

УДК 551.551

ОБОБЩЕНИЕ ЛОГИСТИЧЕСКОГО ЗАКОНА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В МОДЕЛИ ДИНАМИКИ НАПРАВЛЕНИЯ ВЕТРА

© 2015 г. Е.В. Капля

Волжский филиал Московского энергетического института, г. Волжский, Россия

Установлена статистическая закономерность в динамике направления ветра. Выполнена аппроксимация плотности распределения приращения угла направления ветра путем обобщения логистического закона. В логистический закон распределения введен дополнительный степенной параметр. Параметры аппроксимационной функции вычислены по экспериментальным данным на основе метода наименьших квадратов. Согласие предложенной функции с метеорологическими данными проверено с помощью критериев согласия Пирсона и Колмогорова.

Ключевые слова: направление ветра, приращение угла направления ветра, логистическое распределение, плотность вероятности, аппроксимационная функция.

Введение

Порывистость и завихренность воздушных потоков влияет на большинство процессов в биосфере: перенос песка, пыли и влаги, пыльцы и семян [Гендугов, Глазунов, 2007]. Ветровая эрозия почвы, интенсивность переноса частиц и запыленность воздуха определяются скоростью и направлением ветра. Возникновение смерчеподобных вихрей, имеющих вертикальную ось вращения, приводит к появлению вихревой подъемной силы [Гендугов, Глазунов, 2007; Вараксин и др., 2011]. Величина подъемной силы, приложенной к сферической частице, пропорциональна квадрату скорости воздушного потока [Гендугов, Глазунов, 2007]. Для описания статистического распределения скорости ветра [Shao, 2008] применяют закон Вейбулла.

При моделировании биосферных процессов целесообразно учитывать не только розу ветров, но и изменение направления воздушных потоков. Изменение направления ветра имеет вероятностный характер, поэтому необходимо идентифицировать статистический закон распределения приращения угла направления ветра за короткие промежутки времени. Статистический анализ приращений угла направления ветра позволяет выявить закономерности в динамике направления ветра.

Цель настоящего исследования – аппроксимация плотности распределения приращения угла направления ветра и проверка согласия предложенного гипотетического закона распределения с экспериментальными данными.

Динамика направления воздушного потока

При имитационном моделировании переходных процессов, в частности в ветроэнергетической установке, целесообразно использовать дискретную математическую модель воздушного потока, которая содержит угол ориентации вектора усредненной мгновенной скорости воздушного потока γ_q в момент времени $t_q = q\Delta t + t_0$, где q – номер дискретного момента времени; t_0 – начальный момент времени; Δt – величина приращения времени.

Эволюция направления воздушного потока в заданной точке пространства описывается рекуррентной формулой $\gamma_{q+1} = \gamma_q + \Delta\gamma_q$. Величины приращений $\Delta\gamma_q$ образуют случайную временную последовательность. Вероятностные характеристики и свойства последовательности приращений угла $\Delta\gamma_q$ зависят от соответствующей выбранной величины Δt . Выявление свойств указанной последовательности возможно на основе статистического и корреляционного анализа экспериментальных данных.

Описание массива экспериментальных данных

Экспериментальные данные получены на метеостанции Волжского филиала Московского энергетического института (ВФМЭИ) в г. Волжском Волгоградской обл. с помощью ультразвукового анемометра WXT-520 фирмы «Vaisala» [Vaisala..., 2010]. Ультразвуковые датчики направления и скорости ветра не обладают инерционными свойствами в отличие от электромеханических датчиков с пропеллером. Это преимущество позволяет использовать ультразвуковые датчики для измерений быстроизменяющихся характеристик воздушного потока.

Результаты измерений угла γ направления ветра сохранены аппаратурой метеостанции после округления до целых чисел в диапазоне $1-360^\circ$. Период опроса датчика – $\Delta t = 3$ с. Каждому измерению угла γ и скорости ветра v соответствует номер измерения s .

Нулевой угол γ имеет вектор скорости ветра, направленный с севера на юг. Положительное приращение угла $\Delta\gamma$ соответствует повороту вектора мгновенной скорости ветра \vec{v} по часовой стрелке на угол, не превышающий 180° . Отрицательное приращение $\Delta\gamma$ соответствует повороту вектора \vec{v} против часовой стрелки (рис. 1).

Величину приращения $\Delta\gamma$ угла направления ветра имеет смысл рассматривать в полуинтервале $\Delta\gamma \in (-180^\circ; +180^\circ]$. Границы области определения измеренного угла γ замкнуты, поэтому величина $\Delta\gamma$ определяется выражением

$$\Delta\gamma_s = \begin{cases} \gamma_s - \gamma_{s-1}, & \text{если } |\gamma_s - \gamma_{s-1}| \leq \vartheta, \\ \gamma_s - \gamma_{s-1} - 2\vartheta & \text{при } -\vartheta < (\gamma_s - \gamma_{s-1} - 2\vartheta) < 0, \\ \gamma_s - \gamma_{s-1} + 2\vartheta & \text{при } 0 < (\gamma_s - \gamma_{s-1} + 2\vartheta) < \vartheta, \end{cases}$$

где $\vartheta = 180^\circ$.

Величина $\Delta\gamma_s$ принимает целые значения в диапазоне $1 - \vartheta \leq \Delta\gamma_s \leq \vartheta$. Допустимые значения $\Delta\gamma$ пронумеруем как $\Delta\gamma_i = i - \vartheta$, где $i = 1, 2, \dots, M$; $M = 360$.

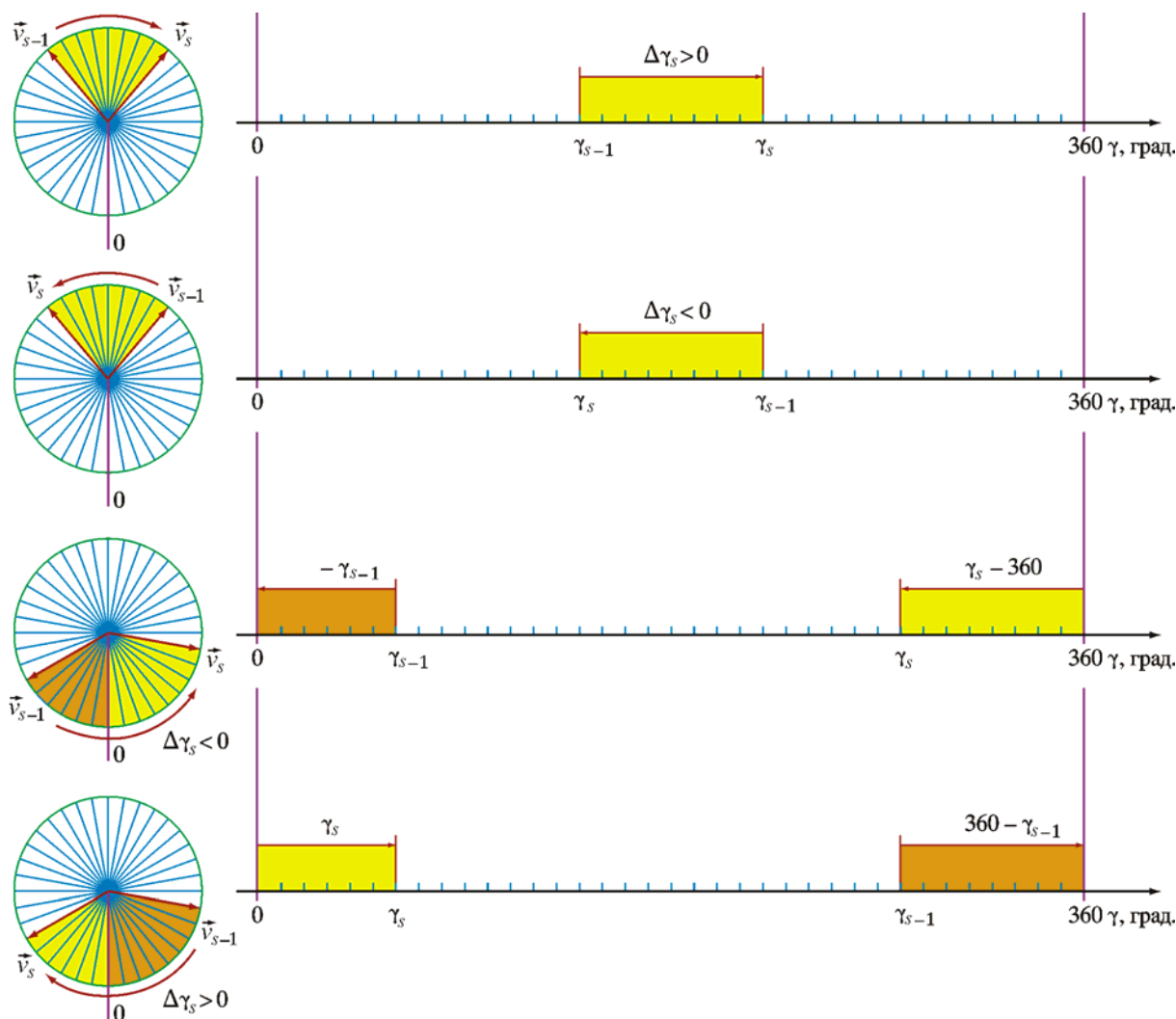


Рис. 1. Схема возможных изменений угла направления ветра

Слева – направления векторов мгновенной скорости ветра; справа – развертка секторов, соответствующих приращениям угла направления ветра

Эмпирическая функция плотности распределения $\Delta\gamma$ равна отношению

$$f_e(i, T) = n(i, T) / N(T),$$

где T – продолжительность измерений; $N(T)$ – объем анализируемой экспериментальной выборки.

Величина $N(T)$ равна:

$$N(T) = \sum_{i=1}^M n(i, T).$$

Здесь $n(i, T)$ – количество экспериментальных значений $\Delta\gamma_s$, равных $\Delta\gamma_i$.

Результаты расчета эмпирической плотности распределения вероятности приращения угла направления ветра за интервал времени $\Delta t = 3$ с представлены на рис. 2, а–5, а столбчатыми гистограммами. Форма экспериментальных гистограмм близка к симметричной. Аналогичные гистограммы получены зарубежными исследователями [Mahrt, 2011] в других районах Земли.

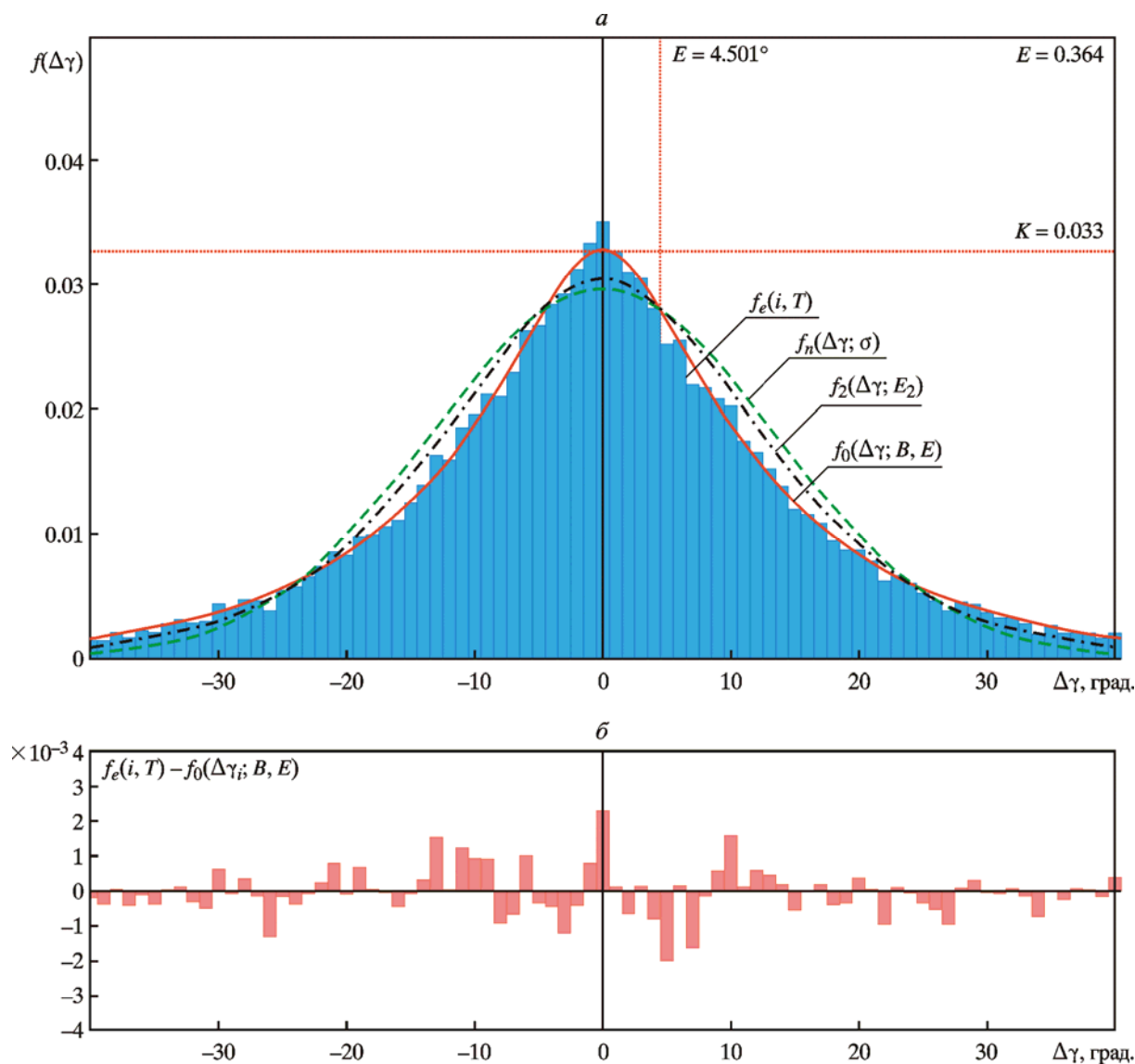


Рис. 2. Плотность распределения вероятности $f_0(\Delta\gamma; B, E)$ приращения угла направления ветра и нормированная гистограмма $f_e(i, T)$, построенная по суточной выборке 10.03.2014 г., (а) и их абсолютные значения (б)

Коэффициент эксцесса плотности распределения

Количественная характеристика острровершинности эмпирической функции плотности распределения – выборочный коэффициент эксцесса (ВКЭ), который вычисляют по формуле [Прикладная..., 1983]

$$\Lambda_x = \frac{\frac{1}{N(T)} \cdot \sum_{k=1}^{N(T)} (x_k - \bar{x})^4}{\left[\frac{1}{N(T)} \cdot \sum_{k=1}^{N(T)} (x_k - \bar{x})^2 \right]^2} - 3.$$

Примем в качестве x приращение угла $\Delta\gamma$. ВКЭ, найденный по месячным выборкам приращения угла направления ветра, принадлежит отрезку от 10 до 13. ВКЭ, вычисленный на основе суточных выборок, варьируется в пределах от 4 до 22. ВКЭ, найденный по 4-часовым выборкам приращения угла направления ветра, принадлежит отрезку от 1 до 57. Значения ВКЭ не зависят от времени года и могут существенно меняться в течение суток.

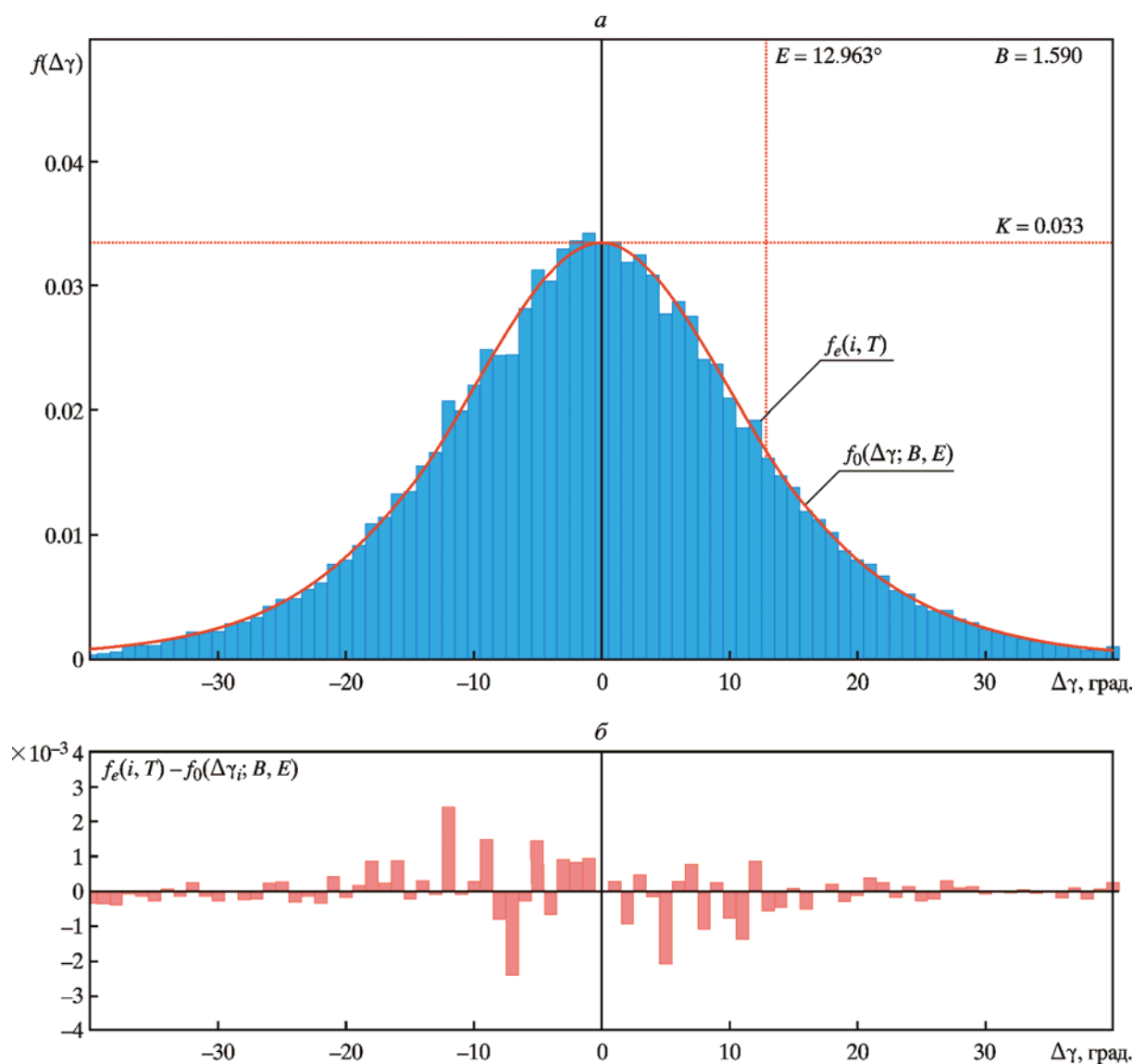


Рис. 3. Плотность распределения вероятности $f_0(\Delta\gamma; B, E)$ приращения угла направления ветра и нормированная гистограмма $f_e(i, T)$, построенная по суточной выборке 18.03.2014 г., (а) и их абсолютные значения (б)

Нормальное распределение имеет нулевой эксцесс, поэтому аппроксимация эмпирической плотности распределения приращения угла направления ветра нормальным законом некорректна. Аппроксимацию эмпирической плотности распределения приращения угла направления ветра целесообразно осуществлять на основе функции с варьируемым коэффициентом эксцесса.

Аппроксимация плотности распределения

Эмпирические плотности распределения приращения угла направления ветра аппроксимируем функцией

$$f(\Delta\gamma; B, E) = K \cdot \left(\operatorname{sech} \left(\frac{\Delta\gamma}{E} \right) \right)^B, \quad (1)$$

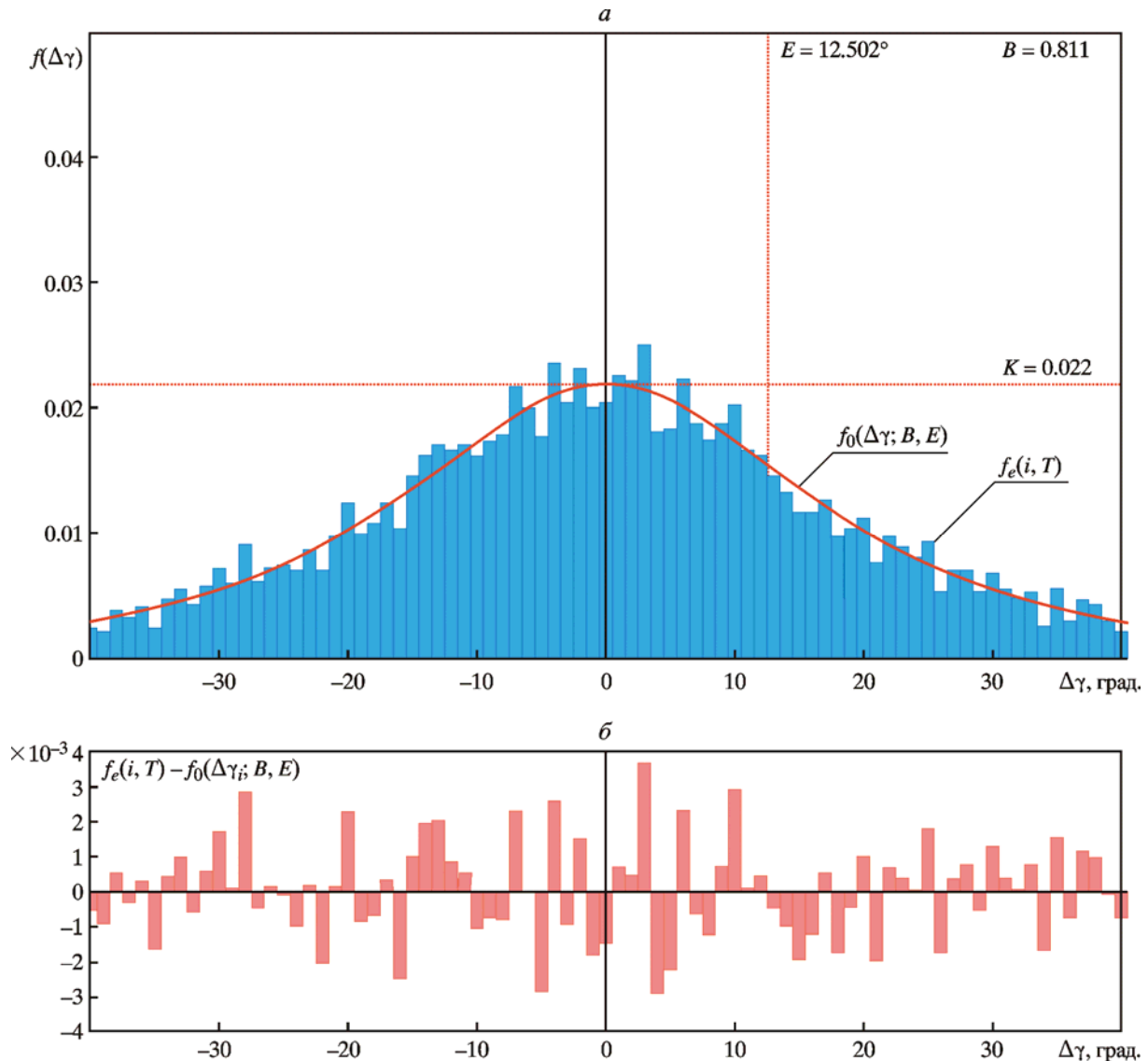


Рис. 4. Плотность распределения вероятности $f_0(\Delta\gamma; B, E)$ приращения угла направления ветра и нормированная гистограмма $f_e(i, T)$, построенная по 4-часовой выборке 00–04 ч 10.03.2014 г., (а) и их абсолютные значения (б)

где K – нормировочный коэффициент; $\operatorname{sech}(\cdot)$ – гиперболический секанс; E – угловой параметр; B – безразмерный степенной параметр. Параметр E имеет размерность угла (размерность величины $\Delta\gamma$). Коэффициент K обладает обратной размерностью.

Из условия нормировки плотности распределения следует равенство

$$\int_{-9}^{+9} K \cdot \left(\operatorname{sech}\left(\frac{\Delta\gamma}{E}\right) \right)^B d(\Delta\gamma) = 1. \quad (2)$$

Выразив нормировочный коэффициент K из равенства (2), можно привести формулу (1) к двухпараметрическому виду:

$$f_0(\Delta\gamma; B, E) = \frac{\left(\operatorname{sech}\left(\frac{\Delta\gamma}{E}\right) \right)^B}{\int_{-9}^{+9} \left(\operatorname{sech}\left(\frac{\Delta\gamma}{E}\right) \right)^B d(\Delta\gamma)}. \quad (3)$$

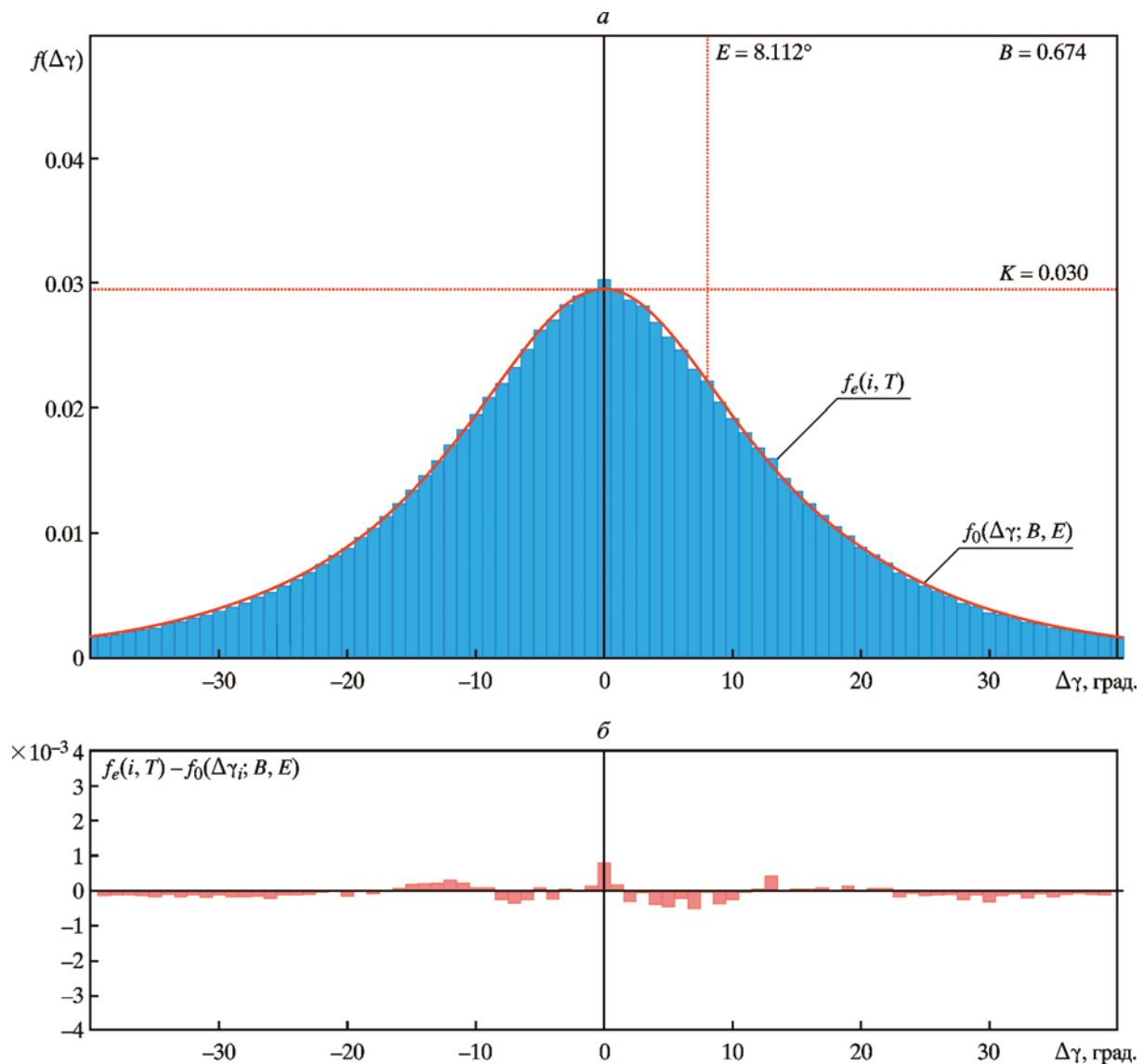


Рис. 5. Плотность распределения вероятности $f_0(\Delta\gamma; B, E)$ приращения угла направления ветра и нормированная гистограмма $f_e(i, T)$, построенная по месячной выборке марта 2014 г., (а) и их абсолютные значения (б)

Функции (1) и (3) обладают симметрией и нулевым математическим ожиданием. Коэффициент эксцесса функции (3) зависит от параметров B и E . Наличие двух независимых параметров обуславливает вариабельность формы плотности распределения (3).

Величины B и E целесообразно определять методом наименьших квадратов в результате минимизации целевой функции $R(B, E)$

$$R(B, E) = \sum_{i=1}^M [f_e(i, T) - f_0(\Delta\gamma_i; B, E)]^2. \quad (4)$$

Значения параметров аппроксимационной функции (3) зависят от периода дискретизации времени Δt и продолжительности T измерений. Для выборок объемом $N = 4800$ (что соответствует $T = 4$ ч при $\Delta t = 3$ с) величины B и E характеризуются диапазонами: $0.088^\circ \leq E \leq 20.129^\circ$, $0.010 \leq B \leq 1.920$. Значения параметров, вычисленные по месячным выборкам, принадлежат более узким отрезкам: $6.16^\circ \leq E \leq 8.12^\circ$, $0.53 \leq B \leq 0.67$.

На основе формулы (3) и найденных значений параметров B и E построены непрерывные статистические распределения плотности вероятности $\Delta\gamma$. Сплошными линиями на рис. 2, а–5, а показаны теоретические плотности распределения $f_0(\Delta\gamma; B, E)$.

Абсолютные отклонения $f_0(\Delta\gamma; B, E)$ от $f_e(i, T)$ представлены столбчатыми диаграммами на рис. 2, б–5, б. Увеличение объема выборки приводит к уменьшению отклонений теоретических распределений от эмпирических, что подтверждает статистическую устойчивость аппроксимации.

На рис. 2, а показаны три распределения вероятности: $f_0(\Delta\gamma; B, E)$ – предлагаемый закон распределения; $f_2(\Delta\gamma; E_2)$ – логистический закон распределения; $f_n(\Delta\gamma; \sigma)$ – нормальный закон распределения. Параметры этих распределений найдены методом наименьших квадратов в результате минимизации целевых функций, аналогичных (4). Предлагаемый закон распределения $f_0(\Delta\gamma; B, E)$ имеет минимальное отклонение от нормированной экспериментальной гистограммы $f_e(i, T)$.

Частные случаи аппроксимационной функции

Когда $B = 1$ и $\vartheta = \infty$ формула (3) приводится к виду

$$f_1(\Delta\gamma; E) = \frac{1}{\pi \cdot |E|} \cdot \operatorname{sech}\left(\frac{\Delta\gamma}{E}\right). \quad (5)$$

Когда $B = 2$ и $\vartheta = \infty$ формула (3) соответствует логистическому распределению [Balakrishnan, 1992] с нулевым математическим ожиданием:

$$f_2(\Delta\gamma; E) = \frac{1}{2 \cdot |E|} \cdot \operatorname{sech}^2\left(\frac{\Delta\gamma}{E}\right). \quad (6)$$

Распределения, заданные формулами (5) и (6), характеризуются постоянным коэффициентом эксцесса. В частности, коэффициент эксцесса логистического распределения равен 1.2. Следовательно, формулы (5) и (6) не являются универсальным описанием распределения плотности вероятности приращения угла направления ветра.

Проверка согласия обобщенного закона распределения с экспериментальными данными

Проверка гипотез о согласии гипотетических законов распределения с экспериментальными данными выполнена на основе критерия Пирсона и критерия Колмогорова.

Статистика критерия Пирсона определяется формулой [Ивченко, Медведев, 1984]

$$G(T) = N(T) \cdot \sum_{i=1}^M \frac{(f_e(i, T) - P(i, T))^2}{P(i, T)},$$

где $N(T)$ – количество учитываемых экспериментальных значений $\Delta\gamma$; $P(i, T)$ – теоретическая вероятность попадания в интервал с номером i .

Величина $P(i, T)$ определяется интегралом

$$P(i, T) = \int_{\Delta\gamma_i - \delta/2}^{\Delta\gamma_i + \delta/2} f_0(\Delta\gamma; B(T), E(T)) d(\Delta\gamma),$$

где δ – ширина каждого интервала, $\delta = 1^\circ$; $\Delta\gamma_i$ – середина i -го интервала градации величины $\Delta\gamma$.

Критическое значение \tilde{G} статистики критерия Пирсона равно квантили $q\chi^2(\tilde{p}, \nu)$ распределения χ -квадрат с доверительной вероятностью \tilde{p} и числом степеней свободы ν , где $\nu = M - r - 1$; $\tilde{p} = 1 - \alpha$; α – уровень значимости критерия; r – число оцениваемых параметров распределения.

Гипотеза о согласии аппроксимационной функции с экспериментальными данными считается подтвержденной, если выполняется условие

$$G(T) < \tilde{G}. \quad (7)$$

Статистика критерия Колмогорова определяется формулой [Ивченко, Медведев, 1984]

$$G(T) = \sqrt{N(T)} \cdot \sup_{\Delta\gamma_i} \left| F_e(\Delta\gamma_i, T) - F_0(\Delta\gamma_i; B(T), E(T)) \right|,$$

где $F_e(\cdot)$ – эмпирическая функция распределения $\Delta\gamma$, построенная по экспериментальным данным; $F_0(\cdot)$ – теоретическая функция распределения. Критическое значение \tilde{G} статистики критерия Колмогорова равно квантили распределения Стьюдента [Ивченко, Медведев, 1984] с доверительной вероятностью \tilde{p} и числом степеней свободы ν . Проверяемая гипотеза считается подтвержденной, если выполняется условие, аналогичное (7).

Уровень значимости критериев согласия задан равным $\alpha = 0.05$, что соответствует доверительной вероятности $\tilde{p} = 95\%$.

Гипотезы о согласии стандартных законов распределения (нормального и логистического) с экспериментальными гистограммами на основе критериев согласия Пирсона и Колмогорова не подтвердились.

Согласие экспериментальных 4-часовых выборок с предложенной формулой (3) подтверждается критериями согласия Пирсона и Колмогорова с указанной доверительной вероятностью при $T = 4$ ч и $\Delta t = 3$ с. Условие (7) выполняется для всех исследованных экспериментальных выборок продолжительностью не более 4 ч и для малой части суточных выборок при $\Delta t = 3$ с, что подтверждает гипотезу о согласии экспериментальных данных с предложенной статистической формулой (3) для выборок продолжительностью в несколько часов. Значения статистики для 4-часовой выборки (00–04 ч 10.03.2014 г.) приведены в таблице.

Экспериментальные и критические значения статистики

Критерий согласия	$G(T = 4 \text{ ч})$	\tilde{G}
Пирсона	188.68	210.13
Колмогорова	1.334	1.653

Теоретические распределения плотности вероятности, полученные на основе формулы (3), визуально соответствуют (см. рис. 5) экспериментальным гистограммам, построенным на основе месячных выборок, однако гипотеза о согласии формулы (3) с месячными выборками не подтверждается на основе критериев согласия Пирсона и Колмогорова. Гипотеза о согласии не подтверждается на основе указанных критериев и для большинства суточных выборок.

Анализ результатов на основе теории турбулентности

Теория турбулентности Колмогорова [Durbin, Pettersson-Reif, 2011; Birnir, 2013] предполагает наличие процесса каскадного дробления крупных вихрей. Энергетический спектр, построенный в [Симю, Сканлан, 1984; Simiu, Scanlan, 1996; Гендугов, Глазунов, 2007] на основе экспериментальных наблюдений, имеет два максимума. В спектре пульсаций скорости воздушных потоков существует «провал», который разделяет мелкомасштабные и мезомасштабные движения воздушных потоков [Симю, Сканлан, 1984; Гендугов, Глазунов, 2007]. Частотный диапазон «провала» соответствует промежуткам времени порядка 1 ч.

Гипотеза о согласии плотности распределения экспериментальных данных с формулой (3) подтверждается на основе критериев согласия для выборок продолжительностью до нескольких часов, т.е. для мелкомасштабных вихрей.

Дрейф значений параметров закона распределения (3) обусловлен мезомасштабными движениями воздушных потоков в атмосфере. Циклоны и другие мезомасштабные вихревые структуры вызывают изменение параметров функции (3) во времени.

Резюме

Идентифицирована формула, соответствующая закону распределения вероятности приращения угла направления ветра за равные промежутки времени. Идентификация формулы выполнена по экспериментальным выборкам углов направления ветра. Полученная формула является обобщением логистического закона распределения. В логистический закон введен дополнительный степенной параметр B , влияющий на форму распределения. Плотность распределения вероятности приращения угла направления ветра можно аппроксимировать функцией

$$f_0(\Delta\gamma; B, E) = \frac{\left(\operatorname{sech}\left(\frac{\Delta\gamma}{E}\right)\right)^B}{\int_{-\vartheta}^{+\vartheta} \left(\operatorname{sech}\left(\frac{\Delta\gamma}{E}\right)\right)^B d(\Delta\gamma)}.$$

Параметры аппроксимационной функции вычислены по экспериментальным метеоданным на основе метода наименьших квадратов.

Согласие предложенного обобщенного логистического закона с метеорологическими данными подтверждается с помощью критериев согласия Пирсона и Колмогорова для выборок продолжительностью до нескольких часов.

Литература

- Вараксин А.Ю., Ромаш М.Э., Копейцев В.Н. Торнадо. М.: Физматлит, 2011. 344 с.
- Гендугов В.М., Глазунов Г.П. Ветровая эрозия почвы и запыление воздуха. М.: Физматлит, 2007. 240 с.
- Ивченко Г.И., Медведев Ю.И. Математическая статистика. М.: Высш. шк., 1984. 248 с.
- Прикладная статистика: Основы моделирования и первичная обработка данных: Справ. изд. / С.А. Айвазян, И.С. Енюков, Л.Д. Мешалкин. М.: Финансы и статистика, 1983. 471 с.
- Симю Э., Сканлан Р. Воздействие ветра на здания и сооружения / Пер. с англ. под ред. Б.Е. Маслова. М.: Стройиздат, 1984. 360 с.

- Balakrishnam V.* Handbook of the logistic distribution. N.Y.: Marcel Dekker, 1992. 586 p.
- Birniir B.* The Kolmogorov–Obukhov theory of turbulence. A mathematical theory of turbulence. N.Y.; Heidelberg; Dordrecht; London: Springer, 2013. 108 p.
- Durbin P.A., Pettersson-Reif B.A.* Statistical theory and modeling for turbulent flows. 2nd ed. N.Y.: John Wiley & Sons, Ltd., 2011. 358 p.
- Handbook of the logistic distribution. N.Y.: Marcel Dekker, 1992. 586 p.
- Mahrt L.* Surface wind direction variability // J. of Appl. Meteorology and Climatology. 2011. V. 50. P. 144–152.
- Shao Y.* Physics and modeling of wind erosion. 2nd ed. Springer, 2008. 452 p.
- Simiu E., Scanlan R.H.* Wind effects on structures: Fundamentals and applications to design. 3rd ed. N.Y.: John Wiley & Sons Inc., 1996. 689 p.
- Vaisala weather transmitter WXT520. Helsinki: Vaisala, 2010. 168 p.

Сведения об авторе

КАПЛЯ Егор Викторович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры «Автоматизация технологических процессов и производств»; ведущий научный сотрудник лаборатории диагностики и прогнозирования, Волжский филиал Московского энергетического института. 404110, Волгоградская обл., г. Волжский, просп. Ленина, д. 69. Тел.: +7 (909) 386-32-17. E-mail: ev-kaple@yandex.ru

KAPLYA Egor Victorovich – Ph. D. (in) Physical Sciences, associative professor of faculty «Automation of technological processes and productions»; leading researcher in laboratory of diagnostics and prediction, Volgsky City Branch of Moscow Power Engineering Institute. Volgsky, Volgograd district, Russia. Tel.: +7 (909) 386-32-17. E-mail: ev-kaple@yandex.ru

THE GENERALIZATION OF THE LOGISTIC DISTRIBUTION IN THE DYNAMIC MODEL OF WIND DIRECTION

E.V. Kaplya

Volgsky city Branch of the Moscow Power Engineering Institute, Volgsky, Russia

Abstract. The statistical regularity in the dynamics of the wind direction is revealed. The approximation of the density distribution of the increment of the angle of wind direction is performed by generalization of the logistic distribution. An additional power-law parameter is introduced in the logistic distribution. The parameters of the approximating function are computed from the experimental data using the least square method. The approximating function consistency with meteorological data is tested using Pearson and Kolmogorov tests.

Keywords: wind direction, increment angle wind direction, logistic distribution, probability density, approximation function.