{(\delta_p \cos \Delta\varphi_p - \delta_0 \cos \Delta\varphi_0)^2 + (\delta_p \sin \Delta\varphi_p - \delta_0 \sin \Delta\varphi_0)^2}. \quad (58)$$

В табл. 8 приведены значения отношений амплитуд разностных векторов (58) к наблюдаемым амплитудам (в %) для восьми основных приливных волн. Из приведенных в табл. 8 данных видно, что в среднем по восьми волнам наименьшие значения относительных амплитуд разностных векторов наблюдаются на станциях Vienna, Wetzell и Strasbourg, а наибольшие, как правило, за пределами Европы, на станциях Canberra, Cantley, Kamioka и Sutherland. Единственным европейским пунктом с достаточно большими невязками является станция Metsahovi. Хотя после недавнего изменения калибровки на этом пункте (Б. Дюкарм, устное сообщение) приведенные в настоящей работе расхождения теории с наблюдениями на станции Metsahovi стали существенно меньше для шести анализируемых волн из восьми. Исключение составляют волны  $S2$  и  $K2$ .

**Таблица 8.** Отношения амплитуд разностных векторов к наблюдаемым амплитудам различных приливных волн, %

Станция сети GGP	$Q1$	$O1$	$P1$	$K1$	$N2$	$M2$	$S2$	$K2$
Bad Homburg	0.21	0.07	0.10	0.22	0.11	0.06	0.39	0.09
Canberra	0.18	0.38	0.29	0.36	0.20	0.42	1.03	0.96
Cantley	0.32	0.28	0.38	0.43	0.34	0.18	0.73	0.27
Kamioka	0.30	0.09	0.28	0.21	0.21	0.09	0.69	0.25
Medicina	0.12	0.04	0.08	0.13	0.05	0.05	0.52	0.09
Membach	0.13	0.03	0.10	0.15	0.01	0.07	0.47	0.24
Metsahovi	0.18	0.15	0.40	0.28	0.09	0.11	0.40	0.40
Муха	0.09	0.06	0.09	0.14	0.14	0.12	0.43	0.22
Речны	0.17	0.05	0.08	0.22	0.06	0.03	0.38	0.14
Schiltach	0.22	0.00	0.04	0.16	0.28	0.02	0.44	0.20
Strasbourg	0.11	0.01	0.07	0.16	0.07	0.04	0.44	0.14
Sutherland	0.17	0.22	0.46	0.26	0.20	0.17	0.27	0.24
Vienne	0.14	0.02	0.07	0.19	0.06	0.02	0.37	0.03
Wetzell	0.13	0.02	0.07	0.19	0.09	0.04	0.39	0.07

В среднем по 14 станциям наилучшие результаты получены для волн  $M2$  и  $O1$ , а наихудшие – для  $S2$ ,  $K1$  и  $K2$ . Причем, если улучшение ситуации для волны  $K1$  может быть достигнуто за счет применения более совершенной резонансной кривой, то уменьшение амплитуд разностных векторов волн  $S2$  и  $K2$  требует, видимо, более точного вычисления океанического гравиметрического эффекта.

В 35 % случаев значения, приведенные в табл. 8, меньше 0.1 %. По девяти избранным европейским станциям доля таких значений доходит до 51 %.

В 61 случае из 112 (14 станций на восемь волн) амплитуды разностных векторов, рассчитанные по программе ATLANTIDA3.1\_2014 (IASP91, FES2012), оказались

меньше таковых, полученных при применении амплитудных факторов модели DDW/NH [Dehant et al., 1999] и той же океанической приливной модели FES2012. Таким образом, почти в 54 % случаев результаты расчетов по нашей модели, полученные по дельта-факторам для неупругой Земли без океана, оказались ближе к наблюдениям. При этом наибольшее количество волн, по которым наши результаты оказались лучше (7 из восьми волн), получилось для станции Canberra. Для шести волн из восьми наши данные оказались ближе к наблюдениям по станциям Kamioka, Medicina, Membach, Моха и Schiltach. Наихудший результат (менее четырех волн из восьми) наблюдается для станций Bad Homburg, Cantley, Metsahovi и Wetzell. По отобраным ранее для анализа девяти европейским станциям (Bad Homburg, Medicina, Membach, Моха, Ресну, Schiltach, Strasbourg, Vienne и Wetzell) результаты, полученные по нашим дельта-факторам, оказались ближе к наблюдениям почти в 58 % случаев (42 из 72). При этом для волн  $S2$  и  $K2$  успех достигается в 100 % случаев, а для волн  $O1$  и  $M2$  – в 78 % случаев.

В 63 случаях из 112 амплитуды разностных векторов, рассчитанные с помощью программы ATLANTIDA3.1\_2014 (модели IASP91, FES2012), оказались меньше таковых, полученных по программе PREDICT при осреднении океанического эффекта по девяти океаническим моделям (сайт ICET). То есть почти в 56 % случаев наши результаты оказались ближе к наблюдениям. По девяти отобраным европейским станциям доля таких случаев достигает 63 %. По полусуточным волнам успех достигается в 86 % случаев, а по суточным – в 39 % случаев. 100 %-ный результат достигнут для волн  $M2$  и  $K2$ .

В табл. 9 представлены отношения амплитуд суммы разностных векторов для каждой приливной волны по девяти отобраным станциям к суммам соответствующих приливных векторов для этой же волны в процентах. В первой строке таблицы показаны значения, вычисленные по нашей программе ATLANTIDA3.1\_2014 по модели строения Земли IASP91 и океанической приливной модели FES2012. Во второй и третьей строках – те же значения, полученные с помощью программы PREDICT из известного пакета ETERNA3.3 при осреднении океанического эффекта по девяти приливным моделям и, наконец, значения, вычисленные по модели DDW/NH и океанической модели FES2012.

**Таблица 9.** Отношения амплитуд суммы разностных векторов различных приливных волн, полученной по данным наблюдений на 9 станциях сети GGP, к модулям сумм приливных векторов, вычисленные по разным программам, %

Программа	$Q1$	$O1$	$P1$	$K1$	$N2$	$M2$	$S2$	$K2$
ATLANTIDA3.1_2014	0.14	0.01	0.04	0.17	0.05	0.03	0.43	0.13
PREDICT	0.09	0.06	0.07	0.11	0.05	0.11	0.55	0.39
DDW/NH	0.09	0.07	0.08	0.11	0.06	0.05	0.44	0.16

Из данных, приведенных в табл. 9, следует, что в среднем по девяти европейским станциям сети GGP применение модели строения Земли IASP91 и глобальной приливной океанической модели FES2012 приводит для волн  $O1$ ,  $P1$ ,  $N2$  и  $M2$  к совпадению изложенной в настоящей работе теории с наблюдениями в пределах первых сотых до-

лей процента (см. первую строку табл. 9). Наша программа ATLANTIDA3.1\_2014 хуже программы PREDICT лишь в отношении двух волн ( $Q1$  и  $K1$ ) и сопоставима с ней по волне  $M2$ . В то же время заметным становится выигрыш наших результатов по волне  $M2$  (почти в 3.7 раза). В 6 раз ближе к наблюдениям значения, полученные при помощи программы ATLANTIDA3.1\_2014, для волны  $O1$ . Из сравнения результатов расчетов по ATLANTIDA и DDW/NH следует, что полученная в настоящей работе модель расчета амплитудных дельта-факторов для Земли без океана уступает модели DDW/NH по тем же двум волнам  $Q1$  и  $K1$ . Заметен выигрыш наших результатов по волне  $O1$  (почти в 7 раз). В 2 раза ближе к наблюдениям, чем вычисленные с помощью модели DDW/NH, значения, полученные при помощи программы ATLANTIDA3.1\_2014, для волны  $P1$  и в 1.7 раза – для волны  $M2$ .

Из обсуждения, проведенного в данном разделе, видно, что полученные в настоящей работе теоретические результаты, с точки зрения близости их к наблюдениям, не уступают наиболее известным аналогам.

## 6. Обсуждение и выводы

Учет в уравнениях М.С. Молоденского [Молоденский, 1953; Молоденский, Крамер, 1961] эллиптичности оболочки Земли и ее вращения приводит к совсем незначительному усложнению системы уравнений шестого порядка. В полученные в настоящей работе уравнения (26)–(31) добавлены 8 достаточно простых слагаемых, отвечающих за эллиптичность, и еще 2 слагаемых, описывающих разность относительных и кориолисовых ускорений.

Применение более современной модели строения Земли IASP91 вместо модели PREM увеличивает значения амплитудных дельта-факторов полусуточных волн для сферической невращающейся Земли на  $6.7 \cdot 10^{-4}$  (с 1.15731 до 1.15798). Учет эллиптичности и центробежных ускорений приводит к появлению слабой широтной зависимости и наибольшему повышению среднего (на широте  $45^\circ$ ) значения амплитудного фактора для модели IASP91 до 1.16131, что на  $3.3 \cdot 10^{-3}$  больше значений для сферической невращающейся Земли. Еще на  $3 \cdot 10^{-4}$  амплитудный фактор возрастает после введения в рассмотрение относительных и кориолисовых ускорений, достигая для полусуточных волн на широте  $45^\circ$  своего окончательного значения 1.16161. При этом амплитудные дельта-факторы нарастают от экватора к полюсу на  $8.2 \cdot 10^{-4}$  для модели PREM и на  $8.4 \cdot 10^{-4}$  для модели IASP91. Применение модели строения Земли AK135 не привело, по сравнению с моделью IASP91, к приближению теоретических результатов к наблюдаемым в основном вследствие роста рассчитанной океанической нагрузки. Тем не менее рассмотрение различных вариантов модели AK135, а также сравнение моделей IASP91 и PREM позволяет сделать заключение о том, что отличия в принятом строении коры и верхней мантии различных референц-моделей (до глубин порядка 700–800 км) способны привести к изменениям величины рассчитываемых амплитудных дельта-факторов на  $(5-7) \cdot 10^{-4}$ , а различия применяемых диссипативных моделей – на величину близкую к  $2 \cdot 10^{-4}$ .

Полученная в настоящей работе форма кривых, описывающих изменение амплитудных факторов с широтой, до учета резонанса одинакова для полусуточных и суточных волн. Кривые для суточных волн лежат ниже кривых для полусуточных волн для модели IASP91 на  $4.24 \cdot 10^{-4}$  еще до применения резонансной кривой. Это связано с разли-

чиями при учете диссипации и относительных ускорений. После введения резонанса, т.е. учета крутильных колебаний, форма широтных зависимостей суточных волн отличается от таковой для полусуточных (см. рис. 2). Рассчитанные в настоящей работе зависимости амплитудных факторов полусуточных и суточных волн для Земли без океана от широты расположены между таковыми, полученными в моделях DDW/NH и DDW/H.

При расчете океанического гравиметрического эффекта использовались нагрузочные числа Лява, полученные для неупругой вращающейся эллиптической оболочки, а также разложение по сферическим функциям до 1120 порядка котидальных карт одной из наиболее современных океанических приливных моделей FES2012. По полученным обычным и нагрузочным числам Лява определялись теоретические (прогнозные) значения амплитудных факторов для вращающейся неупругой эллипсоидальной Земли с океаном. В дальнейшем было проведено их сравнение с наблюдаемыми величинами, полученными по результатам анализа наблюдений на сверхпроводящих гравиметрах сети GGP.

Амплитуды разностных (теория минус наблюдения) векторов в достаточно большом числе случаев приближаются к сотым долям процента от величин наблюдаемых амплитуд. Наилучшие (в смысле близости прогноза к наблюдениям) результаты получены на девяти европейских станциях (Bad Homburg, Medicina, Membach, Мох, Ресну, Schiltach, Strasbourg, Vienne и Wetzell) для модели строения Земли IASP91 и океанической приливной модели FES2012. Прогнозные значения амплитудных дельта-факторов и сдвигов фаз, полученные по этим моделям при помощи нашей программы прогноза параметров земных приливов ATLANTIDA3.1\_2014, в среднем по различным критериям приводят к меньшим отклонениям от результатов измерений, нежели аналогичные значения, полученные либо по программе PREDICT при осреднении по девяти океаническим приливным моделям, либо с применением совместно с океанической приливной моделью FES2012 амплитудных дельта-факторов модели DDW/NH.

Степень близости полученных теоретических результатов к наблюдаемым данным, в частности, свидетельствует об отсутствии необходимости введения допущения о негидростатичности оболочки при проведении вычислений амплитудных дельта-факторов полусуточных волн для неупругой вращающейся эллипсоидальной самогравитирующей сжимаемой Земли с океаном. Наилучшим (в смысле близости расчетов к наблюдениям) и в то же время наиболее простым вариантом модернизации модели PREM оказалась замена верхних 760 км коры и мантии на принятые в модели IASP91 без изменения диссипативной модели.

Дальнейшее улучшение качества прогноза земных приливов может быть достигнуто, в частности, за счет учета зависимости параметров Ляме и плотности от широты и долготы (учета латеральных неоднородностей), а также введения обусловленного диссипацией сдвига фаз. Это способно увеличить точность определения амплитудных факторов в пределах 0.02–0.03 %. Применение более совершенной резонансной кривой может уменьшить расхождение теории и наблюдений (амплитуды разностных векторов) для суточных волн в пределах 20–50 %. Последнее особенно важно для волны  $K1$ . И, наконец, определенные надежды связаны с дальнейшим совершенствованием моделей строения Земли и изменения факторов добротности с глубиной, а также глобальных океанических приливных моделей совместно с применением региональных данных по высоте уровня моря и придонному давлению. Важную роль также будут играть данные повторных анализов более длинных и высокоточных рядов SG-наблюдений.

## Благодарности

Автор искренне признателен члену-корреспонденту РАН С.М. Молоденскому за ряд ценных замечаний, существенно улучшивших содержание и качество настоящей работы. К сожалению, 29 июня 2016 г. Сергей Михайлович ушел из жизни, и мне не удалось обсудить с ним последние полученные результаты.

## Литература

- Буллен К.Е. Плотность Земли. М.: Мир, 1978. 442 с.
- Виноградова О.Ю. Океанические приливные нагрузки у берегов Европы, рассчитанные по функциям Грина // Физика Земли. 2012. № 7–8. С. 20–35.
- Виноградова О.Ю., Спиридонов Е.А. Сравнительный анализ океанических поправок в ускорение силы тяжести, рассчитанных по моделям PREM и IASP91 // Физика Земли. 2012. № 1–2. С. 74–83.
- Жарков В.Н., Молоденский С.М. О поправках за динамический модуль сдвига для чисел Лява // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1977. № 5. С. 17–20.
- Молоденский М.С. Упругие приливы, свободная нутация и некоторые вопросы строения Земли // Тр. Геофиз. ин-та АН СССР. 1953. № 19 (146). С. 3–52.
- Молоденский М.С., Крамер М.В. Числа Лява для статических земных приливов 2-го и 3-го порядков // Земные приливы и нутация Земли. М.: Изд-во АН СССР, 1961. С. 26.
- Молоденский С.М. О функции Грина для уравнений упругих сфероидальных деформаций Земли // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1976. № 11.
- Молоденский С.М. О влиянии горизонтальных неоднородностей мантии на амплитуды приливных волн // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1977. № 2. С. 3–8.
- Молоденский С.М. Оценка отклонения упругих земных приливов от статических // Изв. АН СССР. Физика Земли. 1978. № 12.
- Молоденский С.М. Приливы, нутация и внутреннее строение Земли. М.: ИФЗ АН СССР, 1984. 215 с.
- Молоденский С.М., Крамер М.В. Влияние крупномасштабных горизонтальных неоднородностей мантии на земные приливы // Физика Земли. 1980. № 1. С. 3–20.
- Перцев Б.П. Влияние морских приливов ближних зон на земноприливные наблюдения // Физика Земли. 1976. № 1. С. 13–22.
- Спиридонов Е.А. Программа анализа данных земноприливных наблюдений ATLANTIDA3.1\_2014 // Наука и технологические разработки. 2014. Т. 93, № 3. С. 3–48.
- Спиридонов Е.А. О влиянии диссипации и выбора модели строения Земли на качество прогноза параметров земных приливов // Сейсмические приборы. 2015а. Т. 51, № 3. С. 47–58.
- Спиридонов Е.А. Программа расчета параметров земных приливов ATLANTIDA 3.1\_2014. Свидетельство о государственной регистрации программ для ЭВМ №2015619567 от 8 сентября 2015 г. 2015б.
- Спиридонов Е.А. Поправки в числа Лява на относительные и кориолисовы ускорения // Геофизические процессы и биосфера. 2016а. Т. 25, № 1. С. 73–81.
- Спиридонов Е.А. Амплитудные дельта-факторы второго порядка и их зависимость от широты // Геология и геофизика. 2016б. № 4. С. 796–807.

- Спиридонов Е.А., Виноградова О.Ю.* Результаты комплексного моделирования океанического гравиметрического эффекта // Сейсмические приборы. 2017. № 1. С. 66–80.
- Carrère L., Lyard F., Cancet M., Guillot A., Roblou L.* FES2012: A new global tidal model taking advantage of nearly 20 years of altimetry // Proc. of Meeting «20 Years of Altimetry». Venice, 2012.
- Dehant V., Defraigne P., Wahr J.M.* Tides for a convective Earth // J. of Geophys. Res. 1999. V. 104, N B1. P. 1035–1058.
- Dziewonski A.M., Anderson D.L.* Preliminary reference Earth model // Phys. Earth Planet. Inter. 1981. V. 25. P. 297–356.
- Geissler W.H., Kind R., Yuan X.* Upper mantle and lithospheric heterogeneities in Central and Eastern Europe seen by teleseismic receiver functions // Geophys. J. Int. 2008. V. 174. P. 351–376.
- Gegout P. et al.* Practical numerical computation of Love numbers and applications // WG1 and WG2 workshop of the COST Action ES0701, 16–17 November 2010. Vienna, 2010.
- Jentzsch G.* Earth tides and Ocean tidal loading in tidal phenomena / Eds H. Wilhelm, W. Zürn, H.G. Wenzel. Berlin, Heidelberg: Springer, 1997. P. 145–172.
- Kennett B.L.N., Engdahl E.R.* Travel times for global earthquake location and phase identification // Geophys. J. Intern. 1991. V. 105. P. 429–465.
- Kennett B.L.N., Engdahl E.R., Buland R.* Constraints on seismic velocities in the Earth from travel times // Geophys. J. Intern. 1995. V. 122. P. 108–124.
- Montagner J.P., Kennett B.L.N.* How to reconcile body-wave and normal-mode reference Earth models? // Geophys. J. Intern. 1996. V. 125. P. 229–248.
- Pagiatakis S.D.* The response of a realistic Earth to ocean tide loading // Geophys. J. Intern. 1990. V. 103. P. 541–560.
- Schuller K.* Theoretical basis for Earth Tide analysis with the new ETERNA34-ANA-V4.0 program // Bull. Inf. Marées Terrestres. 2015. V. 149. P. 12024–12061.
- Smith M.L.* The scalar equations of infinitesimal elastic gravitational motion for a rotating, slightly elliptical Earth // Geophys. J. R. Astron. Soc. 1974. V. 37. P. 491–526.
- Smith M.L.* Translational inner core oscillations of a rotating, slightly elliptical Earth // J. Geophys. Res. 1976. V. 81. P. 3055–3065.
- Smith M.L.* Wobble and nutation of the Earth // Geophys. J. R. Astron. Soc. 1977. V. 50. P. 103–140.
- Spiridonov E., Vinogradova O., Boyarskiy E., Afanasyeva L.* ATLANTIDA3.1\_2014 for WINDOWS: A software for tidal prediction // Bull. Inf. Marées Terrestres. 2015. N 149. P. 12063–12082.
- Vinogradova O.Yu., Spiridonov E.A.* Some features of TOPEX/POSEIDON data // Application in Gravimetry: Ref. frames for Applications in Geosciences, International Association of Geodesy Symposia 138 / Eds Z. Altamimi, X. Collilieux. Berlin, Heidelberg: Springer, 2013. P. 229–235.
- Wahr J.M.* The tidal motions of a rotating, elliptical, elastic and oceanless Earth: Ph.D. thesis. Boulder, Univ. of Color., 1979. 216 p.
- Wahr J.M.* Body tides on an elliptical, rotating, elastic and oceanless Earth // Geophys. J. R. Astron. Soc. 1981. N 64. P. 677–703.
- Wang R.* Tidal deformations on a rotating, spherically asymmetric, viscoelastic and laterally heterogeneous Earth: Ph.D. thesis. Frankfurt am Main, 1991. 139 p.



## Приложение А

## Вывод выражения для объемного расширения

По определению объемное расширение равно (5):

$$\delta = \operatorname{div} \vec{u} = u_{rr} + u_{\theta\theta} + u_{\varphi\varphi}. \quad (\text{A1})$$

Подставляя (7) в (4), имеем

$$u_{rr} = H' \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right), \quad (\text{A2})$$

$$u_{\theta\theta} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \frac{T}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \frac{H}{r} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right), \quad (\text{A3})$$

$$u_{\varphi\varphi} = \frac{T}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) - \frac{1}{r^2} \frac{\partial T}{\partial \theta} \operatorname{ctg} \theta \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \frac{T}{r^2} \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \frac{H}{r} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right). \quad (\text{A4})$$

Первое слагаемое в выражении для  $u_{\theta}$  (7) обеспечивает независимость  $u_{\theta\theta}$  и  $\delta$  от слагаемого, содержащего производную от потенциала по кошироте  $\frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right)$ .

Подставляя (A2)–(A4) в (A1), после группировки слагаемых получим

$$\begin{aligned} \delta = & \left[ H' + \frac{2H}{r} - \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \right] \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \\ & + \frac{T}{r^2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{A5})$$

Учитывая, что

$$\Delta \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) = \frac{1}{r^2} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) \right] = -\frac{n(n+1)}{r^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right), \quad (\text{A6})$$

окончательно имеем:

$$\delta = \left[ H' + \frac{2H}{r} - \frac{n(n+1)}{r^2} T - \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \right] \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) = (f - \varphi) \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right), \quad (\text{A7})$$

где

$$f = H' + \frac{2}{r} \cdot H - \frac{n(n+1)}{r^2} \cdot T, \quad \text{а } \varphi = \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right).$$

## Приложение В

## Вывод уравнений (10)–(15)

**Вычисление гравитационных сил**

Введем вектор  $\vec{U}$ , равный

$$\vec{U} = \rho \left[ \text{grad}([\vec{u} \cdot \text{grad}V] + \omega + Vi) - \delta \cdot \text{grad}V \right] + \text{grad}(\lambda\delta).$$

Тогда уравнение (6) будет иметь вид:

$$\vec{U} + \nabla \hat{T} = 0.$$

Поскольку невозмущенный потенциал  $V$  в настоящей работе полагается зависящим только от  $r$  и  $\theta$ , то

$$\vec{u} \cdot \text{grad}V = u_r \cdot V' + u_\theta \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial V}{\partial \theta}.$$

Теперь с учетом (7) и (8) можно легко получить координаты вектора  $\vec{U}$ :

$$U_r = \left[ \rho \cdot (HV' + R)' - \rho(f - \varphi) \cdot V' + (\lambda(f - \varphi))' \right] \cdot \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \left[ \rho \left( \frac{T}{r^2} \cdot \frac{\partial V}{\partial \theta} \right)' \right] \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right);$$

$$U_\theta = \left[ \frac{\rho}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} (HV' + R) - \frac{\rho}{r} f \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{\lambda}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} [(f - \varphi)] \right] \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) +$$

$$+ \left[ \rho \left( HV' + R + \frac{T}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} \right) + \lambda \cdot (f - \varphi) \right] \cdot \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \cdot \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \left[ \frac{\rho \cdot T}{r} \cdot \frac{\partial V}{\partial \theta} \right] \cdot \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \cdot \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right);$$

$$U_\varphi = \left[ \rho(HV' + R) + \lambda(f - \varphi) \right] \cdot \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \cdot \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \left[ \frac{\rho T}{r} \cdot \frac{\partial V}{\partial \theta} \right] \frac{1}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \varphi} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right).$$

Здесь отброшены произведения производных от искомым функций и потенциала по коширте, т.е. члены второго порядка по сжатию.

**Расчет составляющих тензора напряжений  $\nabla \hat{T}_r, \nabla \hat{T}_\theta, \nabla \hat{T}_\varphi$** 

Необходимые производные от компонент тензора напряжений (9) равны:

$$\frac{\partial \hat{T}_{rr}}{\partial r} = \left[ 2\mu H'' + 2\mu' H' \right] \cdot \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right);$$

$$\frac{\partial \hat{T}_{r\theta}}{\partial \theta} = \left[ \frac{\mu}{r} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial \theta} \right] \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \left[ \frac{2\mu}{r} \cdot \frac{\partial H}{\partial \theta} \right] \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \left[ \mu T' - \frac{2\mu}{r} T + \mu H \right] \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right);$$

$$\frac{\partial \hat{T}_{r\varphi}}{\partial \varphi} = \left[ \mu T' - \frac{2\mu}{r} T + \mu H \right] \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right);$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \hat{T}_{r\theta}}{\partial r} &= \left[ \mu \tau' + \left( \mu' - \frac{\mu}{r} \right) \cdot \tau \right] \frac{1}{r} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \left[ \mu' \left( T' - \frac{2}{r} T + H \right) + \mu \left( T'' - \frac{3}{r} T' + \frac{4}{r^2} T + H' - \frac{1}{r} H \right) \right] \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right); \\
\frac{\partial \hat{T}_{\theta\theta}}{\partial \theta} &= \left[ 2\mu \frac{\partial H}{\partial \theta} - \frac{2\mu}{r} \cdot \frac{\partial^3 T}{\partial \theta^3} \right] \frac{1}{r} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \left[ 2\mu H - \frac{2\mu}{r} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right] \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \\
&\quad + \left[ 2\mu \frac{\partial T}{\partial \theta} \right] \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \frac{2\mu}{r^2} T \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right); \\
\frac{\partial \hat{T}_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} &= -\frac{2\mu T}{r^2 \sin \theta} \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \frac{2\mu T}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial^3}{\partial \theta \partial \varphi^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right); \\
\frac{\partial \hat{T}_{\theta\varphi}}{\partial \theta} &= \left[ \frac{2\mu T}{r^2 \sin \theta} \operatorname{ctg}^2 \theta - \frac{2\mu}{r^2 \sin \theta} \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{2\mu T}{r^2 \sin^3 \theta} \right] \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \\
&\quad + \left[ -\frac{4\mu T}{r^2 \sin \theta} \operatorname{ctg} \theta + \frac{2\mu}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial T}{\partial \theta} \right] \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \varphi} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \frac{2\mu T}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial^3}{\partial \theta^2 \partial \varphi} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right); \\
\frac{\partial \hat{T}_{\varphi\varphi}}{\partial \varphi} &= \frac{2\mu T}{r^2 \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^3}{\partial \varphi^3} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \left[ -\frac{2\mu}{r^2} \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{2\mu H}{r} \right] \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \frac{2\mu T}{r^2} \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \varphi} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right); \\
\frac{\partial \hat{T}_{r\varphi}}{\partial r} &= \left[ \mu T'' - \frac{3\mu}{r} T' + \frac{4\mu}{r^2} T + \mu H' - \frac{\mu}{r} H + \mu' \left( T' - \frac{2}{r} T + H \right) \right] \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right).
\end{aligned}$$

Здесь отброшены произведения производных по  $\theta$ , представляющие собой величины второго порядка малости по сжатию.

### Вычисление вертикальной составляющей $\nabla \hat{T}_r$

$$\nabla \hat{T}_r = \frac{\partial \hat{T}_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \hat{T}_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial \hat{T}_{r\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{2\hat{T}_{rr}}{r} + \frac{\hat{T}_{r\theta}}{r} \operatorname{ctg} \theta - \frac{1}{r} \left( \hat{T}_{\theta\theta} + \hat{T}_{\varphi\varphi} \right). \quad (\text{B1})$$

После подстановки в (B.1) составляющих тензора напряжений  $\hat{T}$  (9) и их производных, имеем

$$\begin{aligned}
\nabla \hat{T}_r &= [2\mu H'' + 2\mu' H'] \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \left[ \frac{\mu}{r^2} \cdot \frac{\partial \tau}{\partial \theta} \right] \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \left[ \frac{2\mu}{r^2} \cdot \frac{\partial H}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial \theta} \left( T' - \frac{2}{r} T + H \right) \right] \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \\
&\quad + \left[ \frac{\mu T'}{r^2} - \frac{2\mu}{r^3} T + \frac{\mu H}{r^2} \right] \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \left[ \mu T' - \frac{2\mu}{r} T + \mu H \right] \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \frac{4\mu}{r} H' \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \\
&\quad + \left[ \frac{\mu}{r^2} \tau \cdot \operatorname{ctg} \theta \right] \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \left[ \frac{\mu T'}{r^2} \operatorname{ctg} \theta - \frac{2\mu}{r^3} \operatorname{ctg} \theta \cdot T + \frac{\mu H}{r^2} \operatorname{ctg} \theta \right] \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \\
&\quad + \left[ -\frac{2\mu}{r^2} H + \frac{2\mu}{r^3} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right] \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) - \frac{2\mu}{r^3} T \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \\
&\quad + \left[ -\frac{2\mu H}{r^2} + \frac{2\mu}{r^3} \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right] \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) - \frac{2\mu T}{r^3} \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) - \frac{2\mu T}{r^3 \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right).
\end{aligned}$$

Перегруппировка слагаемых приводит к следующему выражению:

$$\begin{aligned} \nabla \hat{T}_r = & \left[ 2\mu H'' + 2\mu' H' + \frac{4\mu}{r} H' - \frac{4\mu}{r^2} H + \frac{2\mu}{r^3} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \text{ctg}\theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\mu}{r^2} \left( \frac{\partial \tau}{\partial \theta} + \tau \cdot \text{ctg}\theta \right) \right] \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \\ & + \left[ \frac{2\mu}{r^2} \cdot \frac{\partial H}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial \theta} \left( T' - \frac{2}{r} T + H \right) \right] \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \\ & + \left[ \mu T' - \frac{4\mu}{r} T + \mu H \right] \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \frac{1}{r^2} \text{ctg}\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B2})$$

Учитывая в последнем слагаемом (B.2) выражение (A6), а также вводя обозначения  $f = H' + \frac{2}{r} H - \frac{n(n+1)}{r^2} T$  и  $\varphi = \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \text{ctg}\theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right)$ , для  $\nabla \hat{T}_r$  окончательно имеем:

$$\begin{aligned} \nabla \hat{T}_r = & \left[ 2\mu' H' + \frac{\mu(T' - H) \cdot n(n+1)}{r^2} + 2\mu f' + \frac{2\mu}{r} \varphi + \frac{\mu}{r^2} \left( \frac{\partial \tau}{\partial \theta} + \tau \cdot \text{ctg}\theta \right) \right] \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \\ & + \left[ \frac{2\mu}{r^2} \cdot \frac{\partial H}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial \theta} \left( T' - \frac{2}{r} T + H \right) \right] \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right). \end{aligned} \quad (\text{B3})$$

**Вычисление широтной составляющей  $\nabla \hat{T}_\theta$**

$$\nabla \hat{T}_\theta = \frac{\partial \hat{T}_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \hat{T}_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial \hat{T}_{\theta\varphi}}{\partial \varphi} + \frac{3\hat{T}_{r\theta}}{r} + \frac{\hat{T}_{\theta\theta}}{r} \text{ctg}\theta - \frac{\hat{T}_{\varphi\varphi}}{r} \text{ctg}\theta. \quad (\text{B4})$$

Подставляя в (B4) выражения для составляющих тензора напряжений  $\hat{T}$  (9) и их производных, приходим к следующему выражению:

$$\begin{aligned} \nabla \hat{T}_\theta = & \left[ \frac{\mu \tau'}{r} + \left( \mu' - \frac{\mu}{r} \right) \cdot \frac{\tau}{r} \right] \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \left[ \frac{\mu'}{r} \left( T' - \frac{2}{r} T + H \right) + \frac{\mu}{r} \left( T'' - \frac{3}{r} T' + \frac{4}{r^2} T + H' - \frac{1}{r} H \right) \right] \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \\ & + \left[ \frac{2}{r^2} \frac{\partial \mu}{\partial \theta} H + \frac{2\mu}{r^2} \frac{\partial H}{\partial \theta} - \frac{2\mu}{r^3} \frac{\partial^3 T}{\partial \theta^3} \right] \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \left[ \frac{2\mu H}{r^2} - \frac{2\mu}{r^3} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right] \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \left[ \frac{2\mu}{r^3} \cdot \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{2}{r^3} \cdot \frac{\partial \mu}{\partial \theta} T \right] \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \\ & + \frac{2\mu}{r^2} T \frac{\partial^3}{\partial \theta^3} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) - \frac{2\mu T}{r^3 \sin^2 \theta} \text{ctg}\theta \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \frac{2\mu T}{r^3 \sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^3}{\partial \theta \partial \varphi^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \\ & + \left[ \frac{3\mu}{r^2} \tau \right] \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \left[ \frac{3\mu T'}{r^2} - \frac{6\mu}{r^3} T + \frac{3\mu H}{r^2} \right] \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \left[ \frac{2\mu}{r^2} \text{ctg}\theta \cdot H - \frac{2\mu}{r^3} \text{ctg}\theta \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right] \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \\ & + \frac{2\mu}{r^3} T \cdot \text{ctg}\theta \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \left[ -\frac{2\mu H}{r^2} \text{ctg}\theta + \frac{2\mu}{r^3} \text{ctg}^2 \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right] \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) - \frac{2\mu T}{r^3} \text{ctg}^2 \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) - \\ & - \frac{2\mu T}{r^3 \sin^2 \theta} \text{ctg}\theta \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right). \end{aligned}$$

После перегруппировки слагаемых имеем

$$\begin{aligned} \nabla \hat{T}_\theta = & \left[ \frac{\mu\tau'}{r} + \left( \mu' + \frac{2\mu}{r} \right) \frac{\tau}{r} + \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial\mu}{\partial\theta} H + \frac{2\mu}{r^2} \cdot \frac{\partial H}{\partial\theta} - \frac{2\mu}{r^3} \cdot \frac{\partial^3 T}{\partial\theta^3} - \frac{2\mu}{r^3} \text{ctg}\theta \frac{\partial^2 T}{\partial\theta^2} + \frac{2\mu}{r^3} \text{ctg}^2\theta \frac{\partial T}{\partial\theta} \right] \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \\ & + \left[ \frac{\mu'}{r} \left( T' - \frac{2}{r} T + H \right) + \frac{\mu}{r} \left( T'' - \frac{2}{r^2} T + H' + \frac{4}{r} H \right) - \frac{2\mu}{r^3} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial\theta^2} - \frac{2\mu T}{r^3} \text{ctg}^2\theta \right] \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \\ & + \left[ \frac{2\mu}{r^3} \cdot \frac{\partial T}{\partial\theta} + \frac{2}{r^3} \cdot \frac{\partial\mu}{\partial\theta} T \right] \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) - \frac{4\mu T}{r^3 \sin^2\theta} \text{ctg}\theta \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \\ & + \frac{2\mu T}{r^3} \left[ \frac{\partial^3}{\partial\theta^3} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \text{ctg}\theta \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \cdot \frac{\partial^3}{\partial\theta\partial\varphi^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B5})$$

Учитывая в первом слагаемом (B5) тождество

$$-\frac{2\mu}{r^3} \cdot \frac{\partial^3 T}{\partial\theta^3} - \frac{2\mu}{r^3} \text{ctg}\theta \frac{\partial^2 T}{\partial\theta^2} + \frac{2\mu}{r^3} \text{ctg}^2\theta \frac{\partial T}{\partial\theta} = -\frac{2\mu}{r^3} \cdot \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial\theta^2} + \text{ctg}\theta \frac{\partial T}{\partial\theta} \right) - \frac{2\mu}{r^3} \cdot \frac{\partial T}{\partial\theta},$$

а в последнем слагаемом равенство

$$\begin{aligned} \frac{2\mu T}{r^3} \left[ \frac{\partial^3}{\partial\theta^3} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \text{ctg}\theta \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \frac{1}{\sin^2\theta} \cdot \frac{\partial^3}{\partial\theta\partial\varphi^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) \right] - \frac{4\mu T}{r^3 \sin^2\theta} \text{ctg}\theta \frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) = \\ = \left[ -\frac{n(n+1)}{r^3} \cdot 2\mu T + \frac{2\mu T}{r^3 \sin^2\theta} \right] \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right), \end{aligned}$$

которое можно получить, применяя формулу (A6), для  $\nabla \hat{T}_\theta$  окончательно имеем:

$$\begin{aligned} \nabla \hat{T}_\theta = & \left[ \mu T'' + 2\mu f - \mu H' + \mu' \left( T' - \frac{2T}{r} + H \right) - \frac{2\mu}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 T}{\partial\theta^2} \right] \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial\theta} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \\ & + \left[ \frac{2}{r^2} \left( \frac{\partial(\mu H)}{\partial\theta} - \frac{\mu}{r} \frac{\partial T}{\partial\theta} \right) - \frac{2\mu}{r} \cdot \frac{\partial\phi}{\partial\theta} + \frac{(\mu\tau)'}{r} + \frac{2\mu\tau}{r^2} \right] \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \left[ \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial(\mu T)}{\partial\theta} \right] \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right). \end{aligned} \quad (\text{B6})$$

**Вычисление долготной составляющей  $\nabla \hat{T}_\varphi$**

$$\begin{aligned} \nabla \hat{T}_\varphi = & \frac{\partial \hat{T}_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \hat{T}_{\theta\varphi}}{\partial\theta} + \frac{1}{r \sin\theta} \cdot \frac{\partial \hat{T}_{\varphi\varphi}}{\partial\varphi} + \frac{3\hat{T}_{r\varphi}}{r} + \frac{2\hat{T}_{\theta\varphi}}{r} \text{ctg}\theta = \\ = & \left[ \mu T'' - \frac{3\mu}{r} T' + \frac{4\mu}{r^2} T + \mu H' - \frac{\mu}{r} H + \mu' \left( T' - \frac{2}{r} T + H \right) \right] \frac{1}{r \sin\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial\varphi} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \\ & + \left[ \frac{2\mu T}{r^2} \text{ctg}^2\theta - \frac{2}{r^2} \text{ctg}\theta \frac{\partial}{\partial\theta} (\mu T) + \frac{2\mu T}{r^2 \sin^2\theta} \right] \frac{1}{r \sin\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial\varphi} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \\ & + \left[ -\frac{4\mu T}{r^2} \text{ctg}\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial}{\partial\theta} (\mu T) \right] \frac{1}{r \sin\theta} \cdot \frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\varphi} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \frac{2\mu T}{r^3 \sin\theta} \cdot \frac{\partial^3}{\partial\theta^2\partial\varphi} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \\ & + \frac{2\mu T}{r^3 \sin^3\theta} \frac{\partial^3}{\partial\varphi^3} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \left[ -\frac{2\mu}{r^2} \text{ctg}\theta \frac{\partial T}{\partial\theta} + \frac{2\mu H}{r} \right] \frac{1}{r \sin\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial\varphi} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \frac{2\mu T}{r^3} \text{ctg}\theta \frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\varphi} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \\ & + \left[ \frac{3\mu T'}{r} - \frac{6\mu}{r^2} T + \frac{3\mu H}{r} \right] \frac{1}{r \sin\theta} \cdot \frac{\partial}{\partial\varphi} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) - \frac{4\mu T}{r^3 \sin\theta} \text{ctg}^2\theta \frac{\partial}{\partial\varphi} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \frac{4\mu T}{r^3 \sin\theta} \text{ctg}\theta \frac{\partial^2}{\partial\theta\partial\varphi} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right). \end{aligned}$$

После ряда несложных преобразований имеем

$$\begin{aligned} \nabla \hat{T}_\varphi = & \left[ \mu T'' - \frac{2\mu T}{r^2} - \frac{2\mu T}{r^2} \operatorname{ctg}^2 \theta + \frac{2\mu T}{r^2 \sin^2 \theta} + \mu H' + \frac{4\mu H}{r} - \frac{2}{r^2} \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial(\mu T)}{\partial \theta} - \right. \\ & \left. - \frac{2\mu}{r^2} \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} + \mu' \left( T' - \frac{2}{r} T + H \right) \right] \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \left[ \frac{2}{r^2} \cdot \frac{\partial(\mu T)}{\partial \theta} \right] \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \varphi} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \\ & + \frac{2\mu T}{r^3 \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left[ \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) \right]. \end{aligned} \quad (\text{B7})$$

Применяя в последнем слагаемом равенство (А6), после несложных преобразований для  $\nabla \hat{T}_\varphi$  окончательно получаем:

$$\begin{aligned} \nabla \hat{T}_\varphi = & \left[ \mu \cdot T'' + 2\mu \cdot f - \mu \cdot H' + \mu' \left( T' + H - \frac{2T}{r} \right) - \frac{2\mu}{r^2} \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} - \right. \\ & \left. - \frac{2}{r^2} \operatorname{ctg} \theta \frac{\partial(\mu T)}{\partial \theta} \right] \frac{1}{r \sin \theta} \cdot \frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right) + \left[ \frac{2}{r} \frac{\partial(\mu T)}{\partial \theta} \right] \frac{1}{r^2 \sin \theta} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta \partial \varphi} \left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right). \end{aligned}$$

Группируя в (6) члены, стоящие при одинаковых производных от  $\left( \frac{\bar{\omega}}{r^n} \right)$  в составляющих вектора  $\vec{U}$  и соответствующих компонентах дивергенции тензора напряжений, получаем уравнения (10)–(15).

## Приложение С

### Вывод уравнений (26)–(31)

#### Вывод уравнения (26) для $H'$

Уравнение (26) получается из уравнения (22):

$$N = (\lambda + 2\mu) H' + \frac{2\lambda}{r} H - \lambda \left( \varphi + \frac{n(n+1)}{r^2} T \right). \quad (\text{C1})$$

Подставляя в (С1) выражение для функций  $\varphi$  (19), имеем

$$N = (\lambda + 2\mu) H' + \frac{2\lambda}{r} H + \lambda \psi \frac{T}{r^2} - \lambda \frac{n(n+1)}{r^2} T. \quad (\text{C2})$$

Теперь выразим из (С2)  $H'$  и приведем подобные в скобках при функции  $T$ :

$$H' = \left( -\frac{2\lambda}{\lambda + 2\mu} \right) \frac{1}{r} H + \left[ [n(n+1) - \psi] \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} \right] \frac{1}{r^2} T + \frac{1}{\lambda + 2\mu} N. \quad (\text{C3})$$

Подставляя в (С3) нормировки из (25) ( $H = (2n+1)\bar{H}/r^n$ ,  $T = \bar{T}/r^n$ ,  $M = n\bar{M}/r^n$ ,  $N = n(2n+1)\bar{N}/r^n$ ) и учитывая, что  $H' = \frac{2n+1}{r^n}\bar{H}' - \frac{n(2n+1)}{r^{n+1}}\bar{H}$ , после умножения полученного выражения на  $\frac{r^n}{2n+1}$  получаем уравнение (26).

#### **Вывод уравнения (27) для $T'$**

Вывод этого и следующего уравнения наиболее прост. Из (23) непосредственно следует, что

$$T' = -H + \frac{2}{r}T + \frac{M}{r^2\mu}. \quad (\text{C4})$$

Подставляя в это уравнение соответствующие нормировки из (25), получаем уравнение (27).

#### **Вывод уравнения (28) для $R'$**

Из (24) следует, что

$$R' = 4\pi G\rho H + \frac{L}{r^2}. \quad (\text{C5})$$

После применения нормировок (25) получаем (28).

#### **Вывод уравнения (29) для $L'$**

Дифференцируя (С.5) по радиусу, имеем

$$R'' = 4\pi G\rho'H + 4\pi G\rho H' + \frac{L'}{r^2} - \frac{2L}{r^3}. \quad (\text{C6})$$

Подставляя (С5) и (С6) в (20) и учитывая выражения для функций  $f = H' + \frac{2}{r} \cdot H - \frac{n(n+1)}{r^2} \cdot T$  и  $\varphi$  (19), после сокращения ряда слагаемых имеем

$$L' = 4\pi G\rho [\psi + 3\varepsilon p_2 - n(n+1)]T + n(n+1)R, \quad (\text{C7})$$

откуда после применения нормировок (25) получаем (29).

#### **Вывод уравнения (30) для $M'$**

Из (23) следует, что

$$\left( \mu \left( T' - \frac{2}{r}T + H \right) \right)' = \frac{M'}{r^2} - \frac{2M}{r^3}.$$

Подставляя это выражение в (18) и раскрывая функции  $f$  и  $\varphi$  согласно формуле, данной сразу после (8), а также выражению (19), после умножения на  $-1$  из (18) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{M'}{r^2} - \frac{2M}{r^3} = & -\rho V'H - \rho R - \lambda H' - \frac{2\lambda}{r}H + \frac{n(n+1)}{r^2}\lambda T - \frac{4\mu}{r}H - \frac{2\mu}{r}T' + \frac{n^2+n+1}{r^2}2\mu T - \\ & - (2\mu + \lambda)\psi \frac{T}{r^2}. \end{aligned}$$

Далее заменим  $T'$  согласно (С4). После сокращения на  $-\frac{2M}{r^3}$  и группировки слагаемых по искомым функциям имеем

$$\frac{M'}{r^2} = \left[ -\rho V' - \frac{2(\lambda + \mu)}{r} \right] H + \left[ \frac{n(n+1)}{r^2} \lambda - \frac{4\mu}{r^2} + \frac{n^2 + n + 1}{r^2} 2\mu - \frac{(2\mu + \lambda)}{r^2} \psi \right] T - \rho R - \lambda H'.$$

Теперь заменим  $H'$  согласно (С3). Тогда, после группировки слагаемых, получим

$$M' = - \left[ \frac{2\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + 2\mu} \cdot r + \rho r^2 V' \right] H + \left[ \frac{2\mu\lambda}{\lambda + 2\mu} n(n+1) + (n^2 + n - 1) \cdot 2\mu - \frac{4\mu(\lambda + \mu)}{\lambda + 2\mu} \cdot \psi \right] T - \rho r^2 R - \frac{\lambda}{\lambda + 2\mu} r^2 N.$$

После нормировки из этого выражения получим уравнение (30) без входящей в это уравнение поправки за относительные и кориолисовы ускорения (слагаемое  $-2\rho r^2 \Omega^2 \sin^2 \theta$  при  $\frac{1}{n} T$ ).

### Вывод уравнения (31) для $N'$

Вывод этого уравнения наиболее сложен. Применяя выражение для функции  $f$  (см. уравнение после (8)), из (22) легко получить, что

$$(\lambda(f - \varphi) + 2\mu H')' = N'.$$

Подставляя это выражение в (17), после применения (С4) и (С5) для  $T'$  и  $R'$ , а также раскрытия функций  $f$  (8) и  $\varphi$  (19) и группировки относительно искомым функциям имеем

$$N' + \left[ \rho V'' - \frac{2\rho V'}{r} + 4\pi G\rho^2 - \frac{4\mu}{r^2} \right] H + \left[ n(n+1)\rho V' + \frac{n(n+1)}{r} 2\mu - \left( \rho V' + \frac{2\mu}{r} \right) \psi \right] \frac{T}{r^2} + \frac{\rho}{r^2} L - \frac{n(n+1)}{r^4} M + \frac{4\mu}{r} H' + \frac{\mu}{r^2} \left( \frac{\partial \tau}{\partial \theta} + \text{ctg} \theta \cdot \tau \right) = 0.$$

Теперь подставим в полученное выражение уравнение (С3) для  $H'$ , а также следующее из (32) выражение

$$\rho V'' - \frac{2}{r} \rho V' = -\frac{2\mu\psi}{r^2} + 2\rho\Omega^2 - 4\pi G\rho^2 - \frac{4}{r} \rho V'.$$

В результате получим

$$N' = \left[ \frac{4\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + 2\mu} \cdot \frac{1}{r^2} + \frac{4}{r} \rho V' + \frac{2\mu\psi}{r^2} - 2\rho\Omega^2 \right] H - \left[ [n(n+1) - \psi] \cdot \left( \frac{4\mu\lambda}{\lambda + 2\mu} \cdot \frac{1}{r} + \rho V' + \frac{2\mu}{r} \right) \right] \frac{T}{r^2} - \frac{\rho}{r^2} L + \left[ \frac{n(n+1)}{r^4} \right] M - \frac{4\mu}{\lambda + 2\mu} \cdot \frac{1}{r} N - \frac{\mu}{r^2} \left( \frac{\partial \tau}{\partial \theta} + \text{ctg} \theta \cdot \tau \right).$$

Применяя выражение (D5), легко получить, что

$$\frac{\partial \tau}{\partial \theta} + \text{ctg} \theta \cdot \tau = \left[ \left( \frac{\rho}{2\mu} \right)' \cdot \left( \frac{2\mu}{\rho} \right) \cdot \psi \right] \cdot T.$$



Подставим это выражение в предыдущее. В результате после перегруппировки слагаемых имеем

$$N' = \left[ \frac{4}{r^2} \cdot \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + 2\mu} + \frac{4}{r} \rho V' + \frac{2\mu\psi}{r^2} - 2\rho\Omega^2 \right] H -$$

$$- \left[ \left( \rho V' + \frac{2}{r} \mu + \frac{4}{r} \cdot \frac{\mu\lambda}{\lambda + 2\mu} \right) (n(n+1) - \psi) + \left( \frac{\rho}{2\mu} \right)' \cdot \left( \frac{2\mu}{\rho} \right) \mu\psi \right] \frac{1}{r^2} T - \frac{\rho}{r^2} L +$$

$$+ \frac{1}{r^4} [n(n+1)] M + \frac{1}{r} \left( -4 \frac{\mu}{\lambda + 2\mu} \right) N.$$

После нормировки этого выражения получаем уравнение (31) без добавочного слагаемого  $-4\rho\Omega^2 \cos^2 \theta$  при  $H$ , которое дает поправку за относительные и кориолисовы ускорения.

## Приложение D

### Вывод функции $\tau$

Функция  $\tau$  введена в выражениях (9) и равна

$$\tau = -\frac{\partial T'}{\partial \theta} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial \theta} + \frac{\partial H}{\partial \theta}. \quad (D1)$$

Из (16) имеем

$$\frac{2}{r} \cdot \frac{\partial T}{\partial \theta} = \left( -\frac{\rho}{\mu r} \cdot \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) \cdot T. \quad (D2)$$

Дифференцируя (16) и приводя подобные при искомым функциях, а также учитывая (23), легко получить выражение для первого входящего в (D1) слагаемого:

$$-\frac{\partial T'}{\partial \theta} = \left( -\frac{\rho}{2\mu} \cdot \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) \cdot H + \left( \left( \frac{\rho}{2\mu} \right)' \frac{\partial V}{\partial \theta} + \frac{\rho}{2\mu} \cdot \frac{\partial V'}{\partial \theta} + \frac{\rho}{\mu r} \cdot \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) \cdot T + \left( \frac{\rho}{2\mu^2 r^2} \cdot \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) \cdot M. \quad (D3)$$

Последнее слагаемое в (D1) получается из уравнения (14). Заменяя в (14)  $T'$  согласно (23), после частичного сокращения слагаемых в среднем члене уравнения и раскрытия производной по радиусу в последнем слагаемом имеем

$$2\mu \frac{\partial H}{\partial \theta} + \rho r^2 \left( \frac{T}{r^2} \cdot \frac{\partial V'}{\partial \theta} + \frac{T'}{r^2} \cdot \frac{\partial V}{\partial \theta} - \frac{2T}{r^3} \cdot \frac{\partial V}{\partial \theta} \right) = 0.$$

Снова выражая  $T'$  из (14), после перегруппировки слагаемых получаем:

$$\frac{\partial H}{\partial \theta} = \frac{\rho}{2\mu} \cdot \frac{\partial V}{\partial \theta} H - \frac{\rho}{2\mu} \cdot \frac{\partial V'}{\partial \theta} T - \frac{\rho}{2\mu^2 r^2} \cdot \frac{\partial V}{\partial \theta} M. \quad (D4)$$

Складывая (D2), (D3) и (D4), после сокращения 10 членов для функции  $\tau$  окончательно имеем

$$\tau = \left[ \left( \frac{\rho}{2\mu} \right)' \frac{\partial V}{\partial \theta} \right] \cdot T. \quad (D5)$$

*Сведения об авторе*

**СПИРИДОНОВ Евгений Александрович** – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник, Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН. 123242, г. Москва, ул. Большая Грузинская, д. 10, стр. 1. Тел.: +7 (915) 141-78-76. E-mail: sp287@mail.ru

## **TIDAL AMPLITUDE DELTA-FACTORS AND PHASE SHIFTS FOR EARTH WITH OCEAN**

**E.A. Spiridonov**

Shmidt Institute of Physics of the Earth, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

**Abstract.** The generalization of M.S. Molodenskiy's problem, which describes the state of self-gravitating elastic compressible sphere, to the case of biaxial hydrostatic rotating elliptical inelastic shell is obtained. The six-order system of equations is complemented by the corrections for the relative and Coriolis accelerations. The ordinary and load Love numbers are calculated with the allowance for their latitude dependence and dissipation for different Earth's structure models (tree variants of AK135, IASP91 and PREM). The theoretical amplitude delta-factors of degree 2 for the oceanic Earth are compared with their most recent empirical counterparts obtained by the GGP network gravimeters.

*Keywords:* tidal amplitude delta-factors, Love numbers, tidal prediction.

*About the author*

**SPIRIDONOV Evgeny Aleksandrovich** – Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Leading Researcher, Schmidt Institute of Physics of the Earth of the Russian Academy of Sciences. 123242, Moscow, ul. Bolshaya Gruzinskaya, 10, building 1. E-mail: sp287@mail.ru