ГЕОМАГНЕТИЗМ И АЭРОНОМИЯ, 2013, том 53, № 6, с. 852–857

УДК 537.67;515.164.17;05-422;01-105

ОДНО ПРИЛОЖЕНИЕ ТЕОРИИ ОСОБЕННОСТЕЙ ГЛАДКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ ДЛЯ СТАТИСТИКИ ПАЛЕОМАГНИТНЫХ ДАННЫХ

© 2013 г. П. М. Ахметьев[1, 2]

[1]Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. В.А. Пушкова, РАН (ИЗМИРАН) г. Троицк, г. Москва

[2]Московский городской психолого-педагогический университет (МГППУ), г. Москва

e-mail: pmakhmet@izmiran.ru

Поступила в редакцию 17.11.2011 г.
После доработки 15.01.2013 г.

Решена задача, связанная со статистической обработкой палеомагнитных данных. Построена система координат на сферической поверхности (Земли), причем первая координата P указанной системы вычисляется по функции распределения плотности палеомагнитных данных на поверхности (Земли), которая не предполагается постоянной. Вторая координата определена для каждого регулярного значения P-координаты и при данном ее значении параметризует набор линий уровня первой координаты. Система координат построена способом, который позволит провести статистические тесты палеомагнитных данных, учитывая двумерное распределение данных. При решении задачи потребовалось применить аппарат топологии и теории особенностей.

DOI: 10.7868/S0016794013050040

1. ВВЕДЕНИЕ

Отправной точкой нашей работы служит статья [Khokhlov et al., 2006] в которой решена важная проблема геофизики, связанная со статистической обработкой палеомагнитных данных. В этой проблеме основную роль играет проверка статистических гипотез о характере распределения собранных данных. Палеомагнитные данные представляют собой выборку случайных направлений вектора магнитного поля, они заданы в разных точках на поверхности Земли. Требуется восстановить пространственно-временной закон распределения указанных палеомагнитных данных при помощи формулы, в которую, в частности, входят значения координат точки наблюдения.

Данные в разных точках наблюдения следует каким-то образом объединить и изучать функцию их совместного распределения. Поскольку в разных точках предполагаются, вообще говоря, разные законы распределения, то данные непосредственно смешать нельзя. Ключевая идея состоит в том, что соответствующей заменой координат локальные законы можно превратить в равномерные, которые можно считать независимыми.

Известный к настоящему моменту статистический метод связан с линиями уровня функции плотности распределения и называется методом P-униформизации. К сожалению, этот метод уменьшает размерность двумерной выборки до 1 [Khokhlov et al., 2013]. В статье обсуждается новый статистический метод, который называется методом (P, Q)-униформизации. Сначала в разделе 3 рассмотрен случай при упрощающем предположении о наличии ровно одного максимума и одного минимума функции плотности распределения (см. разделы 2, 3). Замечу, что экстремумы функции плотности распределения, вообще говоря, никак не связаны с полюсами стандартной системы сферических координат.

С другой стороны, упрощающее предположение о наличии ровно двух критических точек функции плотности распределения не выглядит естественным и существенно ограничивает общность приложений. Для решения общей задачи требуется использовать результаты В.И. Арнольда [Arnold, 2006] из элементарной теории особенностей гладких функций двух переменных.

Целью работы является получение решения для общего случая. Это решение приводится в разделе 4, оно является новым и составляет главный результат работы.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть Σ-сфера единичного радиуса в пространстве, на поверхности которой задана выборка направлений геомагнитного поля. На поверхности сферы задана стандартная форма площади

$$d\Sigma = \frac{1}{4\pi}\sin\theta d\theta d\varphi.$$

Пусть $f(x_{\min}) = \rho_{\min}, f(x_{\max}) = \rho_{\max}$, причем $\rho_{\min}$ строго положительно. Предположим, что у функции f все критические значения невырождены и однократны. Предположим, кроме того, что выполнено равенство:

$$\iint f(\theta, \varphi) \mathrm{d}\Sigma = 1. \qquad (1)$$

Для каждой точки x_0 на сфере Σ рассмотрим область $U(f(x_0))$ точек со значениями, меньшими чем $f(x_0)$ и определим значение $P(f(x_0))$ интегралом функции плотности f по рассматриваемой области. Эта функция называется P-координатой. Очевидны следующие свойства.

1.) P-координата принимает значения на отрезке $[0, 1]$.

2.) Существует гладкое монотонное отображение

$$A([\rho_{\min}, \rho_{\max}]) = [0, 1], \qquad (2)$$

переводящее ρ-координату в P-координату.

3.) Если у функции плотности f все критические точки невырождены и все критические значения попарно различны, то функции P также удовлетворяет этому (см. пример 1).

Задача состоит в том, чтобы явным способом дополнить координату P до полной системы координат (P, Q, ω) на сфере Σ (координаты (Q, ω) определены всюду, за исключением конечного числа критических значений координаты P). Эта система координат удовлетворяет следующим двум свойствам.

1.) Координата P задана выше по условию задачи, координата Q принимает значение на окружности $[0, 2\pi)$.

Координата ω является дискретным параметром и принимает значение в конечном множестве $\Omega(P(x))$. Эта координата постоянна на каждом связном интервале регулярных значений координаты P. Координата ω называется разметкой компоненты линии уровня или, коротко, разметкой. Разметки будут определены далее в разделе 3.

2.) Координаты (Q, ω) выбираются так, что значение интеграла (1) по подобласти, заданной прямоугольником координат $[P_0 + dP, S_0 + dS, \omega]$ на сфере Σ вычисляется максимально простым способом.

3. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ В ЧАСТНОМ СЛУЧАЕ: ФУНКЦИЯ ПЛОТНОСТИ С ЕДИНСТВЕННЫМ МАКСИМАЛЬНЫМ ЗНАЧЕНИЕМ И ЕДИНСТВЕННЫМ МИНИМАЛЬНЫМ ЗНАЧЕНИЕМ

Предположим, что функция плотности f, удовлетворяющая уравнению (1), не имеет критических точек за исключением единственного невырожденного глобального максимума $\rho_{\max}$ в точке $x_{\max}$ и единственного невырожденного глобального минимума $\rho_{\min}$ в точке $x_{\min}$. Назовем для краткости такую функцию простой и решим задачу в указанном предположении.

Определим координату $P(x)$ которая связана с координатой ρ при помощи формулы параметризации (2), причем координата ρ принимает значение на отрезке $[\rho_{\min}, \rho_{\max}]$, координата P принимает значения на отрезке $[0, 1]$. Координата Q при каждом значении P принимает значения на окружности $[0, 2\pi)$. Таким образом, при любой заданной простой функции f пара координат (P, Q) является полной системой координат на сфере Σ, за исключением критических точек $x_{\max} \cup x_{\min}$. В этом случае определять разметку со не требуется (формально говоря, для каждого значения P разметка всего одна, см. далее определение разметки в разделе 4). Точка $x_{\min}$ однозначно определена уравнением $P = 0$, точка $x_{\max}$ однозначно определена уравнением $P = 1$.

Обозначим через $l = l(P)$ натуральный параметр на заданной линии уровня. Параметр отсчитывается от отмеченной точки 0 на этой кривой в выбранном направлении.

При $P = 1$ на маленькой линии уровня вблизи $x_{\max}$ направление выбирается против часовой стрелки, если смотреть на поверхность из конца вектора положительной нормали. Тем самым, каждая линия уровня снабжена ориентацией. Семейство нулей отсчета параметра l, которые образуют кривую $l(0, P)$ и выбирается произвольно.

Рассмотрим вектор градиента $\nabla(l, P)$ в точках окружности и обозначим через $\psi(l, P)$ длину вектора градиента. По условию $\psi\{l, P) > 0$. Определим координату $Q(l)$ на линии уровня $l(P)$ по формуле:

$$Q(l) = \frac{1}{L(P)}\int_0^l \frac{dl_1}{\psi(l_1, P)}, \qquad (3)$$

где $L(P)$ – нормировочный множитель, который определен интегралом

$$L(P) = \frac{1}{2\pi}\int \frac{dl}{\psi(l, P)},$$

по указанной кривой. Нормировочный множитель подбирается так, чтобы изменение координаты Q при однократном обходе по линии уровня равнялось бы 2π.

Из построения очевидно следующее.

Теорема 1.

Для простой функции плотности f с единственным максимумом и единственным минимумом выполнено следующее:

1. Набор координат (P, Q), $P \in (0, 1)$, $Q \in [0, 2\pi)$, определяет систему координат на сфере Σ вне критических точек $x_{\min} \cup x_{\max}$.

2. Интеграл по координатному прямоугольнику $[P_0\ P_1\ Q_0\ Q_1]$ вычисляется по формуле

$$\int\limits_{(P_0, Q_0)}^{(P_1, Q_1)} f(P, Q) d\Sigma = \frac{1}{2\pi}(P_1 - P_0)(Q_1 - Q_0).$$

Теорема 1 отвечает на поставленную задачу для простой функции плотности. Для произвольной области Ω на сфере Σ, как следует из формулы (2), интеграл $\frac{1}{2\pi}\int f(P, Q) d\Omega$ вычисляется стандартным (нормированным на 2π) интегралом площади области (возможнее разрезом вдоль кривой $Q = 0$) в декартовых координатах (P, Q) на плоскости.

Пример

Изучим преобразование, обратное к (2) координаты P в координату ρ значений функции плотности в малой окрестности точки максимума (аналогичный пример справедлив и для точки минимума). Пусть $\Delta \subset \Sigma$ область, параметризованная системой полярных координат (r, φ), $0 \le r \le 1$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

Определим функцию плотности по формуле $f(r) = \rho_{\max} - r^{-2}$.

Легко проверить, что преобразование (2) при малых r с точностью до r^4 определяется по формуле

$$P(r) = 1 - \frac{\rho_{\max} r^2}{4\pi}.$$

Следовательно, замена координат A в окрестности максимума $x_{\max}$ и минимума $x_{\min}$ линейна по r. Поэтому координата P имеет невырожденные максимум и минимум.

4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ФУНКЦИИ ПЛОТНОСТИ ОБЩЕГО ВИДА

Пусть функция плотности f, см. уравнение (1), имеет невырожденные экстремумы с различными значениями. В этом случае говорят, что f – правильная морсовская функция. Обозначим через $X = \{x_1, \dots, x_{r+1}\}$ – множество точек локального максимума, через $Y = \{y_1, \dots, y_{s+1}\}$ – множество точек локального минимума, через $Z = \{z_1, \dots, z_{r+s}\}$ – множество седловых критических точек.

Определим разбиение множества Z седловых критических точек на два подмножества: $Z = Z_+ \cup \cup Z_-$. Пусть z_i – седловая точка. Запишем, что $z_i \in Z_+$, если при возрастании значения функции в окрестности критической точки число компонент линии уровня увеличивается и запишем, что $z_i \in Z_-$, если уменьшается. Очевидно, что множество Z_+ состоит из r точек, а множество Z_+ состоит из s точек.

Две правильных морсовских функции f_1 и f_2 называются эквивалентами, если существует преобразование координат $F: \Sigma \longrightarrow \Sigma$, заданное гладким образом на всей сфере и переводящее карту линий уровня функции f_1 в карту линий уровня функции f_2. В работе В.И. Арнольда [Arnold, 2006] расклассифицированы правильные морсовские функции на сфере с точностью до эквивалентности. К сожалению, указанная работа пока не переведена на русский язык. К счастью, доступ к журналу свободен, кроме того, работу можно найти по ссылке www.pdmi.ras.ru/-arnsem/ Links to on-line papers and home-pages of the seminar members (including former members): V.I. Arnold, Online papers.

Число классов эквивалентности правильных морсовских функций с 8 экстремумами (т.е. с 3 седловыми точками) равно 428. Число классов эквивалентности правильных морсовских функций с 10 критическими точками (т.е. с 4 седловыми точками) оказалось равным 17746. При фиксированном числе критических точек число классов эквивалентности остается конечным, но при росте числа критических точек асимптотика числа классов эквивалентности функций является надэкспоненциальной.

Основным инструментом при классификации правильных морсовских функций служит понятие графа-образа, который называют также графом Риба. Рассмотрим правильную морсовскую функцию (плотности) $f: \Sigma \longrightarrow [\rho_{\min}, \rho_{\max}]$. Прообраз точки является кривой уровня функции f. Две точки x_1, x_2 на сфере отождествим между собой, если они принадлежат одной компоненте связности поверхности уровня $f^{-1}(\rho)$, где координата ρ принимает значение на отрезке $[\rho_{\min}, \rho_{\max}]$.

Графом-образом, который обозначим через_Γ_f, функции f называется факторпространство сферы Σ по указанному отождествлению. Граф-образ снабжен факторотображением $\Gamma_f \longrightarrow [\rho_{\min}, \rho_{\max}]$, которое будем кратко называть функцией высоты. Вершинами графа-образа служат критические точки функции f. Вершины бывают четырех типов. Точкам локального максимума (минимума) соответствуют вершины графа, из которых выходит ровно по одному ребру. Седловым точкам соответствуют вершины степени 3. Вершины каждого из четырех типов вполне характеризуются степенью вершины и ограничением функции высоты на окрестность вершины на графе-образе. Граф-образ связен и не имеет циклов. Графы указанного типа называют 3-деревом. Для морсовской функции с единственным максимумом и единственным минимумом граф-образ является отрезком.

Координата P является морсовской функцией, которая по построению эквивалентна функции f и принимает значения на отрезке [0, 1]. Граф-образ функции плотности обозначим через Γ_P.

СИСТЕМА КООРДИНАТ (P, S, Ω)

Для каждого регулярного значения $\hat{P}$ координаты P определим разметку $\hat{\omega}$ как выбор точки из множества точек $(\hat{P}^1, \ldots, \hat{P}^a)$ на графе-образе Γ_P с предписанным значением функции высоты, равным P. Для функции с единственным максимумом и единственным минимумов линии всех уровней связны, поэтому в этом случае разметка не требуется.

Определим координату Q для каждого регулярного значения $\hat{P}$. Для этого отметим гладким образом на каждой компоненте каждой линии уровня отмеченную точку с нулевой Q-координатой. Получим кусочно-гладкую кривую без самопересечений на сфере Σ, которую обозначим через $\Gamma_P \subset \Sigma$. В окрестности каждой седловой точки условия (1), (2) дополним следующим условием.

(3) Кривая Γ_P проходит через каждую седловую критическую точку z. Каждая такая критическая точка является вершиной кривой Γ_P степени 3.

Из условия (3) вытекает, что кривая Γ_P параметризуется графом-образом Γ_P, $\varphi_P : \Gamma_P \longrightarrow \Gamma_P \subset \Sigma$, при этом композиция отображения параметризации φ_P с отображением естественной проекции $P : \Sigma \longrightarrow \Gamma_P$ на граф-образ является тождественным отображением графа-образа на себя. Выбор отображения φ_P задает дополнительную структуру на графе Γ_P, а именно, в окрестности каждой вершины z_i степени 3 определен циклический порядок ребер, заданный направлением обхода этих вершин по ориентированной сфере Σ вокруг z_i в положительном направлении против часовой стрелки. Поскольку для вершины из Z_+ (соответственно, из Z_- два из трех ребер графа Γ в окрестности этой вершины являются восходящими (соответственно, нисходящими) по отношению к координате P, то циклический порядок ребер графа Γ определяет линейный порядок восходящих (соответственно, нисходящих) ребер в окрестности z_i.

Определим весовую функцию $\sigma(\omega^i)$, $i = 1, \ldots, q$, которая удовлетворяет уравнению

$$\sum_{i=1}^{q} \sigma(\hat{\omega}^i) = 1.$$

Определим значение весовой функцией для каждой регулярной компоненты фиксированной линии уровня с разметкой $\hat{\omega}^i$ по формуле:

$$\hat{\omega}^i = \frac{\int\limits_{P = \hat{P}^i} \psi^{-1}(l, P)dl}{\sum\limits_{j=1}^{Q} \int\limits_{P = \hat{P}^j} \psi^{-1}(l, P)dl}, \qquad (4)$$

где $1 \le i \le q$, $1 \le j \le q$, причем функция $\psi(l, P)$ определена как в уравнении (3).

Определим координату Q на кривой, размеченной индексом $\hat{\omega}^i$ формулой (4), интегрирование в которой проводится по размеченной компоненте.

Основной результат работы сформулирован в следующей теоореме, которая обобщает Теорему 1 и доказывается аналогично.

Теорема 2

Для функции плотности $f : \Sigma \longrightarrow [\rho_{\min}, \rho_{\max}]$, которая является правильной функцией Морса, определена координата P на отрезке [0, 1], которая также является функцией Морса. При этом выполнены следующие свойства 1–3.

1. При условии регулярности координаты P, определен набор координат (P, Q, ω), $P \in [0, 1]$, $Q \in [0, 2\pi)$, $\omega \in (P^1, \ldots, P^q)$, определяющий положение точки на сфере Σ.

2. Пусть $\hat{P}_\alpha$, $\hat{P}_\beta$ – пара соседних критических значений координаты P, $\hat{P}_\alpha \le P_0 \le P_1 \le \hat{P}_\beta$ – произвольная пара регулярных значений координаты P между выбранными соседними критическими значениями, $\hat{\omega}^i$ – выбор разметки регулярных значений координат. Тогда для интеграла по координатному прямоугольнику $[\hat{P}_\alpha, \hat{P}_1; \hat{Q}_0, \hat{Q}_1]$ с фиксированной разметкой $\hat{\omega}^i$ справедлива формула:

$$\int f(P, Q)d\Sigma = \frac{1}{2\pi}(\hat{Q}_1 - \hat{Q}_\alpha) \int\limits_{\hat{P}_0}^{\hat{P}_1} \sigma(\hat{\omega}^i)dP,$$

где $\sigma(\hat{\omega}^i)$ определена по формуле (4).

3. В окрестности критического значения $\hat{P}_i$, P – координаты с критической точкой $z_i \in Z_-$ компонента линии уровня $\hat{P}_i - \varepsilon$ перестраивается в пару компонент линии уровня $\hat{P}_i + \varepsilon$. Обозначим через $\hat{\sigma}_-$, $\hat{\sigma}_{+,1}$, $\hat{\sigma}_{+,2}$ разметки нисходящей линии уровня и упорядоченной пары восходящих линий уровня. Обозначим через Q_-, $Q_{1,+}$, $Q_{2,+}$ Q – координаты на компонентах линии уровня с соответствующими разметками.

Обозначим через σ_-, $\sigma_{+,1}$, $\sigma_{+,2}$ значения весовой функции на компонентах линии уровня с соответствующими разметками. Справедливы следующие формулы перехода координаты Q для тройки компонент с указанной разметкой:

$$Q_{+,1} = \frac{Q_-}{2}, \quad Q_{+,2} = \frac{Q_-}{2} - \pi;$$

$$\sigma_- = \sigma_{+,1} + \sigma_{+,2}.$$

Аналогичные формулы справедливы для критического значения $z_i \in Z_+$.

Теорема 2 отвечает на поставленную задачу для произвольной правильной морсовской функции плотности. Действительно, если дана произвольная область $U \subset \Sigma$, то такую область сначала следует разрезать на элементарные подобласти $U_i \subset U$, в каждой из элементарных подобластей определена регулярная координата P и, не ограничивая общности приложений, такая область предполагается дизъюнктным объединением элементарных координатных прямоугольников. Для каждого элементарного координатного прямоугольника координаты Q боковых сторон границы постоянны и разметка $\hat{\omega}$ постоянна. Как следует из Теоремы 2, для каждого элементарного прямоугольника $U_i \subset \Sigma$ значение интеграла $\int f(P, Q) d\Sigma$ совпадает с площадью рассматриваемого прямоугольника в (P, Q)-координатах.

С другой стороны, предположение о том, что функция плотности является правильной морсовской функции не приводит к потере общности. Доказано, что в пространстве всех гладких функций, подпространство правильных функций Морса является открытым, массивным (т.е. максимальным по естественной мере на пространстве всех гладких функций, которую можно корректно определить) и всюду плотным. Согласно принципу "общего положения", который является общепринятым в современной математической физике, произвольная гладкая функция почти наверняка окажется правильной функцией Морса, при этом и любая близкая функция окажется правильной функцией Морса.

5. ВЫВОДЫ

На земной поверхности определены экспериментальные палеомагнитные данные. Представленные физические наблюдаемые не являются числами, но являются объектами геометрического характера, которые можно трактовать как точки на конфигурационном многообразии, на котором определена вероятностная мера, связанная с частотой данных. В работе [Khokhlov et al., 2006] предложена удобная параметризация конфигурационного многообразия, которая позволяет использовать хорошо разработанную систему статистических тестов проверки на равномерность. Ожидаемый практический результат состоит в обоснование того, что магнитное поле Земли было таким же (или не таким) как сегодня. Итак, мы исследуем задачу, которая носит теоретический характер и связана с достаточно важными приложениями.

Случай, когда функция плотности имеет ровно один максимум и один минимум был изучен ранее и разбирается в разделе 3. В этом случае координата P вводится стандартным способом, а координата Q, которая требуется для того, чтобы учесть двумерность массива данных вводится явным способом. Общий случай является новым и разобран в разделе 4. Построенные координаты (P, Q, ω) в общем случае могут быть програмно реализованы.

Основной теоретический вывод работы состоит в следующем.

При условии, что функция плотности имеет невырожденные критические точки с различными критическими значениями (почти любая функция удовлетворяет этому условию) помимо координат (P, Q) требуется задать лишь один дополнительный параметр ω, который зависит только от сложности функции плотности (т.е. от числа ее критических значений), принимает лишь конечное число значений и называется разметкой линий уровня функции плотности. Поэтому свойства случайных полей с функциями плотности ограниченной сложности исследуются аналогично случаю простых функций плотности, при условии, что длина статистической выборки поля случайных направлений существенно превышает сложность функции плотности распределения.

Другой вывод работы состоит в следующем. Поскольку результаты работы носят весьма общий характер, их можно пытаться обобщить на функции плотности от многих переменных (например, такая функция может возникнуть при исследовании высших корреляций геомагнитных данных). Принципиальное отличие случая старших размерностей от случая размерности 2, исследуемого в работе, состоит в следующем.

В теореме Арнольда число классов эквивалентности правильных функций Морса данной сложности (с данным числом критических значений) конечно, в то время как для функций многих переменных это не так. Это связано с тем, что для описания классов эквивалентности правильных морсовских функций, наряду с графом-образом функции, дополнительно приходится использовать матрицу, которая называется дифференциалом в комплексе Морса. Для функций двух переменных дифференциал в комплексе Морса не требуется.

Автор благодарит А.В. Хохлова (ГЦ РАН) за постановку задачи и обсуждения, А.И. Реза (ИЗМИРАН) за критику, А.В. Попова (ИЗМИРАН) за обсуждение. Работа автора поддержана грантом РФФИ № 11-05-00601-а.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

– *Khokhlov A., Hulot G., Bouligand C.* Testing statistical palaeomagnetic field models against directional data affected by measurement errors // Geophys. J. Int. 167(2). P. 635–645. 2006.

– *Khokhlov A., Hulot G.* Probality uniformization and application to statistical palaeomagnetic field models and directional data // J. Geophys. Bf (193) [1], 110–121. doi: 10.1093/gji/ggs118. 2013.

– *Arnold V.I.* Smooth functions statistics // Funct. Anal. Other Math. l. № 2. P. 111–118. 2006.