

УДК: 550.83.015;550.383;550.384

РАЗРЕШИМОСТЬ ИНТЕРВАЛА МЕЖДУ ИНВЕРСИЯМИ ПО МОРСКИМ МАГНИТНЫМ АНОМАЛИЯМ НА ОСНОВЕ НЕРАВЕНСТВА РАО-КРАМЕРА

© 2013 г. С. А. Иванов, С. А. Меркурьев

СПб филиал Института земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн
им. Н.В. Пушкова РАН, г. Санкт-Петербург
e-mail: sergei.a.ivanov@mail.ru

Поступила в редакцию 15.10.2012 г.
После доработки 22.03.2012 г.

Показано, что неравенство Рао-Крамера может быть использовано для оценки разрешимости интервалов противоположной полярности геомагнитного поля по морским магнитным аномалиям и планирования измерений. В частности, выяснено, что ширина выделяемого интервала одной полярности определяется точнее, чем ее центр.

DOI: 10.7868/S0016794013060059

1. ВВЕДЕНИЕ

Исследование тонкой структуры геомагнитных инверсий прямой и обратной полярности, ивентов и экскурсов является исключительно важным для понимания геодинамических процессов и механизмов генерации магнитного поля Земли. Линейные магнитные аномалии на акваториях Мирового океана являются главным источником информации об инверсиях главного геомагнитного поля в прошлом, благодаря их инверсионно-спрединг-овой природе и большому объему магнитометрических данных, полученных в различных регионах Мирового океана и охвативших широкий диапазон возрастов океанического дна. По мере проведения детальных исследований, накопления новых данных и разработки новых методов происходит увеличение детальности и разрешающей способности геомагнитных шкал. Увеличения разрешающей способности шкалы инверсий при исследовании морских аномалий можно достигнуть при интерпретации магнитных профилей, зарегистрированных в районах быстрого разрастания [Cande and Kent, 1992a], или вблизи дна [Klitgord et al., 1975], либо после увеличения отношения сигнала к шуму в результате обработки [Blakely and Cox, 1971, 1972]. При дальнейших исследованиях тонкой структуры геомагнитных инверсий по морским магнитным аномалиям необходимо оценить разрешающую способность палеомагнитного анализа для планирования соответствующего эксперимента.

В литературе рассматривался вопрос о возможности выявления тонкой структуры магнитных аномалий и инверсий геомагнитного поля по этим аномалиям. В работе [Schouten et al., 1982] изучался вопрос о возможности определения тонкой струк-

туры источников морских магнитных аномалий. Чтобы оценить кондиционность записи и условия возможности определения инверсий геомагнитного поля в прошлом по магнитометрическим измерениям, выполненным на поверхности океана, авторы использовали стохастическую модель источников морских магнитных аномалий, где инверсии рассматривались как пуассоновский процесс, причем вулканизм и излияния магмы тоже случайны. За погрешность принималась разность между порожденным этими источниками случайным полем и полем, усредненным по магматическим очагам. В качестве критерия разрешимости бралось отношение сигнал/шум равное 1. Оценивая параметры вулканизма, авторы пришли к выводу, что надежное определение инверсий возможно при условии, что протяженность соответствующего участка постоянной полярности составляет не менее 5 км.

В работах [Schouten, 1971; Schouten and McSamy, 1972] при моделировании аномального магнитного поля используется спектральный подход. При этом оценки разрешимости получаются из соображений фильтрации. Магнитные аномалии, наблюдаемые на поверхности океана от источников, залегающих в ложе кристаллического фундамента, представляют собой свертку намагниченности с так называемым “земным фильтром”, который является полосовым фильтром, с максимумом при длине волны 25 км. Отсюда делается вывод, что участки постоянной полярности меньше 10 км и больше 500 км плохо детектируются. Критерий и конкретные вычисления не приводятся, как и в большинстве работ по этой тематике.

Для ответа на вопрос насколько малые интервалы между инверсиями геомагнитного поля могут быть определены по морским магнитным аномалиям мы предлагаем использовать неравенство Рао-Крамера [Боровков, 1984]. Это неравенство позволяет по наблюдаемым данным найти минимально возможный разброс точек смены полярности магнитного поля. Этот подход успешно применялся в работе [Иванов и др., 1992] при исследовании затухающих процессов в спектроскопии.

2. МОДЕЛЬ И РЕЗУЛЬТАТЫ

2.1. Характеристики геомагнитных шкал

Разрешимость шкалы инверсий, построенной по линейным магнитным аномалиям, определяется возможностью детектировать блоки минимально возможной ширины и определять положение границ блоков и их протяженность. Анализ временных шкал геомагнитной полярности [Cande and Kent, 1992a; Harland et al., 1990; Constable, 2000] показывает, что за последние 158 млн лет произошло примерно 295 инверсий геомагнитного поля. Обращения происходили нерегулярно, и само обращение длится 4–7 тыс. лет. В целом, интервалы между инверсиями находятся в диапазоне времени от 30 тыс. до 30 млн лет.

Временной интервал, в течение которого поле имеет преимущественно одну полярность, известный как хрон, имеет типичную продолжительность 0.1–1 млн лет. Короткий интервал стабильной полярности продолжительностью 20–100 тыс. лет называется субхроном. Ивентами или криптохронами называются геомагнитные события короткой продолжительности (менее 20 тыс. лет) которые могут представлять полные инверсии геомагнитного поля, изменения направления поля, которые не являются полными инверсиями (такие как экскурсы), вариации интенсивности геомагнитного поля или комбинации вышеперечисленных явлений. Согласно последних исследований, использование морских магнитных аномалий для построения временных шкал геомагнитных инверсий дает разрешимость 10–50 тыс. лет по разным эмпирическим оценкам в зависимости от скорости спрединга и глубины дна детальных морских магнитных съемок. В последней опубликованной шкале [Cande and Kent, 1995], например, включены все интервалы продолжительностью более 30 тыс. лет. Перейдем к рассмотрению математической модели магнитных аномалий с целью получения нижней оценки разрешимости короткопериодных инверсий.

2.2. Модель

В качестве физической модели океанического магнитоактивного слоя, ответственного за линейные магнитные аномалии, использована бло-

ковая инверсионно-спрединговая модель, которая применяется в практике геохронологического и палеомагнитного анализа аномального магнитного поля океанов и мало изменилась со времени ее создания Вайном и Мэтзом [1963]. Обычно эта модель представляет собой последовательность однородно намагниченных прямоугольных блоков прямой и обратной полярности толщиной несколько сотен метров, верхняя граница которых совпадает с кристаллическим ложем океана.

Как правило, номерные магнитные аномалии Ламонтской последовательности представляют собой периоды преимущественно одной полярности главного магнитного поля (хроны), разделенные периодами противоположной полярности. Поэтому мы выбрали простую типичную модель фрагмента магнитоактивного слоя, рожденного на оси срединно-океанического хребта в условиях разрастания океанического дна, чтобы показать потенциальные возможности метода и оценить минимально возможные погрешности выделения короткопериодных инверсий для данной модели.

В качестве примера рассмотрим модель, состоящую из однородно намагниченных прямоугольных блоков, верхние и нижние грани которых залегают соответственно на глубине a и b (рис. 1).

Пусть $\mathbf{V}(x, z)$ обозначает аномальное поле и u – магнитный потенциал:

$$\mathbf{V} = -\nabla u,$$

Потенциал удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\nabla^2 u = \mu_0 \operatorname{div} \mathbf{M}, \quad (1)$$

где $\mathbf{M}(x, z)$ – намагниченность.

Мы предполагаем, что хребет расположен вдоль оси y и намагниченность зависит только от x . Для простоты расчетов считаем, что главное поле \mathbf{V}_E и намагниченность \mathbf{M} направлены вертикально, причем главное поле направлено вниз, в отрицательном направлении.

Аномальное поле создается намагниченностью вида

$$\mathbf{M} = M_z \mathbf{e}_z p(x) \chi_{(-b, -a)}(z).$$

Здесь

$$\chi_{(-b, -a)}(z) = \begin{cases} 1, & z \in (-b, -a), \\ 0, & z \notin (-b, -a). \end{cases}$$

То есть, намагниченность сосредоточена в слое $-b < z < -a$. Функция $p(x)$ – кусочно постоянная функция, принимающая значения ± 1 .

Пусть

$X = \{X_1, X_2, X_3, X_4\}$ – точки перемены полярности (скачки функции $p(x)$).

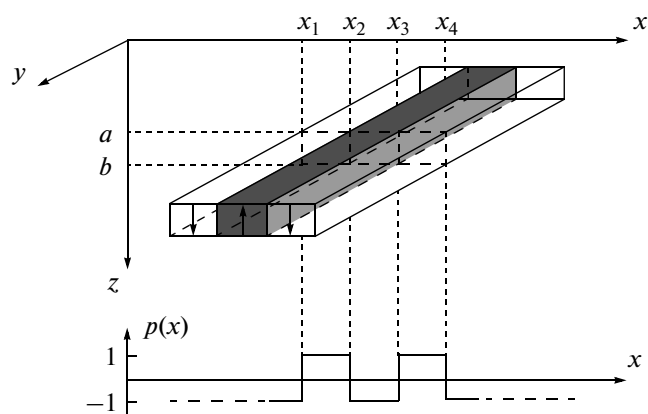


Рис. 1. Магнитоактивный слой, состоящий из двумерных однородно намагниченных прямоугольных призм прямой и обратной полярности. Три центральных блока окружены слева и справа протяженными блоками обратной полярности (не показаны на рисунке). Внизу показана кусочно-постоянная функция, определяющая направление вектора намагниченности.

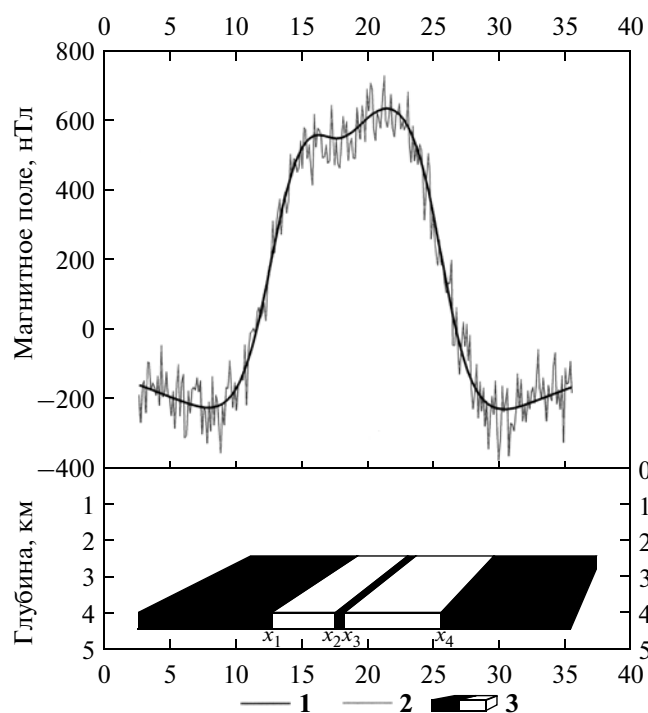


Рис. 2. Спрединговая блоковая модель магнитоактивного слоя и магнитная аномалия, создаваемая этой моделью, с шумом и без шума.

Условные обозначения: **1** – модельное магнитное поле, наблюдаемое на поверхности; **2** – модельное магнитное поле с шумом, наблюдаемое на поверхности; **3** – однородно намагниченные блоки прямой и обратной полярности.

Аномальное магнитное поле $A(x, z)$ для данной модели является суммой полей от всех блоков. Выражение для отдельного блока приведено в **ПРИЛОЖЕНИИ**.

2.3. Модельный пример

В качестве модельного примера рассмотрим фрагмент магнитоактивного слоя состоящего из двух блоков прямой и обратной полярности, разделенных узким блоком обратной полярности. Такая структура магнитоактивного слоя наиболее приближена к структуре шкалы инверсий геомагнитного поля. К аномальному магнитному полю, создаваемому этими блоками, был добавлен нормально распределенный шум со среднеквадратической ошибкой, составляющий 10% от максимальной амплитуды аномального поля. В настоящей работе в шум включены погрешность магнитометрических измерений, навигационные ошибки, неучтенные короткопериодные вариации главного магнитного поля Земли и, в определенном смысле, неточность самой модели.

Координаты границ блоков прямой и обратной полярности были получены на основании реального участка шкалы инверсий, содержащего короткий период противоположной полярности и заданные числами:

$$X = \{12.644, 17.524, 18.134, 25.576\}. \quad (2)$$

При расчетах намагниченность блоков принята равной 10 А/м, глубина базальтового слоя $a = 4$ км, а толщина 400 м. На рис. 2 показано возмущенное поле для поверхности $z = 0$ со среднеквадратичной ошибкой $\sigma = 63.7734$, составляющей 10% от максимального значения.

В основном, мы интересуемся положением ивента $[X_2, X_3]$. Для большего приближения к реальной ситуации мы полагаем неизвестными и внешние границы хронов, задаваемые точками X_1 и X_4 .

Пусть наблюдения \tilde{y}_i проводятся в точках $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$. Поле в этих точках запишем в виде функций $y_i = y_i(X)$ от X , поскольку все остальные величины фиксированы. Пусть ε_i есть ошибка в i -м наблюдении.

$$\tilde{y}_i = y_i + \varepsilon_i.$$

Будем считать ошибки независимыми и имеющими нормальное распределение с нулевым средним и одинаковой дисперсией σ^2 . Запишем наблюдения в векторном виде

$$\tilde{Y} = \begin{pmatrix} \tilde{y}_1 \\ \tilde{y}_2 \\ \tilde{y}_3 \\ \dots \\ \tilde{y}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \dots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \\ \dots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix} = Y + \varepsilon.$$

Совместная плотность $p(u_1, u_2, \dots, u_n)$ ошибок есть произведение плотностей ошибок отдельных наблюдений

$$p(u_1, u_2, \dots, u_n) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi\sigma)^n}} e^{-\sum(u_i - y_i)^2 / 2\sigma^2}.$$

2.4. Неравенство Рао-Крамера

Введенная выше функция p , рассматриваемая как функция от X (от координат границ блоков прямой и обратной полярности), называется функцией правдоподобия. Возьмем логарифм функции правдоподобия

$$l(X) = \ln(p) = \text{const} - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_1^n (u_i - y_i)^2.$$

С этой функцией связан метод максимального правдоподобия, который состоит в таком выборе координат границ блоков, что при данных наблюдениях $u_i = \tilde{y}_i$ функция l достигает максимума. Найдем производные от этой функции по координатам X_i

$$\partial_{X_j} l = -\frac{1}{\sigma^2} \sum_1^n (u_i - y_i) \partial_{X_j} y_i.$$

Составим информационную матрицу Фишера

$$I = E \begin{pmatrix} (\partial_{X_1} l)^2 & \partial_{X_1} l \partial_{X_2} l & \partial_{X_1} l \partial_{X_3} l & \partial_{X_1} l \partial_{X_4} l \\ \partial_{X_2} l \partial_{X_1} l & (\partial_{X_2} l)^2 & \partial_{X_2} l \partial_{X_3} l & \partial_{X_2} l \partial_{X_4} l \\ \partial_{X_3} l \partial_{X_1} l & \partial_{X_3} l \partial_{X_2} l & (\partial_{X_3} l)^2 & \partial_{X_3} l \partial_{X_4} l \\ \partial_{X_4} l \partial_{X_1} l & \partial_{X_4} l \partial_{X_2} l & \partial_{X_4} l \partial_{X_3} l & (\partial_{X_4} l)^2 \end{pmatrix},$$

где $E(f)$ – математическое ожидание случайной величины f . Поскольку ошибки независимы, то $E[(u_k - y_k)(u_s - y_s)] = 0$ при $k \neq s$, и равно σ^2 при $k = s$.

$$\begin{aligned} E[(\partial_{X_j} l)^2] &= \\ &= \frac{1}{\sigma^4} \sum_k \sum_s (\partial_{X_j} y_k \partial_{X_j} y_s) E[(u_k - y_k)(u_s - y_s)] = \\ &= \frac{1}{\sigma^4} \sum_k (\partial_{X_j} y_k)^2 E[(u_k - y_k)^2] = \frac{1}{\sigma^2} \sum_k (\partial_{X_j} y_k)^2. \end{aligned}$$

Аналогично

$$\begin{aligned} E[\partial_{X_i} l \partial_{X_j} l] &= \frac{1}{\sigma^4} \sum_k \sum_s (\partial_{X_i} y_k \partial_{X_j} y_s) \times \\ &\times E[(u_k - y_k)(u_s - y_s)] = \frac{1}{\sigma^2} \sum_k \partial_{X_i} y_k \partial_{X_j} y_k. \end{aligned}$$

Матрица Фишера получается теперь из явного выражения для поля (см. Приложение).

Пусть на интервале $[X_1 - 1, X_4 + 1]$ мы имеем $n = 21$ наблюдение с одинаковым шагом.

Предположим, что мы располагаем методом, позволяющим оценить координаты X , то есть, имеем функцию от наблюдений, выдающую приближения $\tilde{X} = (\tilde{X}_1, \tilde{X}_2, \tilde{X}_3, \tilde{X}_4)$ к координатам X (оценку в терминологии математической статистики).

$$T(\tilde{Y}) = (\tilde{X}).$$

Предположим, что оценка несмещенная, то есть дающая в среднем правильный результат (другие естественные ограничения типа гладкости на эту функцию мы не формулируем явно). Оказывается, что точность оценки при данных наблюдениях оценивается снизу.

Неравенство Рао-Крамера, [Боровков, 1984] Матрица ковариации $C = \text{Cov}(X)$ допускает оценку через матрицу, обратную к информационной матрице:

$$C = \text{Cov}(X) \geq I^{-1}.$$

Здесь неравенство понимается в смысле квадратичных форм: для любого 4-х мерного вектора V справедливо неравенство

$$\langle CV, V \rangle = V^T C V = \sum \sum C_{ij} v_i v_j \geq \langle I^{-1} V, V \rangle = V^T I^{-1} V.$$

Если имеет место равенство, то оценка называется эффективной. Отмеченный выше метод максимального правдоподобия при большом количестве наблюдений позволяет [Боровков, 1984] получить оценки близкие к эффективным (оптимальным). В этом смысле можно считать, что матрицы C и I^{-1} близки. В нашем случае матрица I^{-1} имеет вид $I^{-1} = \sigma^2 I_0^{-1}$, где I_0 не зависит от дисперсии погрешностей и

$$I_0^{-1} = 10^{-3} \begin{pmatrix} 0.0102 & 0.0138 & 0.0150 & -0.0020 \\ 0.0138 & 0.1312 & 0.1284 & 0.0001 \\ 0.0150 & 0.1284 & 0.1337 & -0.0026 \\ -0.0020 & 0.0001 & -0.0026 & 0.0093 \end{pmatrix}.$$

Блок, соответствующий X_2, X_3 имеет вид

$$J = 10^{-3} \begin{pmatrix} 0.1312 & 0.1284 \\ 0.1284 & 0.1337 \end{pmatrix}.$$

Для выделенного блока неравенства Рао-Крамера имеет вид:

$$\begin{pmatrix} (\sigma_{X_2})^2 & \text{cov}(X_2, X_3) \\ \text{cov}(X_2, X_3) & (\sigma_{X_3})^2 \end{pmatrix} \geq \sigma^2 J.$$

Элементы матрицы $\sigma^2 J$ запишем в виде

$$D = \begin{pmatrix} (\sigma_{X_2}^{CR})^2 & q \\ q & (\sigma_{X_3}^{CR})^2 \end{pmatrix}.$$

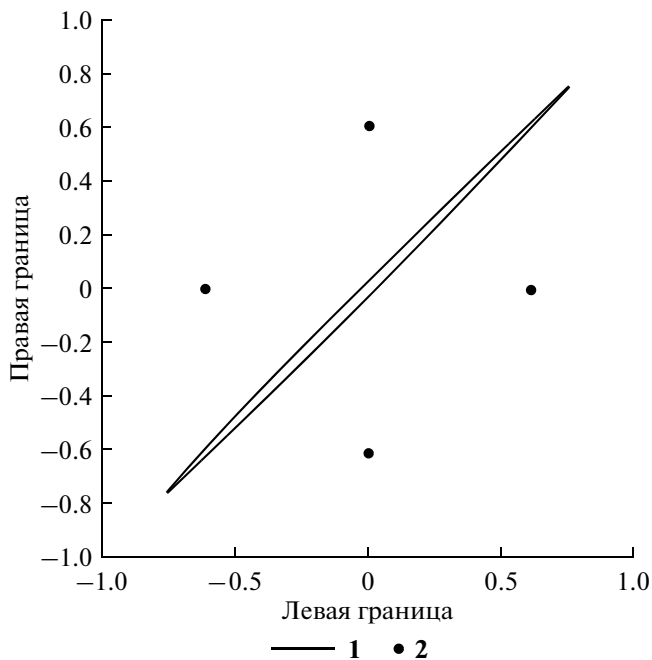


Рис. 3. Минимальный эллипс рассеяния для \tilde{X}_2, \tilde{X}_3 . Для масштаба показаны точки с координатами $(\pm\delta, 0), (0, \pm\delta)$, где $\delta = X_3 - X_2$. Условные обозначения: **1** – эллипс рассеяния; **2** – точки с координатами $(\pm\delta, 0), (0, \pm\delta)$.

Из полученного неравенства вытекает, в частности, что дисперсии \tilde{X}_2, \tilde{X}_3 не меньше соответствующих диагональных элементов матрицы $\sigma^2 J$:

$$\sigma(X_2) \geq \sigma_{X_2}^{CR} = \sqrt{\sigma^2 \times 10^{-3} \times 0.1312} = 0.7306 \text{ км,}$$

$$\sigma(X_3) \geq \sigma_{X_3}^{CR} = \sqrt{\sigma^2 \times 10^{-3} \times 0.1317} = 0.7373 \text{ км.}$$

Для наглядного представления поведения пары случайных величин, нормально распределенных на плоскости, используется эллипс рассеяния. Из неравенства Рао-Крамера следует, что эллипс рассеяния пары \tilde{X}_2, \tilde{X}_3 содержит соответствующий эллипс для матрицы D , то есть множество значений квадратичной формы

$$\left\langle D \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\rangle$$

где точка (x, y) пробегает единичную окружность. В нашем случае “эллипс рассеяния”, отвечающий D имеет вид (рис. 3). “Истинный” эллипс рассеяния включает в себя эллипс, изображенный на рис. 3 и теория говорит о том, что полученные значения \tilde{X}_2, \tilde{X}_3 лежат в эллипсе, изображенном на рис. 3, с вероятностью, не большей 40%.

Как отмечалось, при большом числе наблюдений матрицы $\text{Cov}(X)$ и I^{-1} близки и мы можем су-

дить о свойствах $\text{Cov}(X)$ по I^{-1} . Видно, что корреляция

$$r = \frac{q}{\sigma_{X_2}^{CR} \sigma_{X_3}^{CR}}$$

между \tilde{X}_2 и \tilde{X}_3 очень высока, подсчет показывает, что она составляет 0.9670. Также видно, что среднеквадратическая погрешность разности $\tilde{\delta} = \tilde{X}_3 - \tilde{X}_2$ (ширина ивента, почти равная малой полуоси) в десятки раз меньше, чем большая полуось – среднеквадратическая погрешность центра $\tilde{x}_c = (\tilde{X}_3 + \tilde{X}_2)/2$ ивента. Приведем точные значения.

Найдем оценку дисперсии $\tilde{\delta}$:

$$\begin{aligned} E[(\tilde{X}_3 - \tilde{X}_2 - \delta)^2] &= E[(\tilde{X}_3 - X_3) - (\tilde{X}_2 - X_2)]^2 = \\ &= E[(\tilde{X}_3 - X_3)^2] - 2E[(\tilde{X}_3 - X_3)(\tilde{X}_2 - X_2)] + \\ &\quad + E[(\tilde{X}_2 - X_2)^2] = C_{33} - 2C_{23} + C_{22} \geq \\ &\geq I_{33}^{-1} - 2I_{23}^{-1} + I_{22}^{-1}. \end{aligned}$$

Последнюю величину обозначим через $(\sigma_{\tilde{\delta}}^{CR})^2$. Для средне-квадратичной ошибки

$$\sigma_{\tilde{\delta}} = \sqrt{E[(\tilde{X}_3 - \tilde{X}_2 - \delta)^2]} \geq \sigma_{\tilde{\delta}}^{CR} = 0.1822 \text{ км.}$$

Действительно, это неравенство может быть записано через квадратичные формы

$$\begin{aligned} C_{33} - 2C_{23} + C_{22} &= \\ &= \left\langle C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \geq \left\langle I^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle = \\ &= I_{33}^{-1} - 2I_{23}^{-1} + I_{22}^{-1} = 0.0332 \text{ км.} \end{aligned}$$

Видим, что нижняя оценка $\sigma_{\tilde{\delta}}$ невелика по сравнению с $\delta = 0.6100$ км. В случае нормального распределения случайной величины $\tilde{\delta}$ это можно схематично изобразить на рисунке 4. Заметим, что неизвестно по какому закону распределена случайная величина $\tilde{\delta}$.

Аналогично находится ошибка определения центра

$$\sigma_c \geq \sigma_c^{CR} = 0.7283 \text{ км.}$$

Видно, что среднеквадратическая погрешность превышает ширину ивента 0.6100 км.

Замечание 1. В случае двух-точечной модели, то есть, располагая точными значениями $[X_2, X_3]$, оценки несколько лучше

$$\sigma_\delta \geq 0.1731 \text{ км}, \quad \sigma_c \geq 0.6682 \text{ км}.$$

Замечание 2. Оценки средне-квадратичной ошибки в определении крайних точек хронов составляют 0.2036 км и 0.1949 км для X_1 и X_4 соответственно. Они более чем в 3 раза меньше средне-квадратичной ошибки в определении X_2 и X_3 . Надо также учесть, что точки дискретизации только немного покрывают X_1 и X_4 .

2.5. Сгущение точек наблюдения

Рассмотрим, как влияет на оценки сгущение точек наблюдения в окрестности ивента. Возьмем то же число (21) наблюдений, сгущающихся в центре. Выберем следующий вариант: рассмотрим точки $(j/10)^3$, $j = -10, \dots, 10$, расположенные в $[-1, 1]$ и отобразим их линейно на отрезок $[X_1 - 1, X_4 + 1]$. Для нового набора наблюдений применяем тот же подход, сохраняя обозначения. В этом случае матрица $I_0 = \sigma^{-2}F^{-1}$ равна

$$10^{-5} \begin{pmatrix} 0.0328 & 0.1153 & 0.0978 & 0.0040 \\ 0.1153 & 0.7927 & 0.7173 & 0.0369 \\ 0.0978 & 0.7173 & 0.6552 & 0.0382 \\ 0.0040 & 0.0369 & 0.0382 & 0.0145 \end{pmatrix}.$$

Для рассматриваемого случая корреляция 0.9953 несколько выше, чем для равномерного распределения точек наблюдения, но погрешности определения δ и центра существенно ниже

$$\sigma_\delta \geq \sigma_\delta^{CR} = 0.0232, \quad \sigma_c \geq \sigma_c^{CR} = 0.1712 \text{ км}.$$

2.6. Придонные измерения

Как известно [Schouten and McCamy, 1972], измерения магнитного поля на поверхности океана аналогично низкочастотной фильтрации, когда подавляются высокие частоты. Поэтому для изучения тонкой структуры магнитоактивного слоя и повышения степени разрешения магнитных аномалий используют глубоководные магнитные съемки, при которых измерения производят на больших глубинах и линия наблюдения приближается к источникам поля. Применительно к палеомагнитной интерпретации спрединговых аномалий придонные измерения улучшают возможность определения ивентов.

Рассмотрим модельный пример, представленный ранее (см. рис. 2), только для линии наблюдения, расположенной на глубине 3 км. На ри-

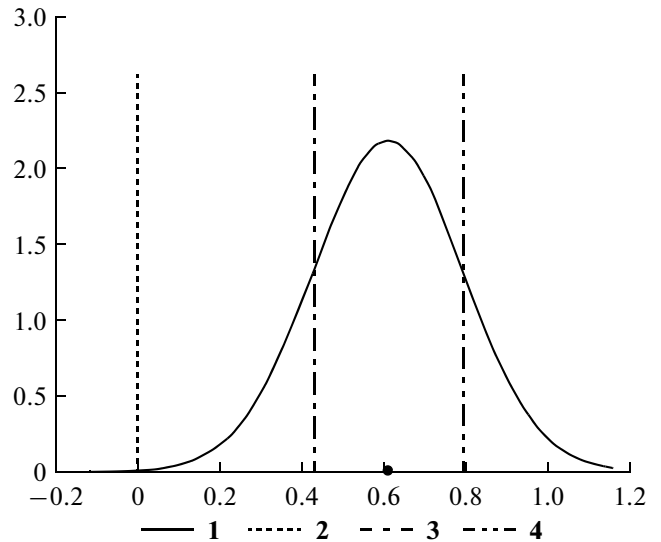


Рис. 4. График плотности вероятности случайной величины δ в случае нормального распределения и положение точек $\delta \pm \sigma_\delta^{CR}$. Условные обозначения: **1** – график плотности вероятности для δ ; **2** – нулевая линия; **3, 4** – положение точек $\delta - \sigma_\delta^{CR}$ и $\delta + \sigma_\delta^{CR}$.

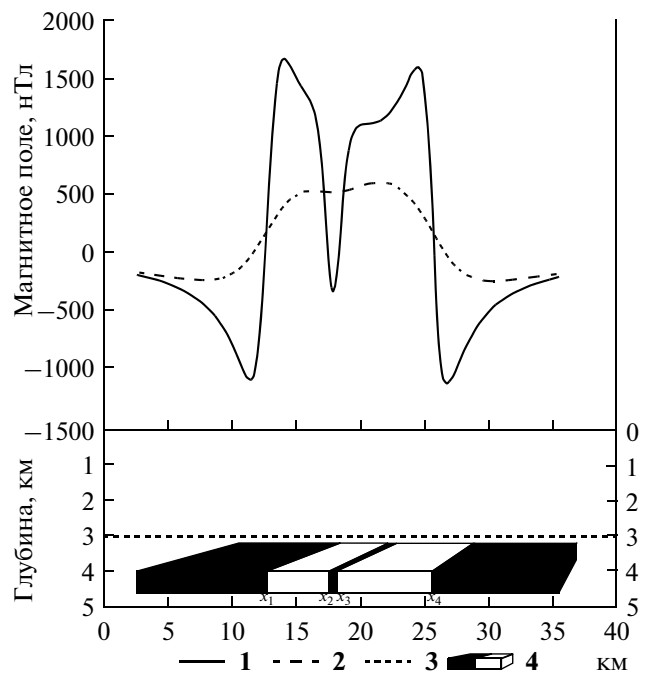


Рис. 5. Спрединговая блоковая модель магнитоактивного слоя и магнитная аномалия, создаваемая этой моделью, на разных глубинах. Сплошная линия соответствует полю, измеренному на глубине 3 км, а пунктир – на поверхности океана.

Условные обозначения: **1** – модельное магнитное поле, наблюдаемое на глубине 3 км; **2** – магнитное поле, наблюдаемое на поверхности океана; **3** – линия глубоководного наблюдения, расположенная на глубине 3 км; **4** – однородно намагнитченные блоки прямой и обратной полярности.

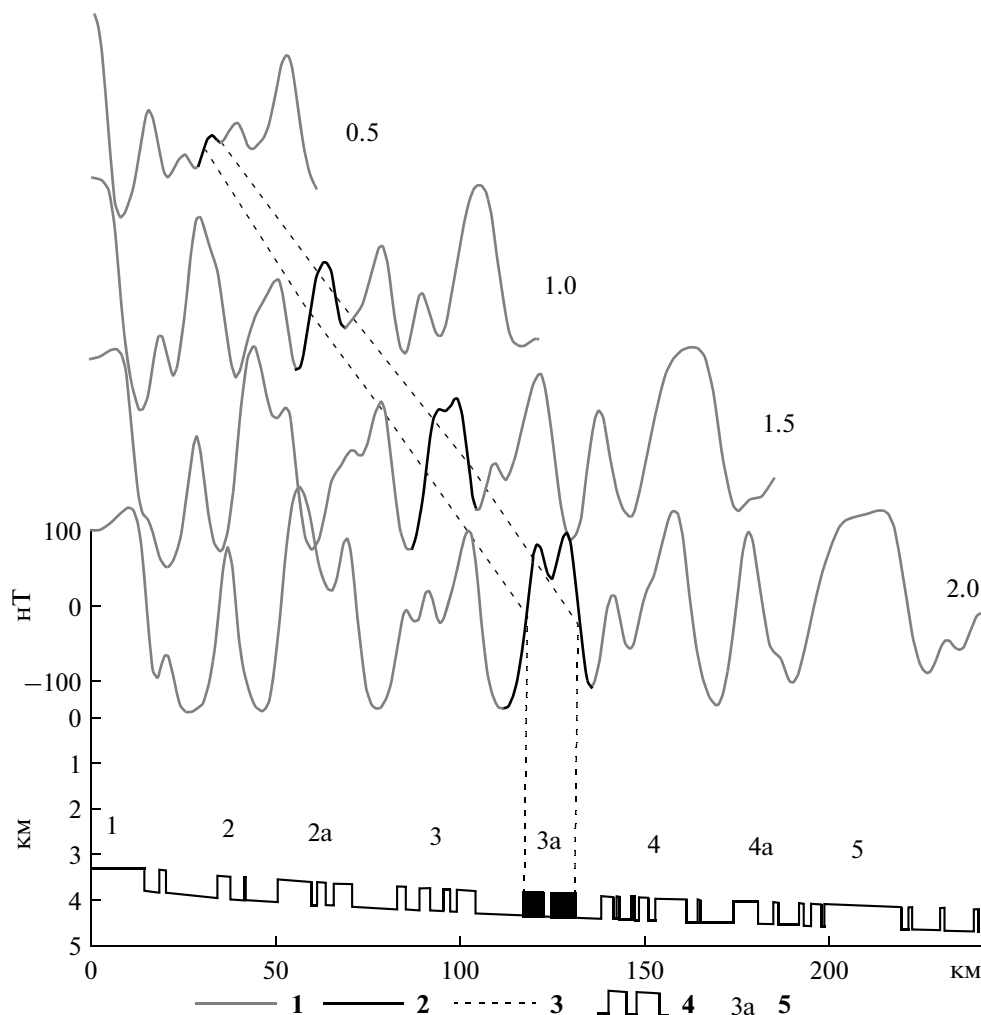


Рис. 6. Графики аномального магнитного поля для спрединга, рассчитанного при различных скоростях, обозначенных цифрами справа от графиков [см/год]. Условные обозначения: **1** – магнитное поле от спрединговой модели; **2** – границы аномалии, соответствующей хрону “3а”, выделены жирной линией на модельных графиках; **3** – пунктиром обозначены границы аномалии, соответствующие хрону “3а”; **4** – магнитоактивный слой, соответствующий шкале инверсий [Cande and Kent, 19926], изображенный в виде, телеграфного сигнала; **5** – название хрона.

сунке 5 представлены графики аномального магнитного поля наблюдаемого на поверхности океана и на глубине 3 км для модели прямоугольных призм толщиной 0.4 км. Сопоставление этих кривых показывает, что отрицательная магнитная аномалия, отвечающая ивенту, и едва различимая при поверхностных измерениях, теперь имеет четко выраженный глубокий минимум. Для равномерного распределения точек наблюдения мы получаем

$$\sigma_{\delta} \geq \sigma_{\delta}^{CR} = 0.0731 \text{ км}, \quad \sigma_c \geq \sigma_c^{CR} = 0.0788 \text{ км}.$$

Для случая сгущенной сетки

$$\sigma_{\delta} \geq \sigma_{\delta}^{CR} = 0.0140 \text{ км}, \quad \sigma_c \geq \sigma_c^{CR} = 0.0286 \text{ км}.$$

2.7. Скорость спрединга и погрешность определения интервалов постоянной полярности

Рассмотрим подробнее, как погрешность выделения интервалов противоположной полярности по морским магнитным аномалиям, измеренным на поверхности океана, зависит от скорости спрединга, при которой сформировался магнитоактивный слой в районе исследования.

Чтобы проиллюстрировать предложенный подход обратимся к рассмотрению конкретного модельного примера. Нами были рассчитаны 4 модельных профиля для последовательности аномалий А1–А5, образовавшихся в период 0–10 млн лет при полускоростях спрединга, меняющихся в диапазоне 0.5–2.0 см/год. На рисунке 6, где изображены модельные профили и временная магнитная шкала, соответствующая этим профилям,

видно, что форма одновозрастных аномалий заметно меняется от профиля к профилю и существенно зависит от скорости спрединга. При больших скоростях спрединга аномалии располагаются далеко одна от другой, а при меньших скоростях, те же аномалии располагаются ближе, иногда они сливаются, а их форма становится более сглаженной.

С возрастанием скорости спрединга увеличивается и разрешимость аномалий, когда тонкая структура шкалы находит отчетливое отражение в магнитных аномалиях. Некоторые аномалии, соответствующие непродолжительным интервалам прямой полярности, например аномалия “2”, хорошо идентифицируется на профилях с большей скоростью спрединга, тогда как при малых скоростях спрединга, эта же самая аномалия сливается с расположенными рядом осевой аномалией и аномалией “2а” и никак не выражена в поле. В целом, уменьшение скорости спрединга можно рассматривать как действие некоторого низкочастотного фильтра.

Обсудим вопрос о точности определения субхрона на примере магнитной аномалии “3а”, наблюдаемой на хребте Рейкьянес в Северной Атлантике, где скорость спрединга равна 1.2 см/год. При этой скорости спрединга точки перемены полярности, соответствующие хрону “3а”, равны 117.8, 122.74, 125.38, 131.34 км. Исследуемый ниже субхрон отвечает точкам 122.74 и 125.38. При данной скорости спрединга ширине субхрона 2.64 км соответствует промежуток времени $2.64 \text{ [км]} / 1.2 \text{ [см/год]} = 220 \text{ тыс. лет}$.

В отличие от рассмотренного выше примера (2), ширина субхрона 2.64 км, в 4.5 раз больше, чем ширина рассмотренного ивента и можно ожидать более точного его определения. Для среднеквадратичных погрешностей построим зависимость от скорости спрединга их нижних оценок $\sigma_{\delta}^{CR}/\delta$ и σ_c^{CR}/δ , получаемых из неравенства Рао-Крамера. На рисунке 7 приведены относительные погрешности $\sigma_{\delta}^{CR}/\delta$ и σ_c^{CR}/δ для разных скоростей спрединга, δ — это ширина субхрона при данной скорости спрединга.

Из графика видно, что вначале относительные погрешности определения ширины субхрона и его центра, значительно уменьшаются с возрастанием скорости спрединга, а при значениях скорости спрединга $> 1.5-2.0$ см/год значения ошибок выходят на асимптоту с небольшим наклоном и существенного улучшения не происходит.

Отметим, что в нашей модели не учитывается тот факт, что смена полярности геомагнитного поля происходила не мгновенно, а в течение некоторого периода времени, составляющего по разным оценкам 3000–5000 лет [Merrill and McFadden, 1999; Harrison and Somayajulu, 1966; Cox and Dalrymple,

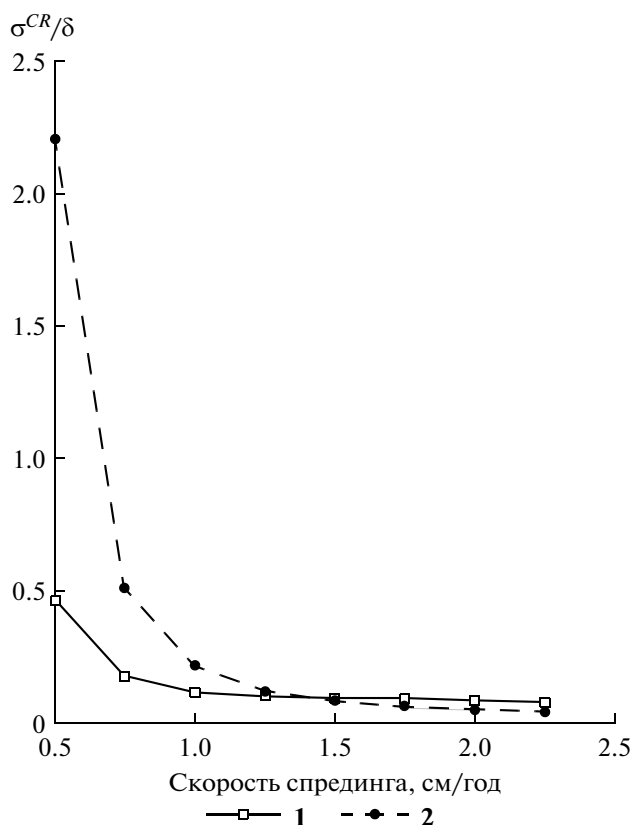


Рис. 7. Графики относительных погрешностей определения ширины субхрона для аномалии 3а и его центра в зависимости от скорости спрединга (см/год). Условные обозначения: 1 – относительная погрешность $\sigma_{\delta}^{CR}/\delta$; 2 – относительная погрешность σ_c^{CR}/δ .

1967]. Представляется интересным дальнейшее применение этого метода для уточненной модели, где учитывается наличие конечной переходной зоны, разделяющей блоки прямой и обратной полярности, а границы блоков наклонены в сторону от оси хребта.

3. РЕЗУЛЬТАТЫ И ВЫВОДЫ

Проведенный нами анализ показывает, что неравенство Рао-Крамера может быть использовано для оценки разрешимости интервалов противоположной полярности геомагнитного поля по морским магнитным аномалиям и планирования измерений. Интересно отметить тот факт, что ширина выделяемого интервала одной полярности определяется лучше, чем ее центр.

Для модели, рассмотренной в п. 2.3 (рис. 2), приведем таблицу нижних оценок σ_{δ}^{CR} , σ_c^{CR} , среднеквадратических отклонений длительности ивента и положения его центра $x_c = (X_2 + X_3)/2$

при шуме, составляющем 10% от максимальной величины аномального поля.

Скорость спрединга	σ_{δ}^{CR} 10 ³ лет	σ_c^{CR} 10 ³ лет
0.5 см/год	36	150
1 см/год	19	73
2 см/год	9	37
5 см/год	3.6	15
10 см/год	1.8	7.3

Зависимость оценок от шума линейная, если шум составляет, к примеру, 1%, то оценки уменьшаются в 10 раз.

Если считать внешние границы X_1 , X_4 хронов известными, то оценки σ_{δ}^{CR} среднего отклонения δ уменьшаются, но несущественно 0.1822 км и 0.1731 км соответственно.

Плотная сетка наблюдений в районе ивента дает очень существенное улучшение оценок σ_{δ}^{CR} : 0.0232 км и 0.1822 км соответственно.

Наблюдение на глубине 3 км дает очень существенное улучшение оценок σ_{δ}^{CR} : 0.0731 км и 0.1822 км соответственно.

При глубинных наблюдениях оценки среднего отклонения ширины ивента примерно такие же, как оценки среднего отклонения положения его центра: 0.0731 км и 0.0788 км соответственно.

4. ПРИЛОЖЕНИЕ

Поскольку нам не удалось найти в литературе [Гордин В.М. и Золотов И.Г., 1990] ни вывода, ни явного выражения аномального магнитного поля для бесконечной прямоугольной призмы, приведем ниже необходимые выкладки. Это выражение может быть также получено или с помощью Тальвани [Talwani, 1965], или с помощью преобразования Фурье, или интегрированием выражения (3) работы [Schouten, 1971].

Рассмотрим поле однородно намагниченной прямоугольной бесконечной призмы, параллельной поверхности,

$$\mathbf{M} = M_z \mathbf{e}_z \chi_{[\alpha, \beta]}(x) \chi_{[-b, -a]}(y).$$

то есть в уравнении (1) функция $p(x)$ есть $\chi_{[\alpha, \beta]}(x)$. Тогда уравнение (1) приобретает вид

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, z) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x, z) = \mu_0 M_z [\delta(z + b) - \delta(z + a)].$$

При выбранном направлении главного магнитного поля, аномальное магнитное поле имеет вид

$$A = \frac{\mathbf{B} \cdot \mathbf{B}_E}{B_E} = \frac{\partial}{\partial z} u.$$

Обозначая правую часть уравнения (1) через $f(x)$ и используя двумерную функцию Грина уравнения Лапласа, получаем

$$\begin{aligned} u(x, z) &= \frac{\mu_0 M_z}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) \ln \sqrt{(x - \xi)^2 + (z - \eta)^2} d\xi d\eta = \\ &= \frac{\mu_0 M_z}{2\pi} \int_{\alpha}^{\beta} d\xi \left[\ln \sqrt{(x - \xi)^2 + (z + b)^2} - \right. \\ &\quad \left. - \ln \sqrt{(x - \xi)^2 + (z + a)^2} \right]. \end{aligned}$$

Для z -компоненты \mathbf{B} получаем

$$\begin{aligned} B_z &= -\frac{\partial}{\partial z} u = \frac{\mu_0 M_z}{2\pi} \times \\ &\times \int_{\alpha}^{\beta} d\xi \left[\frac{z + b}{(x - \xi)^2 + (z + b)^2} - \frac{z + a}{(x - \xi)^2 + (z + a)^2} \right]. \end{aligned}$$

И для наблюдаемого поля

$$\begin{aligned} A(x, z) = -B_z(x, z) &= -\frac{\mu_0 M_z}{2\pi} \left[\arctan \frac{x - \beta}{z + b} - \right. \\ &\left. - \arctan \frac{x - \alpha}{z + b} - \arctan \frac{x - \beta}{z + a} + \arctan \frac{x - \alpha}{z + a} \right]. \end{aligned}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Боровков Л.Л. Математическая статистика. Оценка параметров проверка гипотез // Наука. С. 472. 1984.
- Гордин В.М., Золотов И.Г. Моделирование магнито-активного слоя океанической литосферы (Теорет. и метод. аспекты) // АН СССР, Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта М.: Наука, 181 с. 1990.
- Иванов С.А., Иванова В.Н., Смирнов В.Б. Неравенство Рао-Крамера в задаче определения параметров экспоненциально затухающих сигналов // Оптика и спектроскопия. Т. 73. Вып. 6. С. 1194–1198. 1992
- Blakely R.J., Cox A. Binary model for two-dimensional magnetic anomalies // Earth Planet. Sci. Lett. V. 12. P. 108–118. 1971.
- Blakely R.J., Cox A. Identification of short polarity events by transforming marine magnetic profiles to the pole // J. Geophys. Res. V. 77. P. 4339–4349. 1972.
- Cande S.C., Kent D.V. Ultrahigh resolution marine magnetic anomaly profiles: a record of continuous poleointensity variations? // J. Geophys. Res. V. 97. P. 15.075–15.083. 1992a.
- Cande S.C., Kent D.V. A New Geomagnetic Polarity Time Scale for the Late Cretaceous and Cenozoic // J. Geophys. Res. V. 97(B10). P. 13.917–13.951. 1992b.
- Cande S.C., Kent D.V. Revised calibration of the geomagnetic polarity timescale for the Late Cretaceous and Cenozoic // J. Geophys. Res. V. 100(B4). P. 6093–6095.

- *Constable C.* On rates of occurrence of geomagnetic reversals // *Phys. Earth Planet. Inter.* V. 118. P. 181–193. 2000.
- *Cox A., Dalrymple G.B.* Statistical analysis of geomagnetic reversal data and the precision of potassium-argon dating // *J. Geophys. Res.* V. 72. P. 2603–2614. 1967.
- *Harland W.B., Armstrong R.L., Cox A.V., Craig L.E., Smith A.G., Smith D.G.* A Geologic Time Scale. Cambridge: Cambridge University Press: 263. P. 1990.
- *Harrison C.G.A., Somayajulu B.L.K.* Behaviour of the earth's magnetic field during a reversal // *Nature.* V. 212. P. 1193–1195. 1966.
- *Klitgord K.D., Heustis S. P., Mudie J.D., Parker R. L.* An analysis of near-bottom magnetic anomalies: Sea floor spreading and the magnetized layer // *Geophys. J. R. Astron. Soc.* V. 43. P. 387–424. 1975.
- *Merrill R.T., McFadden P. L.* Geomagnetic polarity transitions // *Rev. Geophys.* V. 37. P. 201–226. 1999
- *Schouten H., Denham C., Smith W.* On the quality of marine magnetic anomaly sources and sea floor topography // *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.* V. 70. Issue 1. P. 245–259. 1982.
- *Schouten H., McCamy K.* Filtering marine magnetic anomalies // *J. Geophys. Res.* V. 77. P. 7089–7099. 1972.
- *Schouten J.A.* A fundamental analysis of magnetic anomalies over oceanic ridges // *Mar. Geophys. Res.* P. 111–144. 1971.
- *Talwani M.* Computation with the help of a digital computer of magnetic anomalies caused by bodies of arbitrary shape // *Geophysics.* V. 30. P. 797–817. 1965.
- *Vine F.J., Matthews D.H.* Magnetic Anomalies Over Oceanic Ridges // *Nature.* V. 199. P. 947–949. 1963.