

УДК 533.951

ЛИНЕЙНЫЙ МЕХАНИЗМ ГЕНЕРАЦИИ И ИНТЕНСИФИКАЦИИ ВНУТРЕННИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН В ИОНОСФЕРЕ ПРИ ИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ С НЕОДНОРОДНЫМ ЗОНАЛЬНЫМ ВЕТРОМ. 2. ГЕНЕРАЦИЯ И ИНТЕНСИФИКАЦИЯ ВНУТРЕННИХ ГРАВИТАЦИОННЫХ ВОЛН НА ЛИНЕЙНОЙ СТАДИИ ЭВОЛЮЦИИ

© 2013 г. **Г. Д. Абурджания**, О. А. Харшиладзе, Х. З. Чаргазия

*Институт прикладной математики им. И.Н. Векуа
Тбилисского государственного университета им. И.А. Джавахишвили,
Институт Геофизики им. М.З. Нодиа Тбилисского государственного
университета им. И.А. Джавахишвили, г. Тбилиси, Грузия
e-mail: aburj@mymail.ge; g.aburjania@gmail.com*

Поступила в редакцию 10.08.2011 г.
После доработки 13.12.2012 г.

Исследован линейный механизм генерации и дальнейшей интенсификации внутренних гравитационных волн (ВГВ) в устойчиво-стратифицированной диссипативной ионосфере в присутствии неоднородного зонального ветра (сдвигового течения). В случае сдвиговых течений операторы линейных задач являются несамосопряженными, а соответствующие собственные функции — неортогональными, поэтому канонически-модальный подход мало пригоден при изучении таких движений. Более адекватным является применение так называемого немодального исчисления. На основе немодального подхода получены динамические уравнения и уравнения переноса энергии ВГВ возмущений в ионосфере со сдвиговым течением. Найдены точные аналитические решения построенных динамических уравнений. Определен инкремент нарастания сдвиговой неустойчивости ВГВ. Выявлено, что усиление ВГВ возмущений со временем протекает не экспоненциально, а алгебраически-степенным образом. Анализируется эффективность линейного механизма усиления ВГВ при взаимодействии с неоднородным зональным ветром. Показано, что ВГВ эффективно черпают энергию сдвигового течения на линейной стадии эволюции и существенно увеличивают (на порядок) свою амплитуду и энергию. Частота и волновой вектор генерируемых ВГВ мод зависят от времени, поэтому в ионосфере со сдвиговым течением образуется широкий спектр волновых возмущений, обусловленный нелинейным-турбулентным, а линейными эффектами. Тем самым, появляются новая степень свободы системы и возможность образования турбулентного состояния атмосферно-ионосферных слоев на ВГВ возмущениях.

DOI: 10.7868/S0016794013040020

1. ВВЕДЕНИЕ

Результаты многолетних наблюдений [Госсард и Хук, 1978; Казимировский и Кокоуров, 1979; Педдоски, 1984] показывают также, что в атмосферно-ионосферных слоях постоянно присутствуют пространственно-неоднородные зональные ветры — сдвиговые течения, — обусловленные неравномерным нагревом атмосферных слоев солнечной радиацией. В связи с этим актуальной становится задача о генерации и эволюции обычной и замагниченной волн в разных слоях атмосферы при их взаимодействии с неоднородным зональным ветром (сдвиговым течением).

Интерес к сдвиговым течениям вообще обусловлен их повсеместной реализацией как в околоземном пространстве (как уже отмечалось выше) и астрофизических объектах (в галактиках,

звездах, струйных выбросах, мировом океане и т.д.), так и в лабораторных и технических устройствах (нефтепроводах, газопроводах, в плазменных магнитных ловушках, магнитогидродинамических генераторах и т.д.). Сдвиг скорости в течениях является мощным источником разнообразных энергоемких процессов в сплошной среде. Каноническое (модальное) исследование линейных волновых процессов — спектральное разложение во времени возмущений с дальнейшим анализом собственных значений — в сдвиговых течениях упускает из поля зрения крайне важные физические процессы, например, усиление и взаимную линейную трансформацию волновых мод [Reddy et al., 1993; Trefethen et al., 1993].

Строгое математическое описание специфики сдвиговых течений выявило [Reddy et al., 1993], что при каноническом (модальном) анализе линейных

процессов фигурирующие в динамических уравнениях операторы являются несамосопряженными [Trefenthen et al., 1993] и, как следствие этого, собственные функции задачи неортогональны друг к другу – они сильно интерферируют между собой. Это обстоятельство, для корректного описания явлений, делает необходимым точный расчет результатов интерференции собственных функций, что, порой, представляет собой проблему непреодолимой сложности.

Существует и другой подход – так называемое немодальное исчисление линейных процессов в сдвиговых течениях. При этом подходе решается модифицированная начальная задача (задача Коши) с помощью прослеживания за эволюцией во времени пространственных Фурье-гармоник (ПФГ) возмущений без какого-либо спектрального разложения во времени [Graik and Criminale, 1986; Chagelishvili et al., 1996]. Являясь оптимальным “языком”, немодальный подход максимально упрощает математическое описание линейной динамики возмущений в сдвиговых течениях и позволяет выявить ключевые явления (обусловленные неортогональностью линейной динамики), которые ускользали из виду при модальном анализе.

Целью настоящей работы является теоретическое исследование особенностей генерации и интенсификации внутренних гравитационных волновых структур в разных атмосферно-ионосферных областях, обусловленных присутствием зональных локальных неоднородных ветров (сдвиговых течений). В работе [Абурджания и др., 2012] (в дальнейшем часть 1) разъясняется модель среды и приводятся основные гидродинамические уравнения для нижней ионосферы. В разд. 2 коротко излагаются основные принципы немодального исчисления и результаты моделирования процессов генерации и интенсификации замагниченных ВГВ на линейной стадии. Обсуждение полученных результатов проводится в разделе 3.

2. ГЕНЕРАЦИЯ И ИНТЕНСИФИКАЦИЯ ВГВ НА ЛИНЕЙНОЙ СТАДИИ ЭВОЛЮЦИИ

Для изучения линейной стадии взаимодействия внутренних гравитационных волн с локальным неоднородным зональным ветром и неоднородным геомагнитным полем линеаризуем систему уравнений (3), (4) и (11) (часть 1) на фоне плоского зонального сдвигового течения (ветра), обладающего неоднородной вдоль вертикали равновесной скоростью $\mathbf{V}_0(z)$: $\mathbf{V} = \mathbf{V}_0(z) + \mathbf{V}(x, z, t)$, $\rho = \rho_0(z) + \rho(x, z, t)$, $P = P_0(z) + P(x, z, t)$. Здесь V – скорость возмущений, $\mathbf{V}_0(\mathbf{V}_{0x}, 0, 0)$ является скоростью фонового зонального ветра и для горизонтального сдвигового течения дается в виде:

$$\mathbf{V}_0(z) = v_0(z)\mathbf{e}_x = Az\mathbf{e}_x, \quad (1)$$

где $A > 0$ – постоянный параметр ветрового сдвига, \mathbf{e}_x – единичный вектор, направленный вдоль оси x , ρ – плотность, P – давление. Переменные с нулевым индексом означают параметры атмосферы в невозмущенном состоянии.

В выбранной локальной прямоугольной системе координат для составляющих (11), (2), (3) и (4) (см. часть 1) получим следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{aligned} \rho_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_0(z) \frac{\partial}{\partial x} \right) V_x &= \\ &= -\frac{\partial P}{\partial x} - \rho_0 v_0'(z) V_z - \sigma_P B_0^2 V_x + \rho_0 v \Delta_{\perp} V_x, \end{aligned} \quad (2)$$

$$\begin{aligned} \rho_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_0(z) \frac{\partial}{\partial x} \right) V_z &= \\ &= -\frac{\partial P}{\partial z} - \rho_0 g - \sigma_P B_y^2 V_z + \rho_0 v \Delta_{\perp} V_z, \end{aligned} \quad (3)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_0(z) \frac{\partial}{\partial x} \right) \rho = -\frac{d\rho_0}{dz} V_z, \quad (4)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + v_0(z) \frac{\partial}{\partial x} \right) P = -\frac{dP_0}{dz} V_z, \quad (5)$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_z}{\partial z} = 0. \quad (6)$$

Здесь $v_0'(z) = dv_0(z)/dz$, $\mathbf{g} = -g\mathbf{e}_z$ – ускорение силы тяжести, \mathbf{e}_z – единичный вектор вдоль вертикали, т.е. вдоль оси z , \mathbf{B}_0 – заданное внешнее геомагнитное поле, σ_P – педерсеновская или поперечная проводимость (поперек \mathbf{B}_0), v – кинематическая вязкость (см. часть 1). В системе из пяти уравнений (2)–(6) любые четыре составляют замкнутую систему. Для удобства дальнейшего исследования в качестве замкнутой системы мы выберем уравнения (2)–(4) и (6).

2.1. Локальное дисперсионное уравнение. Система уравнений (2)–(6) представляет собой уравнения в частных производных с переменными коэффициентами, зависящими от пространственной координаты z . Поэтому для анализа существования нетривиальных решений хотя бы на начальной стадии эволюции волновых возмущений, необходимо использовать локальное приближение, когда можно предполагать, что коэффициенты системы уравнений (2)–(6) являются локально однородными (постоянными). Тогда для анализа спектральной характеристики, описываемых этими уравнениями возмущений правомерно применение Фурье-разложения по пространственным и временным переменным [Михайловский, 1977]. Вследствие экспоненциального падения равновесной плотности среды (10) (см. часть 1) с высотой, ищем решение системы уравнений (2)–(6) в виде плоских волн вида [Hines, 1960; Голицын, 1965; Госсард и Хук, 1978]:

$$\begin{aligned}
 V_{x,z}(x, z, t) = & \int V_{x,z}(k_x, k_z) \times \\
 & \times \exp\{i[k_x x + (k_z - i/2H)z - \omega t]\} dk_x dk_z, \\
 (P, \rho)(x, z, t) = & \int (P, \rho)(k_x, k_z) \exp \times \\
 & \times \{i[k_x x + (k_z + i/2H)z - \omega t]\} dk_x dk_z,
 \end{aligned} \tag{7}$$

где проведено пространственно-временное Фурье-разложение волновых возмущений; $k(k_x, 0, k_z)$ – волновой вектор, а $\omega(k_x, k_z)$ – частота волн, H – приведенная высота нейтральной атмосферы. Подставляя представление (7) в уравнения (2)–(4) и (6), получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$\begin{aligned}
 (\omega - k_x v_0)^2 - \frac{k_x^2}{K^2} \omega_g^2 + i \frac{(\omega - k_x v_0)}{K^2} \left[k_x^2 \left(\frac{\sigma_p B_{0y}^2}{\rho_0} + \nu K_1^2 \right) - k_x \left(k_z + \frac{i}{2H} \right) v_0' + \right. \\
 \left. + \left(k_z^2 + \frac{1}{4H^2} \right) \left(\frac{\sigma_p B_0^2}{\rho_0} + \nu K_1^2 \right) \right] = 0.
 \end{aligned} \tag{8}$$

Здесь введены следующие обозначения: $\omega_g = (g/H)^{1/2} > 0$ – частота Брента-Вяйсея для устойчиво стратифицированной несжимаемой изотермической атмосферы; $K^2 = k_x^2 + k_z^2 + 1/(4H^2)$, $K_1^2 = K_2^2 - ik_z/H$, $K_2^2 = k_x^2 + k_z^2 - 1/(4H^2)$. Предполагая волновое число K вещественным, а частоту

комплексной $\omega = \omega_0 + i\gamma$, $|\gamma| \ll \omega_0$, из (8) получаем выражения для спектра линейных колебаний

$$\frac{\omega_0}{k_x} = v_0 - \frac{v_0'}{4K^2 H^2} \pm \frac{\omega_g}{K} \sqrt{1 + \frac{v_0'^2}{16K^2 H^2 \omega_g^2}}, \tag{9}$$

и декремента (инкремента) возмущений

$$\gamma = - \frac{k_x^2 \left(\frac{\sigma_p B_{0y}^2}{\rho(0)} + \nu K_2^2 \right) + \left(k_z^2 + \frac{1}{4H^2} \right) \left(\frac{\sigma_p B_0^2}{\rho(0)} + \nu K_2^2 \right) - k_x k_z v_0'}{2K^2 \left[1 + \frac{k_x v_0'}{4K^2 H (\omega_0 - k_x v_0)} \right]}. \tag{10}$$

При отсутствии сдвигового течения формула (9) переходит в выражение для частоты обычной внутренней гравитационной волны [Голицын, 1965]:

$$\omega_0 = \pm \frac{k_x \omega_g}{(k_x^2 + k_z^2 + 1/(4H^2))^{1/2}}, \tag{11}$$

а (10) выражает декремент затухания ВГВ

$$\gamma = - \frac{k_x^2 \left(\frac{\sigma_p B_{0y}^2}{\rho(0)} + \nu K_2^2 \right) + \left(k_z^2 + \frac{1}{4H^2} \right) \left(\frac{\sigma_p B_0^2}{\rho(0)} + \nu K_2^2 \right)}{2K^2}, \tag{12}$$

обусловленным индукционным (педерсеновским, $\sigma_p \neq 0$) и вязкостным затуханием в ионосферной среде ($\nu \neq 0$).

Согласно (11) фазовая скорость распространения линейных ВГВ лежит в диапазоне:

$$-V_{\max} \leq V_p \leq V_{\max}, \tag{13}$$

где $V_{\max} = 2H\omega_g = 2(gH)^{1/2}$ в несжимаемой атмосфере и учтено, что $k_x^2 \ll k_z^2 \geq 4H^2$, $k_x^2 + k_z^2 + 1/4H^2 \sim 1/4H^2$.

ВГВ являются низкочастотной ветвью акустико-гравитационных волн (АГВ), занимающие промежуточное место между частотой инерционного колебания $\omega_i = 2\Omega_0$ и частотой Брента-Вяйсея для устойчиво стратифицированной несжимаемой изотермической атмосферы ω_g , $\omega_i < \omega_0 < \omega_g$ [Гершман, 1974; Госсард и Хук, 1978]. Для высоты однородной атмосферы $H \approx 4.5$ – 6 км, можно оценить значение максимальной фазовой скорости линейных ВГВ $V_{\max} \approx 440$ м/с, частот $\omega_g \approx 1.7 \times 10^{-2}$ с $^{-1}$ и $\Omega_0 \approx 10^{-4}$ с $^{-1}$. Так что ВГВ возмущения охватывают следующий диапазон низкочастотных колебаний -6×10^{-4} с $^{-1} < \omega < 2 \times 10^{-2}$ с $^{-1}$ и могут быть сверхзвуковыми $V_p \geq c_s \approx 330$ м/с (см. также, Stenflo and Stepaniants, 1995).

Рассматриваемые нами волны имеют граничную частоту ω_g и для них большую роль играют гравитационные эффекты, что и отражается в их названии – ВГВ. Из (11) следует, что для практически важного случая, относительно коротких волн, $k_z^2 \gg k_x^2$ и $k_z H \gg 1$, фазовая ($V_p = (\omega/k^2)\mathbf{k}$) и групповая ($V_g = \nabla_{\mathbf{k}}\omega$) скорости ВГВ в безветренной атмосфере определяются выражениями:

$$V_{px} = \frac{\omega_g k_x^2}{k_z^3}, \quad V_{pz} = \frac{\omega_g k_x}{k_z^2}, \quad V_{gx} = \frac{\omega_g}{k_z}, \quad (14)$$

$$V_{gz} = -\frac{\omega_g k_x}{k_z^2}.$$

Видно, что рассматриваемые нами короткие ВГВ обладают сильной пространственной дисперсией. Направление фазовой скорости близко к вертикали, $|V_{pz}| \gg |V_{px}|$, а групповая скорость почти горизонтальна, $|V_{gx}| \gg |V_{gz}|$. В длинноволновом случае, $k_z H \ll 1$, ВГВ почти бездисперсионны.

Оценим характерные масштабы ВГВ в диссипативной ионосфере. На уровне земной поверхности кинематическая молекулярная вязкость определяется выражением $\nu_0 \approx 1.3 \times 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$, на уровне E -слоя ($\sim 110 \text{ км}$) $\nu_{110} \approx 1.3 \times 10^2 \text{ м}^2/\text{с}$, а на уровне F -слоя ($(250-300) \text{ км}$) $\nu_{300} \approx 1.3 \times 10^6 \text{ м}^2/\text{с}$ [Госсард и Хук, 1978]. Соответствующие минимальные длины ВГВ с 10-минутным периодом, возможные при наличии вязкости, для этих высот составляют $\lambda_0 \sim 10^{-1} \text{ м}$, $\lambda_{110} \sim 6 \text{ м}$ и $\lambda_{300} \sim 10^4 \text{ м}$ [Госсард и Хук, 1978]. Исходя из этого и, учитывая что турбулентная вязкость в нижней атмосфере также увеличивает минимальные масштабы размеров ВГВ [Госсард и Хук, 1978], далее мы будем рассматривать гравитационные возмущения, длина волн которых охватывает диапазон $100 \text{ м} \leq \lambda \leq 10 \text{ км}$.

Далее определим значения коэффициентов затухания ВГВ в разных слоях ионосферы. На уровне земной поверхности значения параметров среды и волн равны $\sigma_p \approx 5 \times 10^{-7} \text{ См/м}$, $\rho_0 = 1.3 \text{ кг/м}^3$, $B_0 = 0.5 \times 10^{-4} \text{ Тл}$, $\lambda \approx 10^4 \text{ м}$, $\nu_0 \approx 1.3 \times 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ и, согласно (10), декремент вязкостного затухания ВГВ структур $\gamma_{\nu,0} \approx k^2 \nu \sim 10^{-12} \text{ с}^{-1}$, а декремент индукционного затухания $\gamma_{\sigma,0} \approx \sigma_p B_0^2 / \rho_0 \sim 10^{-15} \text{ с}^{-1}$. Для E -слоя характерные значения параметров среды и волн равны $\sigma_p \approx 3 \times 10^{-4} \text{ См/м}$, $\rho_0 = 10^{-10} \text{ кг/м}^3$, $B_0 = 0.5 \times 10^{-4} \text{ Тл}$, $\lambda \approx 10^4 \text{ м}$, $\nu_{110} \approx 1.3 \times 10^2 \text{ м}^2/\text{с}$ и соответственно $\gamma_{\nu,110} \approx k^2 \nu \sim 5 \times 10^{-5} \text{ с}^{-1}$ и $\gamma_{\sigma,110} \approx \sigma_p B_0^2 / \rho_0 \sim 10^{-3} \text{ с}^{-1}$. Для F -слоя мы используем характерные параметры: $\sigma_H \approx en/B_0 \sim 10^{-4} \text{ См/м}$, $\sigma_p \approx \sigma_H \omega_{ci} / \nu_{in} \ll \sigma_H$, $\omega_{ci} \sim 3 \times 10^2 \text{ с}^{-1}$, $\nu_{in} \leq 10 \text{ с}^{-1}$, $\nu_{300} \approx 1.3 \times 10^6 \text{ м}^2/\text{с}$ и для декрементов затухания имеем соответственно: $\gamma_{\nu,300} \sim 10^{-1} \text{ с}^{-1}$ и $\gamma_{\sigma,300} \sim 10^{-3} \text{ с}^{-1}$.

Так что на разных уровнях ионосферы коэффициенты вязкостного и индукционного затухания ВГВ-структур имеют разные значения, и это надо учитывать в динамических задачах с участием ВГВ-структур.

Следует отметить, что, согласно формуле (9), неоднородный зональный ветер существенно расширяет спектры ВГВ в ионосфере. Причем

сдвиговое течение снабжает среду энергией (см. формулу (10)), обуславливающей генерацию-раскачку ВГВ и развитие линейной сдвиговой неустойчивости с характерным инкрементом:

$$\gamma_A \sim \frac{k_x k_z}{K^2} A. \quad (15)$$

Из (10), (12) и (15) видно, что рассматриваемое ионосферное сдвиговое течение может стать неустойчивой при выполнении условия $\gamma_A \geq \gamma_{\nu}$, γ_{σ} . Согласно (15), для генерации ВГВ структур необходимо, чтобы скорость сдвигового течения имела хотя бы отличное от нуля первую производную

по вертикальной координате ($v'_0(z) = A \neq 0$). Как отмечено в работах [Маргетройд, 1969; Mayr et al., 1990], характерное значение размерного параметра сдвигового течения (A) с^{-1} для ионосферного F -региона равно $A = v'_0 \approx 0.015-0.15 \text{ с}^{-1}$. Учитывая это, из (15) получим для инкремента сдвиговой неустойчивости $\gamma_A \geq 10^{-1} \text{ с}^{-1}$. Так что, условие генерации и усиления ВГВ возмущений на разных уровнях ионосферы ($\gamma_A \geq \gamma_{\nu}$, γ_{σ}) выполняется даже с некоторым запасом.

Таким образом, неоднородный зональный ветер или сдвиговое течение может генерировать и/или интенсифицировать внутренние гравитационные волны в ионосфере и вызвать рост амплитуды колебаний, т.е. перевести среду в неустойчивое состояние. В следующем подразделе мы эту точку зрения подтвердим с использованием иного, более самосогласованного для сдвигового течения метода.

2.2. Немодальный анализ сдвиговой неустойчивости волн в ионосфере. При получении (8)–(10) мы использовали так называемое локальное приближение, т.е. предполагали, что ν_0 , ν'_0 , ρ_0 , P_0 и B_0 являются локально-однородными и провели Фурье-разложение физических величин. Локальное приближение имеет ограниченный предел применимости в неоднородной среде и, тем более, в сдвиговых течениях [Михайловский, 1977]. В частности, полученные таким подходом результаты применимы лишь для начальной стадии эволюции возмущений. В общем случае, если фоновое течение является пространственно-неоднородным вдоль вертикали, то мы не имеем права делать пространственно-Фурье-разложение вдоль оси z . Согласно работам [Graik et al., 1986; Reddy et al., 1993; Trefenthen et al., 1993; Chagelishvili et al., 1996; Aburjania et al., 2006], для исследования эволюции волновых возмущений в сдвиговых течениях на линейной стадии более адекватным является применение немодального исчисления, нежели модального подхода (т.е. прямого Фурье-разложения). Поэтому, дальнейший анализ особенностей замагниченной волны ВГВ на линейной стадии в ионосфере проведем согласно немодальному подходу. С этой

целью удобно ввести систему координат с сдвигающимися осями $X_1O_1Y_1$, начало отсчета O_1 и ось Y_1 которой совпадают с теми же характеристиками равновесной локальной системы XOY , а ось X_1 движется совместно с невозмущенным (фоновым) течением. Это для нашей задачи равносильно замене переменных:

$$x_1 = x - azt, \quad y_1 = y, \quad t_1 = t, \quad (16)$$

или же

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t_1} - az \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z_1} - at_1 \frac{\partial}{\partial x_1}. \quad (17)$$

С новыми переменными уравнения (2), (3), (4) и (6) примут вид

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial V_x}{\partial t_1} = & -\frac{\partial P}{\partial x_1} - \rho_0 v_0' V_z - \sigma_P B_0^2 V_x + \\ & + v \rho_0 \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial}{\partial z_1} - at_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^2 \right\} V_x, \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \rho_0 \frac{\partial V_z}{\partial t_1} = & -\left(\frac{\partial}{\partial z_1} - At_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) P - \rho_0 g - \sigma_P B_0^2 V_z + \\ & + v \rho_0 \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial}{\partial z_1} - at_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \right)^2 \right\} V_z, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t_1} = \frac{\rho_0}{H} V_z, \quad (20)$$

$$\frac{\partial V_x}{\partial x} + \left(\frac{\partial}{\partial z_1} - At_1 \frac{\partial}{\partial x_1} \right) V_z = 0. \quad (21)$$

Коэффициенты исходной системы линейных уравнений (2)–(5) зависели от пространственной координаты z . Подобные математические преобразования заменили эту пространственную неоднородность неоднородностью во времени (см. ур. (18)–(21)). Итак, начально-граничная задача сведена к начальной задаче типа Коши. Так как теперь коэффициенты системы (18)–(21) стали не зависящими от пространственных переменных x_1, z_1 , то уже можно, без каких-то там локальных приближений, провести Фурье-преобразования этих уравнений относительно пространственных переменных (x_1, z_1) , а временную эволюцию этих пространственных фурье-гармоник (ПФГ) рассматривать независимо:

$$\begin{aligned} & \left\{ V_x, z(x_1, z_1, t_1) \right\} = \\ & \left\{ \rho, P(x_1, z_1, t_1) \right\} = \\ & = \int \int_{-\infty}^{\infty} \int dk_{x_1} dk_{z_1} \left\{ \begin{aligned} & \tilde{V}_{x,z}(k_{x_1}, k_{z_1}, t_1) \\ & \tilde{\rho}, \tilde{P}(k_{x_1}, k_{z_1}, t_1) \end{aligned} \right\} \times \\ & \times \exp(ik_{x_1} x_1 + ik_{z_1} z_1). \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь множители с тильдой (например, \tilde{V}_x) обозначают ПФГ соответствующих физических величин. Подставляя представление (22) в уравнения (18)–(21) и переходя к безразмерным переменным

$$\begin{aligned} \tau & \Rightarrow \omega_g t_1; \quad V_{x,z} \Rightarrow \frac{\tilde{V}_{x,z}}{\omega_g H}; \quad \rho \Rightarrow \frac{\tilde{\rho}}{\rho_0}; \\ P & \Rightarrow \frac{-i\tilde{P}}{\rho_0 \omega_g^2 H^2}; \quad (x, z) \Rightarrow \frac{(x_1, z_1)}{H}; \quad S \Rightarrow \frac{A}{\omega_g}; \\ k_{x,z} & \Rightarrow k_{x_1, z_1} H; \quad k_z = k_z(0) - k_x S \tau; \end{aligned} \quad (23)$$

$$k^2(\tau) = (k_x^2 + k_z^2(\tau));$$

$$v \Rightarrow \frac{v}{\omega_g H^2}; \quad b_0 \Rightarrow \frac{\sigma_P B_0^2}{\rho_0 \omega_g}; \quad b_y \Rightarrow \frac{\sigma_P B_y^2}{\rho_0 \omega_g};$$

для каждой ПФГ возмущенных величин получим

$$\frac{\partial V_x}{\partial \tau} = -S V_z + k_x P - [b_0 + v k^2(\tau)] V_x, \quad (24)$$

$$\frac{\partial V_z}{\partial \tau} = k_z(\tau) P - \rho - [b_y + v k^2(\tau)] V_z, \quad (25)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial \tau} = V_z, \quad (26)$$

$$k_x V_x + k_z(\tau) V_z = 0. \quad (27)$$

Замкнутая система уравнений (24)–(27) описывает линейное взаимодействие ВГВ со сдвиговым течением и эволюцию генерируемых возмущений в диссипативной ионосферной среде. Еще раз отметим, что после проведенных преобразований волновой вектор возмущений $k(k_x, 0, k_z(\tau))$ стал зависящим от времени τ : $k_z(\tau) = k_z(0) - k_x S \tau$; $k^2(\tau) = (k_x^2 + k_z^2(\tau))$. Изменение волнового вектора со временем (т.е. дробление масштабов возмущений на линейной стадии) обуславливает в среде заметное взаимодействие даже таких возмущений, характерный масштаб которых в начальный момент времени сильно отличается друг от друга [Aburjania et al., 2006].

На основе системы (24)–(26) можно получить уравнение переноса энергии рассматриваемых волновых структур, которое дает возможность выявить закономерность изменения плотности энергии со временем:

$$\begin{aligned} \frac{dE(\tau)}{d\tau} = & -\frac{S}{2} \left(V_x^*(\tau) V_z(\tau) + V_x(\tau) V_z^*(\tau) \right) - \\ & - b_1(\tau) |V_x|^2 - b_2(\tau) |V_z|^2, \end{aligned} \quad (28)$$

Здесь “звездочка” означает комплексно-сопряженное значение величин, $b_1(\tau) = b_0 + v k^2(\tau)$, $b_2(\tau) = b_y + v k^2(\tau)$ и плотность полной безразмерной энер-

гии волновых возмущений $E(\tau)$ в пространстве волновых чисел определяется выражением:

$$E[k(\tau)] = \frac{1}{2}(|V_x|^2 + |V_z|^2 + |\rho|^2). \quad (29)$$

Видно, что нестационарная эволюция энергии волновых структур в ионосфере обуславливается сдвиговым течением ($S \neq 0$) и диссипативными процессами – индукционным затуханием ($b_0 \neq 0$, $b_y \neq 0$) и вязкостью ($\nu \neq 0$). При отсутствии сдвигового течения ($S = 0$) и диссипативных процессов ($\nu = 0$, $\sigma_p = 0$) энергия рассматриваемых волновых возмущений в ионосфере сохраняется $dE(\tau)/d\tau = 0$. Плотность полной энергии возмущений (29) состоит из двух частей: $E[k] = E_k + E_t$, где первое слагаемое есть кинетическая энергия возмущений, $E_k = (|V_x|^2 + |V_z|^2)/2$, а второе – термобарическая энергия, $E_t = |\rho|^2/2$, обусловленная упругостью возмущений.

Для выделения в чистом виде влияния сдвигового потока на эволюцию ВГВ, простоты ради, рассмотрим бездиссипативную ионосферу, т.е. предположим, что $\nu = 0$, $\sigma_p = 0$. Далее выясним, к чему на самом деле приводит эволюция энергии волнового возмущения на основе уравнении (28) при $b_1 = b_2 = 0$, – увеличению или уменьшению их энергии? Для ответа необходимо вычислить правую часть уравнения (29), а для этого, со своей стороны, надо найти решения системы уравнений (24)–(27) при $b_1 = b_2 = 0$. С этой целью, дифференцируя уравнение (25) по времени и используя (24), (26) и (27), получаем одно уравнение второго порядка для вертикальной компоненты скорости:

$$\frac{d^2 V_z}{d\tau^2} + R_1(\tau) \frac{dV_z}{d\tau} + R_2(\tau) V_z = 0, \quad (30)$$

где

$$R_1(\tau) = -4Sk_x \frac{k_z(\tau)}{k^2(\tau)}, \quad R_2(\tau) = (2S^2 + 1) \frac{k_x^2}{k^2(\tau)}. \quad (31)$$

Уравнение (30) можно упростить введя новую переменную [Магнус, 1982]. Полагая

$$V_z = V \exp\left[-(1/2) \int R_1(\tau') d\tau'\right], \quad (32)$$

преобразуем (30) к уравнению линейного осциллятора с зависящими от времени параметрами:

$$\ddot{V} + \Omega^2(\tau) V = 0, \quad (33)$$

где

$$\ddot{V} = \frac{d^2 V}{d\tau^2}; \quad (34)$$

$$\Omega^2(\tau) = R_2(\tau) - \frac{1}{2} \dot{R}_1(\tau) - \frac{1}{4} R_1^2(\tau) = \frac{k_x^2}{k^2(\tau)}.$$

Уравнение (33) хорошо известно в математической физике. Это уравнение линейных колебаний математического маятника, у которого меняется длина подвеса. При этом величина $\Omega(\tau)$ определяет угловую скорость колебания маятника.

Решение уравнения (33) проведем в адиабатическом приближении [Зельдович и Мышкис, 1972], т.е. когда зависимость величины $\Omega(\tau)$ от времени является адиабатически медленной:

$$|\dot{\Omega}(\tau)| \ll \Omega^2(\tau). \quad (35)$$

С учетом определения параметра $\Omega(\tau)$ неравенство (34) можно переписать в виде

$$S |k_z(\tau)| \ll [k_x^2 + k_z^2(\tau)]^{1/2}. \quad (36)$$

Для реального ионосферного сдвигового течения $S \ll 1$ (см. определение (23)), поэтому можно сказать, что условие (36) выполняется для широкого диапазона изменения волновых чисел $|k_z(\tau) = k_z(0) - k_x S \tau|$. Другими словами, когда временное изменение $|k_z(\tau)|$ обуславливается линейным дрейфом волнового вектора в пространстве волновых чисел, то условие (35) или (36) справедливо во всей стадии эволюции ПФГ. В этом случае приближенное решение однородного уравнения (33) можно представить в виде:

$$V = \frac{C}{\sqrt{\Omega(\tau)}} \exp[i\varphi(\tau)], \quad (37)$$

где $C = \text{const}$ и

$$\varphi(\tau) = \int_0^\tau \Omega(\tau') d\tau' = \frac{1}{S} \ln \left| \frac{k_z(0) + k(0)}{k_z(\tau) + k(\tau)} \right|.$$

Подставляя (37) в (32), а потом и в уравнения (24)–(27), можно окончательно построить решения для физических величин:

$$V_z(\tau) = \frac{V_z(0) k^2(0)}{k_x^{1/2} k^{3/2}(\tau)} \exp[i\varphi(\tau)], \quad (38)$$

$$V_x(\tau) = -\frac{V_x(0) k_z(\tau) k^2(0)}{k_x^{3/2} k^{3/2}(\tau)} \exp[i\varphi(\tau)], \quad (39)$$

$$\rho(\tau) = -i \frac{\rho(0) k^2(0)}{k_x^{3/2} k^{1/2}(\tau)} \exp[i\varphi(\tau)], \quad (40)$$

$$P(\tau) = \frac{P(0) k^2(0)}{k_x^{3/2} k^{5/2}(\tau)} [2Sk(\tau) - ik_z(\tau)] \exp[i\varphi(\tau)], \quad (41)$$

$$k_x V_x(0) + k_z(0) V_z(0) = 0. \quad (42)$$

Здесь, естественно, для значения физических величин в выражениях (38)–(42) подразумевается вещественная (реальная) часть.

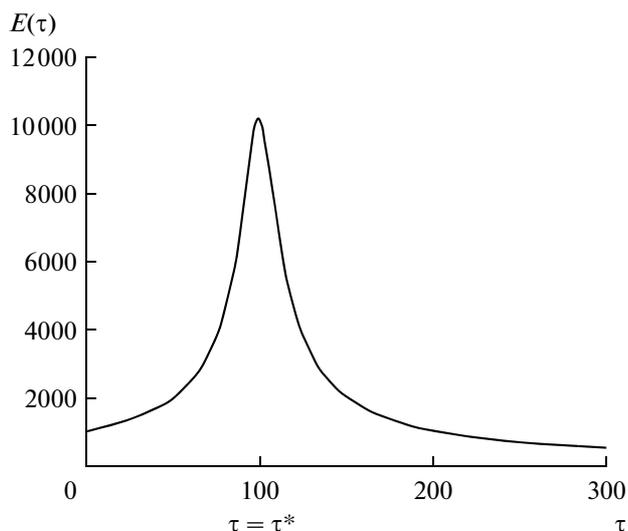


Рис. 1. Эволюция безразмерной ПФГ плотности энергии $E(\tau)$ (54) для параметров: $k_0 = 10$, $S = 0.5$.

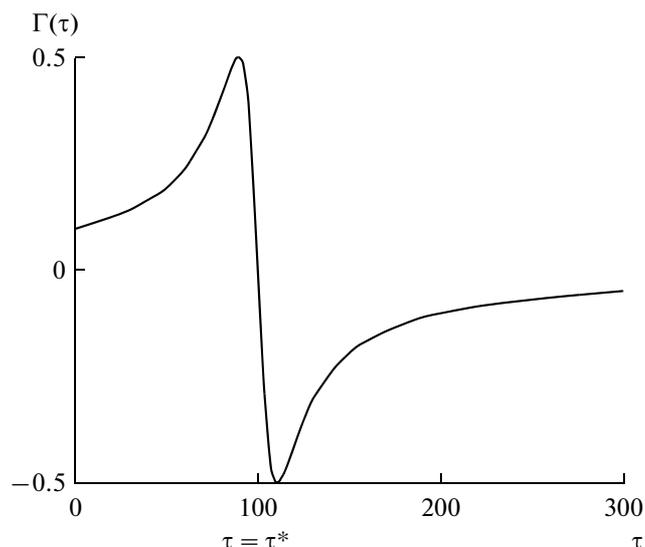


Рис. 2. Инкремент сдвиговой неустойчивости $\Gamma(\tau)$ (56), как функция времени для параметров: $k_0 = 10$, $S = 0.5$.

Подставляя (38)–(40) в уравнения (28) и (29), получим выражение для нормированной плотности энергии Фурье-гармоник:

$$\bar{E}(\tau) = \frac{E(\tau)}{E(0)} = \frac{(1 + k_0^2)^2}{[1 + (k_0 - S\tau)^2]^{1/2}}, \quad (43)$$

и для уравнении переноса ПФГ энергии (при $b_1 = b_2 = 0$)

$$\frac{d\bar{E}(\tau)}{d\tau} = \frac{(1 + k_0^2)^2 (k_0 - S\tau)}{[1 + (k_0 - S\tau)^2]^{3/2}}, \quad (44)$$

где для удобства численного анализа введен новый параметр $k_0 = k_z(0)/k_x$.

С помощью уравнений (43) и (44) можно определить выражение для инкремента (декремента) сдвиговой неустойчивости, $\Gamma(\tau) = (1/\bar{E}(\tau))d\bar{E}(\tau)/d\tau$, в бездиссипативной ионосфере:

$$\Gamma(\tau) = \frac{k_0 - S\tau}{1 + (k_0 - S\tau)^2}. \quad (45)$$

Эволюция безразмерной нормированной плотности энергии ПФГ (43) и инкремента сдвиговой неустойчивости (45) представлены на рисунках 1, 2. В начальной стадии эволюции при $k_0 = k_z(0)/k_x > 0$ (когда $k_z(\tau) > 0$) с течением времени τ , $0 < \tau < \tau^* = k_z(0)/(Sk_x) = 100$, уменьшается знаменатель выражения (43) и, соответственно, плотность энергии ПФГ увеличивается монотонно и достигает своего максимального значения (превосходящего на порядок свое начальное значение) в момент времени $\tau = \tau^* = 100$. Далее, при $\tau^* < \tau < \infty$ плотность

энергии начинает уменьшаться (когда $k_z(\tau) < 0$) и монотонно возвращается приблизительно к своему начальному постоянному значению (рис. 1). Иными словами, в начальной стадии эволюции, когда $k_z(\tau) > 0$ и ПФГ возмущений находятся в области усиления в пространстве волновых чисел, возмущение черпает энергию сдвигового течения и увеличивает свою амплитуду и энергию на порядок в течение промежутка времени $0 < \tau < \tau^* = k_z(0)/(Sk_x) = 100$; далее (если только до этого не подключатся нелинейные процессы и не разорвется самоорганизация волновых структур), когда $k_z(\tau) < 0$, ПФГ возмущений попадают в область затухания в пространстве волновых чисел и возмущение обратно возвращает энергию сдвиговому потоку в течение времени $\tau^* < \tau < \infty$ (рис. 1, 2). Такое перераспределение энергии в среде со сдвиговым течением обусловлено тем, что волновой вектор возмущения становится функцией времени $k = k(\tau)$, т.е. происходит дробление масштабов возмущений и структуры соизмеримых масштабов эффективно взаимодействуют и перераспределяют свободную энергию системы между собой. При учете индукционного и вязкостного затухания (см. уравнение (28)) уменьшение энергии возмущения в промежутке времени $\tau^* < \tau < \infty$ происходит более интенсивно, чем это видно из рис. 1, кривая затухания в области $\tau^* < \tau < \infty$ становится более несимметричной (правая часть кривой становится более крутой) и часть энергии сдвигового течения передается среде в виде тепла.

Таким образом, даже в устойчиво статифицированной ионосфере ($\omega_g^2 > 0$) в течение временного интервала $0 < t^* \approx 62.5/(\omega_g) \sim 6 \times 10^3$ сек ~ 2 часа ВГВ интенсивно черпают энергию сдвигового те-

чения и на порядок увеличивают свою энергию и амплитуду. Соответственно, интенсифицируется волновая активность в данном регионе ионосферы за счет энергии сдвигового потока (неоднородного ветра).

3. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ И ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной статье изучены линейная стадия генерации и дальнейшая эволюция ВГВ в диссипативной устойчиво стратифицированной ($\omega_g^2 > 0$) ионосфере в присутствии сдвигового течения (неоднородного зонального ветра). На основе аналитического решения и теоретического анализа соответствующей системы динамических уравнений выявлены новый линейный механизм перекачки энергии сдвигового течения в энергию волновых возмущений, усиления волн (на порядок), и преращения энергии возмущений в тепло.

Волны эффективно взаимодействуют с локальным фоновым неоднородным зональным ветром и самподдерживаются за счет энергии сдвигового потока в ионосфере.

Линейное усиление ВГВ возмущений происходит не экспоненциально, как это имеет место для акустико-гравитационных волн (АГВ) в инверсно-неустойчиво стратифицированной ($\omega_g^2 < 0$, когда ВГВ не могут возбуждаться) атмосфере [Абурджания, 1996], а алгебраически-степенным образом. Интенсификация ВГВ становится возможной для определенных значений параметров среды, сдвига и волн, которые образуют дополнительный путь нагрева сдвигового течения в ионосфере: волны черпают энергию сдвигового течения через линейный дрейф ПФГ в пространстве волновых чисел (дробление масштабов возмущений) и перекачивают энергию в область мелко-масштабных возмущений, т.е. в область затухания. Наконец, процесс является перманентным и может привести к заметному нагреву среды, диссипативные процессы преобразуют эту энергию в тепло. Причем интенсивность нагрева определяется уровнем начального возмущения и параметров сдвигового течения.

Замечательной особенностью сдвигового течения является зависимость частоты и волнового числа возмущения от времени $k_z = k_z(0) - k_x S \tau$, $k(\tau) = (k_x^2 + k_z^2(\tau))^{1/2}$. В частности, увеличение частоты и волнового числа со временем приводит к уменьшению масштабов волновых возмущений в линейном режиме и, соответственно, перекачке энергии в короткие масштабы — в область диссипации. С другой стороны, существенное изменение диапазона частот генерируемых возмущений обуславливает в среде формирование широкого

диапазона спектральной линии возмущений, которые не связаны сильно турбулентными эффектами. Причем, усиление ПФГ возмущений и уширение спектра волновых мод происходят в ограниченный промежуток времени (транзиентно), пока выполняются соответствующие условия усиления и достаточно сильной взаимосвязи мод.

Следует подчеркнуть, что выявление механизма интенсификации и уширение спектра возмущений стало возможным в рамках немодального исчисления (эти процессы упускались из виду при более традиционном модальном подходе). Тем самым немодальный подход, учитывающий неортогональность собственных функций задач линейной волновой динамики, оказался более адекватным математическим языком для исследования линейной стадии волновых процессов в сдвиговых течениях.

Частота исследуемых нами ВГВ возмущений изменяется в пределах $6 \times 10^{-4} \text{ с}^{-1} < \omega_0 < 2 \times 10^{-2} \text{ с}^{-1}$ и охватывает ультра-низкочастотный диапазон АГВ. Длина волн представляет $\lambda \sim 100 \text{ м} - 10 \text{ км}$, период — $T \sim 5 \text{ минут} - 3 \text{ часа}$, и они перемещаются со скоростью (0.1–200) м/с в произвольном направлении вдоль горизонтали, в зависимости от дневных и ночных условий.

Относительно низкочастотные ВГВ являются собственными степенями свободы атмосферно-ионосферного резонатора. Поэтому, при внешних воздействиях на ионосферу сверху или снизу (магнитные буры, землетрясение, взрывы и др.) [Testud, 1970; Hayakawa, 1999; Pokhotelov et al., 1995; Дробжев и др., 1986] в первую очередь возбуждаются (или интенсифицируются) эти моды [Абурджания, 1996]. Так что эти волны могут также быть откликом ионосферы на естественную и искусственную активности.

Предложенные исследования были выполнены при поддержке седьмой европейской рамочной программы [FP7/2007–2013] по грантовому соглашению № 269198 — Геоплазма (международная схема обмена научных сотрудников им. Марии Кюри) и гранта № 31/14 Национального научного фонда Шота Руставели.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Абурджания Г.Д., Харшиладзе О.А., Чаргазия Х.З. Линейный механизм генерации и интенсификации внутренних гравитационных волн в ионосфере при их взаимодействии с неоднородным зональным ветром. 1. Модель среды и исходные динамические уравнения // Геомагнетизм и аэрономия. Т. 53. № 3. С. 2013 г.
- Абурджания Г.Д. Самоорганизация акустико-гравитационных вихрей в ионосфере перед землетрясением // Физика плазмы. Т. 22. № 10. С. 954–959. 1996.

- *Гершман Б.Н.* Динамика ионосферной плазмы. М.: Наука, 1974.
- *Голицын Г.С.* Затухание малых колебаний в атмосфере благодаря вязкости и теплопроводности // Изв. АН СССР, Физ. атмосфер. и океана. Т. 1. № 2. С. 136–149. 1965.
- *Госсард Э., Хук У.* Волны в атмосфере, М.: Мир, 1978.
- *Дробжнев В.И., Молотов Г.Ф., Рудина М.П. и др.* Отклик ионосферы на возмущения, инициированные промышленным взрывом // Ионосферные исслед. № 39. С. 61–71. 1986.
- *Казимировский Э.С., Кокоуров В.Д.* Движения в ионосфере. Новосибирск: Наука, 1979.
- *Зельдович Я.Б., Мышкис А.Д.* Элементы прикладной математики. М.: Наука, 1972.
- *Магнус К.* Колебания. М.: Мир, 1982.
- *Маргетройд Р.* Ветры в мезосфере и нижней термосфере / В кн.: Ветер в ионосфере. Л.: Гидрометиздат, 1969.
- *Михайловский А.Б.* Теория плазменных неустойчивостей. Т. 2. М.: Атомиздат, 1977.
- *Педлоски Дж.* Геофизическая гидродинамика. Т. 1. М.: Мир, 1984.
- *Aburjania G.D., Chargazia Kh.Z., Khantadze A.G., Kharshiladze O.A.* Mechanism of the planetary Rossby wave energy amplification and transformation in the ionosphere with an inhomogeneous zonal smooth shear wind // J. Geophys. Res. V. 111. A09304. Doi: 10.1029/2005JA011567. 2006.
- *Chagelishvili G.D., Rogava A.D., Tsiklauri D.G.* Effect of coupling and linear transformation of Waves in shear flow // Phys. Rev. E. V. 53. № 6. P. 6028–6031. 1996.
- *Graik A.D., Criminale W.O.* Evolution of wavelike disturbances in shear flow: a class of exact solutions of the Navier-Stokes equations // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. V. 406. P. 13–21. 1986.
- *Hayakawa M.* (Edit). Atmospheric and Ionospheric Electromagnetic Phenomena Associated with Earthquakes. Terra Sci. Tokyo, 1999.
- *Hines C.O.* Internal atmospheric gravity waves at ionospheric heights // Canad. J. Phys. V. 38. № 11. P. 1441–1481. 1960.
- *Mayr H.G., Harris I., Herrero F.A. et al.* Thermospheric gravity waves: observations and interpretation using the transfer function model (TFM) // Space Sci. Rev. V. 54. P. 297–375. 1990.
- *Pokhotelov O.A., Parrot M., Fedorov E.N. et al.* Response of the ionosphere to natural and man-made acoustic sources // Ann. Geophys. V. 13. P. 1197–1210. 1995.
- *Reddy S.C., Schmid P.J., Hennigson D.S.* Pseudospectra of the Orr-Sommerfeld operator // SIAM. J. Appl. Math. V. 53. P. 15–23. 1993.
- *Stenflo L., Stepaniants Yu.A.* Acoustic-gravity modons in the atmosphere // Ann. Geophys. V. 13. P. 973–975. 1995.
- *Testud J.* Gravity wave generated during magnetic substorms // J. Atmos. Terr. Phys. V. 32. P. 1793–1805. 1970.
- *Trefethen L.N., Trefethen A.E., Reddy S.C., Driscoll T.A.* Hydrodynamic stability without eigenvalues // Science. V. 261. P. 578–584. 1993.