

УДК 550.385.37

ГЛОБАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ БАЛЛОННОЙ МОДЫ В ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

© 2013 г. Н. Г. Мазур¹, Е. Н. Федоров¹, В. А. Пилипенко^{1,2}

¹Институт физики Земли РАН, г. Москва

²Институт космических исследований РАН, г. Москва

e-mail: pilipenko_va@mail.ru

Поступила в редакцию 12.06.2011 г.

После доработки 16.09.2011 г.

Баллонные возмущения в плазме конечного давления, находящейся в криволинейном магнитном поле, описываются системой зацепленных уравнений для альвеновской и медленной магнитозвуковой мод. В отличие от большинства предшествующих работ, посвященных локальному анализу устойчивости коротковолновых возмущений с помощью дисперсионного соотношения, в данной работе проводится глобальный анализ за пределами приближения ВКБ, но в рамках простой цилиндрической геометрии, когда силовые линии магнитного поля — окружности, кривизна которых постоянна. Несмотря на относительную простоту этой модели, она сохраняет все особенности, необходимые для образования баллонной моды: кривизну поля и неоднородное тепловое давление плазмы. Учет конечного размера возмущения в радиальном направлении приводит к повышению порога неустойчивости по сравнению с приближением ВКБ. Используемая в данной работе упрощенная модель позволила рассмотреть картину неустойчивых возмущений при произвольных значениях азимутального волнового числа k_z . Неустойчивыми могут оказаться и азимутально крупномасштабные возмущения, хотя инкремент растет с уменьшением азимутального масштаба и достигает насыщения при масштабах порядка размера неоднородности давления.

DOI: 10.7868/S0016794013030139

1. ВВЕДЕНИЕ: БАЛЛОННЫЕ МОДЫ И ИХ УСТОЙЧИВОСТЬ В ОКОЛОЗЕМНОЙ ПЛАЗМЕ

Ключевая дилемма физики околоземного пространства связана с определением механизма взрывного начала суббури: в хвосте магнитосферы вследствие магнитного пересоединения или на замкнутых силовых линиях в результате пока не отождествленной неустойчивости? В качестве возможного триггера взрывной фазы суббури часто рассматривается баллонная (ballooning) неустойчивость [Miura et al., 1989; Nameiri et al., 1991; Cheremnykh et al., 2004; Agaritov et al., 2007], представляющая собой локальный “выброс” горячей плазмы в хвост магнитосферы. В реальной магнитосфере эти два механизма, по-видимому, связаны между собой. Так, численные эксперименты с современными МГД моделями магнитосферы показывают, что процесс развития суббури начинается с нарушения баланса между тепловым давлением плазмы и силой Ампера, что приводит к выбросу плазмы в хвост магнитосферы и вытягиванию силовых линий [Raeder et al., 2010]. В результате уменьшение нормальной к токовому слою магнитной компоненты в хвосте магнитосферы приводит к дестабилизации разрывной неустойчивости (tearing) и пересоединению силовых линий. Таким образом, хотя основная энергия суб-

бури высвобождается в результате пересоединения, триггером начала суббури оказывается баллонная неустойчивость. Чтобы яснее понять, каковы возможные физические механизмы развития суббури, результаты численного моделирования и прямых спутниковых наблюдений необходимо сопоставлять с упрощенными, но наглядными, теоретическими моделями.

Теоретические работы по баллонной неустойчивости основываются на системе зацепленных уравнений для полоидальных альвеновских волн и медленных магнитозвуковых (ММЗ) волн в плазме конечного давления, находящейся в криволинейном магнитном поле **В**. Благоприятные условия для развития неустойчивости создаются при резком спадании к периферии системы давления плазмы, удерживаемой искривленными силовыми линиями.

Наглядный анализ устойчивости плазмы и спектральных свойств низкочастотных волновых явлений можно провести с помощью локального дисперсионного соотношения [Ohtani and Tamao, 1993; Liu et al., 1995; Golovchanskaya and Mal'tsev, 2005; Golovchanskaya and Mingalev, 2006]. Детальный вывод дисперсионного соотношения из исходной системы уравнений для зацепленных МГД мод и переход к различным предельным случаям дан в нашей работе [Мазур и др., 2012]. Было

показано, что баллонная неустойчивость развивается на медленной (ММЗ типа) ветви колебаний, а альвеновская ветвь всегда устойчива, вопреки предсказаниям [Miura et al., 1989]. В то же время на частотах ниже частоты отсечки возможно возникновение области нераспространения для полоидальных альвеновских волн [Mager et al., 2009].

Критерии неустойчивости во всех предшествующих работах в локальном приближении на отдельной магнитной оболочке имеют качественный характер из-за использования приближения ВКБ при выводе соответствующих дисперсионных уравнений. В реальной ситуации неустойчивая мода имеет конечный размер поперек магнитных оболочек. Кроме того, неустойчивости благоприятствуют резкие радиальные градиенты давления плазмы, вблизи которых ВКБ-приближение заведомо неприменимо. Влияние же радиальной структуры возмущения на условия неустойчивости ранее не рассматривалось ввиду сложности задачи.

Характерное время развития взрывной фазы суббури (~1–2 мин) гораздо меньше, чем время альвеновского пробега вдоль вытянутых в хвост силовых линий до ионосферы (~10 мин). Поэтому мы пренебрегаем влиянием краевых ионосферных условий на свойства баллонных возмущений, предполагая, что нарастающие возмущения локализованы вдоль силовых линий в приэкваториальной области ночной магнитосферы. Рассмотрение баллонной моды с учетом ионосферных условий проводилось в многочисленных работах, например [Черемных и Парновский, 2004].

В данной работе нами рассматривается вопрос о глобальной неустойчивости с использованием сильно упрощенной геометрии магнитного поля, которая позволяет сравнительно просто получить точное решение спектральной задачи: цилиндрическое магнитное поле с силовыми линиями постоянной кривизны. Разумеется, рассматриваемая конфигурация далека от реальной геометрии, но поскольку продольная структура возмущений нами не анализируется, а основное внимание уделяется радиальной структуре, то выбор такой модели представляется оправданным. При этом такая упрощенная модель сохраняет все особенности, необходимые для возникновения баллонной неустойчивости: наличие кривизны магнитного поля и градиента давления плазмы. Эту модель можно рассматривать как элемент более общей конфигурации, непосредственно в области сильно вытянутых в хвост магнитных силовых линий в приэкваториальной области (рис. 1а).

Предлагаемая модель позволяет понять качественные особенности баллонной моды и уточнить теоретические представления о развитии суббури с точки зрения внутренней неустойчивости магнитосферной горячей плазмы.

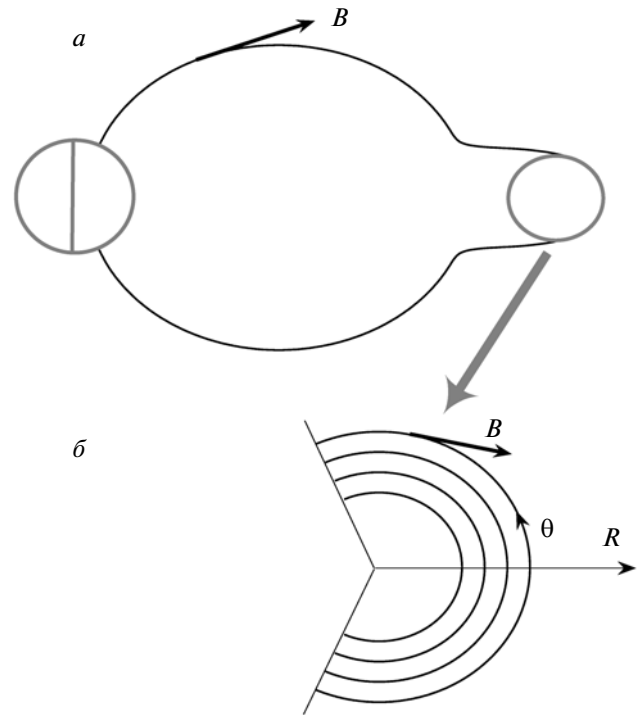


Рис. 1. Качественный вид рассматриваемой модели магнитного поля; R и θ – цилиндрические координаты.

2. РАВНОВЕСНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПЛАЗМЫ И МАГНИТНОГО ПОЛЯ

В отличие от большинства предшествующих теоретических работ, где проводился локальный анализ МГД устойчивости коротковолновых возмущений, здесь ставится задача о глобальном анализе, но в рамках простой цилиндрической геометрии, когда переменные разделяются. Рассмотрим конфигурацию, в которой постоянное магнитное поле создается сторонним линейным током $\mathbf{j}_0 = I_0 \delta(x) \delta(z) \hat{y}$, а давление и плотность плазмы в данной точке зависят только от ее расстояния до оси y (рис. 1б). Тогда система обладает симметрией прямого кругового цилиндра, ось которого направлена вдоль координаты y , соответствующей азимутальному направлению в магнитосфере. Силовые линии имеют постоянную кривизну и могут быть ограничены плоскостями (ионосферами или резкой продольной неоднородностью системы). Такая модель успешно применялась для описания МГД колебаний магнитосферы [Radosky, 1974; Allan et al., 1986].

Предположим, что газокINETическое давление P имеет некоторый фоновый уровень вдали от неоднородности плазмы: $P \rightarrow P_\infty$ при $R \rightarrow \infty$. Рассмотрим конкретную модель распределения давления

$$P(R) = P_0(1 - ths + h), \quad (1)$$

где $s = (R - R_0)L^{-1}$ – нормированное радиальное расстояние, R_0 – координата максимума градиента плазмы, $h = P_\infty/P_0$ – фоновое давление, нормированное на характерное (среднее) давление плазмы. Давление плазмы меняется на величину $2P_0$ на радиальном масштабе L . Градиент давления плазмы $\partial_R P = -P_0 L^{-1} (chs)^{-2}$, при этом относительный градиент $\kappa_P = \partial_R P/P = -L^{-1} (chs)^{-2} (1 - ths + h)^{-1}$. Распределение плотности предполагается однородным, $\rho(R) = \text{const}$, что, конечно, далеко от действительности, но при изучении локализованных собственных функций вполне допустимо.

Локальное условие равновесия плазмы в магнитном поле в случае цилиндрической геометрии сводится к уравнению

$$\partial_R B^2 + 2R^{-1} B^2 = -2\mu_0 \partial_R P.$$

Решение этого уравнения с $B(R_0) = B_0$ для модели распределения давления (1) имеет вид

$$B^2(R) = B_0^2 (R_0/R)^2 \times [1 + \beta_0 (ths + 2(L/R_0)F_1(s) + (L/R_0)^2 F_2(s))],$$

где $\beta_0 = \beta(R_0)$, и $F_m(s) = \int_0^s \sigma^m (ch\sigma)^{-2} d\sigma$.

3. ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДЛЯ МГД ВОЗМУЩЕНИЙ

Пространственно-временная структура возмущения представляется в виде гармоники $\exp(-i\omega t + ik_y y + iv\theta)$, где θ – угол, отсчитываемый от экваториальной плоскости вдоль силовой линии. Параметр v определяет продольное волновое число $k_{||} = vR^{-1}$. Структура возмущения в азимутальном направлении характеризуется волновым числом k_y . В радиальном направлении (координата R) структура возмущения определяется из решения нижеследующих уравнений.

Общая линеаризованная система уравнений МГД для плазмы конечного давления ($\beta = 2\mu_0 P B^{-2} \neq 0$), находящейся в поле \mathbf{B} с силовыми линиями постоянной кривизны, сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений (см. Приложение 1)

$$\begin{aligned} \partial_R q &= a_{11} q + a_{12} \xi, \\ \partial_R \xi &= a_{21} q + a_{22} \xi, \end{aligned} \quad (2)$$

для радиальной компоненты $\xi = \xi_R$ смещения плазмы ξ и нормированного возмущения полного давления $q = \mu_0 B^{-2} (p + B b_{||} / \mu_0)$. Здесь $b_{||} = b_\theta$ – компонента сжатия магнитного поля (compressional) и p – возмущение давления плазмы.

Система (2) описывает зацепленные альвеновскую, БМЗ и ММЗ моды, так как при ее выводе не проводится предельный переход к полоидальному пределу $k_y \rightarrow \infty$. Коэффициенты этой системы имеют вид:

$$\begin{aligned} a_{11} &= \beta \kappa_P + 2R^{-1} k_A^2 L_c^{-1}, \\ a_{12} &= L_A - 4R^{-2} k_A^2 L_c^{-1} - R^{-1} \beta \kappa_P, \\ a_{21} &= k_y^2 L_A^{-1} + k_A^2 L_c^{-1} - 1, \\ a_{22} &= R^{-1} (1 - 2k_A^2 L_c^{-1}). \end{aligned} \quad (3)$$

Здесь введены характерные скорости и волновые числа: $V_A = B(\mu_0 \rho)^{-1/2}$ – альвеновская скорость, $k_A = \omega V_A^{-1}$ – альвеновское волновое число, $V_s = (\gamma P/\rho)^{1/2}$ – скорость звука, $V_c = V_A V_s (V_A^2 + V_s^2)^{-1/2}$ – “касповая” скорость, $k_c = \omega/V_c$. Кроме того, характерные операторы свелись в цилиндрической геометрии к алгебраическим выражениям: $L_A = k_A^2 - v^2 R^{-2}$, $L_c = k_c^2 - v^2 R^{-2} = k_A^2 [1 + 2(\gamma\beta)^{-1}] - v^2 R^{-2}$. Анизотропией давления плазмы пренебрегаем (т.е. $P_{||} = P_{\perp}$), поэтому в данном рассмотрении не будут фигурировать зеркальная и шланговая моды, связанные с конечной анизотропией плазмы [Cheng and Qian, 1994; Pokhotelov et al., 2003].

В коэффициенты системы (2) явно входят три функции: $V_A^2(R)$, $\kappa_P(R)$ и $\beta(R)$, зависящие от четырех параметров R_0 , L , h и β_0 (κ_P не зависит от β_0). На рис. 2 показана радиальная зависимость этих функций при разной резкости спада давления $P(R)$, т.е. для нескольких значений отношения L/R_0 . Отметим, что при достаточно крутом профиле давления распределение альвеновской скорости $V_A^2(R)$, становится немонотонным (при $L/R_0 < 0.5$ для приведенного на рисунке примера). Параметр β_0 , варьирующийся в пределах 0–1, глобально характеризует “нагретость” плазмы: его увеличение приводит к подъему профиля $\beta(R)$. При этом для крутых профилей давления значениям $\beta_0 \approx 1$ могут соответствовать высокие пиковые значения $\beta(R)$: например, $\max \beta(R) \sim 10$ при $\beta_0 = 0.95$ и $L/R_0 = 0.1$. Как и укручение профиля давления, рост β_0 приводит к образованию “ям” в распределении $V_A^2(R)$.

Приведем стандартным образом систему (2) к уравнению 2-го порядка в нормальной форме, что позволит получить более наглядное представление о поведении решений. При исключении q из системы (2) получается уравнение второго порядка $\partial_{RR} \xi - f \partial_R \xi + g \xi = 0$, где

$$f = a_{11} + a_{22} + a_{21}^{-1} \partial_R a_{21}, \quad (4)$$

$$g = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21} + a_{22} a_{21}^{-1} \partial_R a_{21} - \partial_R a_{22}.$$

Далее с помощью замены

$$\xi(R) = U(R) \exp\left(\frac{1}{2} \int^R f(R') dR'\right), \quad (5)$$

приходим к уравнению

$$\partial_{RR} U + I(R)U = 0 \quad (I = g + \frac{1}{2} \partial_R f - \frac{1}{4} f^2). \quad (6)$$

Функция $I(R)$ играет роль квадрата локального радиального волнового числа: $I(R) = k_R^2(R)$.

Для оценки поведения решений уравнения (6) при $R \rightarrow \infty$ надо знать асимптотику функции $I(R)$. Она имеет вид

$$I(R) = -k_y^2 + 2\omega^2(\gamma\beta_0 h V_{A0}^2)^{-1} + O(R^{-2}), \quad (7)$$

где $V_{A0} = V_A(R_0)$. Видно, что при $\omega^2 < \gamma\beta_0 h k_y^2 V_{A0}^2 / 2$ предел $I(R)$ при $R \rightarrow \infty$ отрицателен. Это значит, что для таких ω^2 мы имеем дело с комбинацией экспоненциально убывающего и экспоненциально растущего при $R \rightarrow \infty$ решений.

В соотношении (5) подынтегральная функция $f(R) = R^{-1} + O(R^{-3})$ при $R \rightarrow \infty$. Поэтому $\xi(R) = \sqrt{R} H(R) U(R)$, где функция $H(R)$ ограничена при $R \rightarrow \infty$. Таким образом, из экспоненциального роста или убывания $U(R)$ следует, соответственно, экспоненциальный рост или убывание $\xi(R)$.

4. КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИНКРЕМЕНТА НЕУСТОЙЧИВОСТИ

Рассмотрим для системы уравнений (2) краевую задачу с условиями $\xi(a) = 0$ ($0 < a < R_0$) и ограниченности $\xi(R)$ на всей полуоси $R > a$.

При анализе устойчивости мы ограничиваемся областью отрицательных значений параметра ω^2 . Если при некотором значении $\omega^2 < 0$ указанная краевая задача имеет ненулевое решение, то это решение назовем собственной функцией, а ω^2 — соответствующим ей собственным значением. Собственные значения $\omega^2 < 0$ определяют инкременты $\Gamma = \text{Im} \omega$ нарастания амплитуд соответствующих собственных функций. В области $\omega^2 < 0$ рассматриваемая краевая задача либо не имеет решений, либо имеет дискретный спектр собственных значений ω_n^2 , $n = 1, 2, \dots$. Это вытекает, с учетом замечания в конце предыдущего раздела о связи поведения решений системы (2) и уравнения (6), из следующих двух свойств уравнения (6):

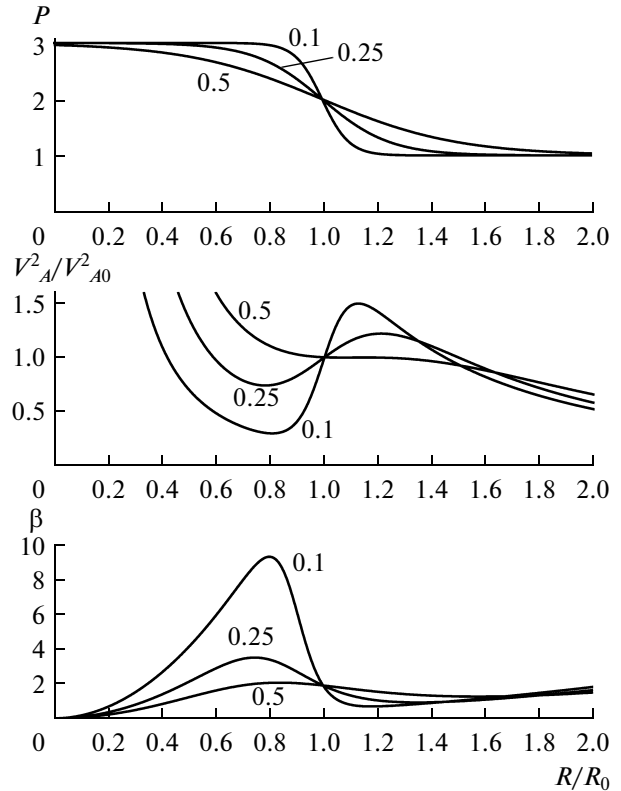


Рис. 2. Зависимость радиальной структуры функций $P(R)$, $V_A^2(R)$ и $\beta(R)$ от характерного пространственного масштаба изменения давления L . Значения отношения L/R_0 проставлены около кривых. При расчете принято $\beta_0 = 0.95$ и $h = 1$

1. Любое решение уравнения (6) представляет собой при $R \rightarrow \infty$ линейную комбинацию растущей и убывающей экспонент. Это — прямое следствие асимптотики (7), согласно которой функция $I(R)$ стремится при $R \rightarrow \infty$ к отрицательному пределу, если $\omega^2 < 0$.

2. Отличное от нуля ограниченное решение уравнения (6) с условием $U(a) = 0$ (которое эквивалентно условию $\xi(a) = 0$) существует, если $I(R) > 0$ в достаточно длинном интервале правее точки a .

Решающую роль для существования дискретного спектра и его расположения играет зависимость локального волнового числа $I(R) = k_R^2(R)$ от спектрального параметра ω^2 . Определяющие функцию $I(R; \omega^2)$ формулы (6), (4) и (3) вместе с выражениями для входящих в них пространственных распределений $V_A^2(R)$, $\kappa_p(R)$ и $\beta(R)$ в совокупности весьма громоздки. Мы исследуем свойства этой функции с помощью численного расчета.

Типичный пример зависимости $I(R; \omega^2)$ для случая, когда можно ожидать существования дискретного спектра, приведен на рис. 3. При боль-

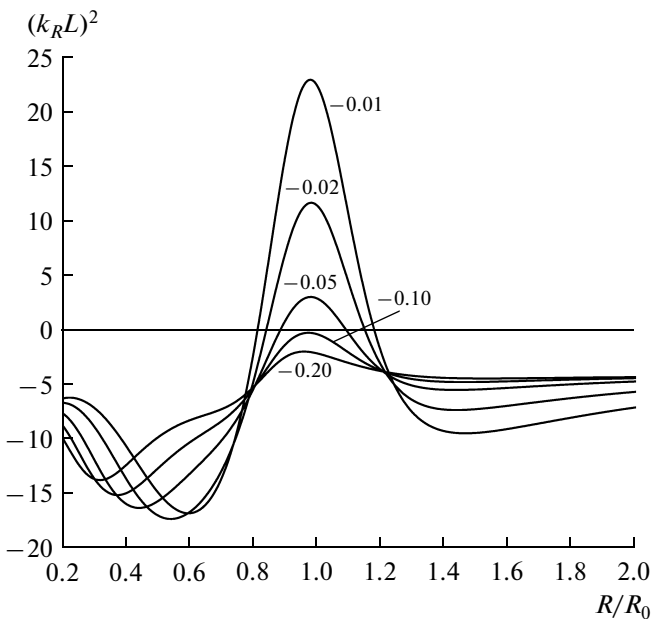


Рис. 3. Квадрат локального волнового числа $k_R^2(R; \Omega^2)$ (нормированный на L) для разных значений Ω^2 , которые проставлены около кривых. При расчетах приняты значения $\beta_0 = 0.95, h = 1, L/R_0 = 1/6, \nu = 0.5$ и $k_y = 2$.

ших по абсолютной величине отрицательных значениях ω^2 функция $I(R) < 0$ для всех $R > 0$, поэтому ограниченных решений, удовлетворяющих краевому условию задачи, не существует. По мере роста ω^2 и приближения его к нулю максимум функции $I(R)$ поднимается выше нуля и появляется интервал, где $I(R) > 0$. При таких ω^2 становится возможным существование собственных функций дискретного спектра.

Сравнивая для разных значений инкремента Γ длину области ΔR на оси R , где $I(R) > 0$, т.е. где собственная функция имеет осциллирующий характер и заметно отличается от нуля, видим, что область локализации возмущения несколько расширяется с ростом инкремента: от $\Delta R/R_0 \sim 0.2$ при $\Gamma^2 = 0.01$ до $\Delta R/R_0 \sim 0.4$ при $\Gamma^2 = 0.05$.

5. ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРА

Проведенный выше качественный анализ зависимости локального волнового числа $I(R) = k_R^2(R)$ от параметра ω^2 описывает условия, при которых можно ожидать появления дискретного спектра в области $\omega^2 < 0$ (т.е. неустойчивости). Ниже приводятся результаты численного расчета дискретного спектра и изучается его зависимость от параметров задачи. Численный поиск собственных значений в случае $\omega^2 < 0$ облегчается тем, что особен-

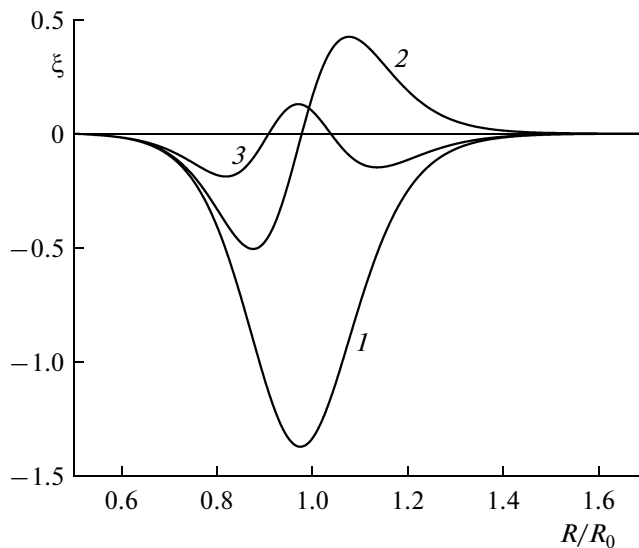


Рис. 4. Компонента ξ собственных функций дискретного спектра. При расчетах приняты значения $\beta_0 = 0.95, L/R_0 = 1/6, k_y = 2, \nu = 1$ и $h = 1$. Для этого набора параметров спектр состоит из трех собственных значений Ω_1^2, Ω_2^2 и Ω_3^2 , номера которых проставлены у кривых.

ности коэффициентов системы (2) уходят с действительной оси.

Вычисление собственных значений основано на том, что асимптотика любого решения системы (2) при $R \rightarrow \infty$ представляет собой комбинацию растущей и убывающей экспонент. Если при некотором ω^2 коэффициент при растущей экспоненте обращается в нуль, то мы имеем собственную функцию, экспоненциально убывающую при $R \rightarrow \infty$. Поэтому точки дискретного спектра находятся как точки перемены знака функции $\sigma(\omega^2) = \lim_{R \rightarrow \infty} \text{sign} \xi(R; \omega^2)$.

Область параметров, при которых возможна неустойчивость, определяется существованием дискретных собственных значений $\omega_n^2 < 0$ (n – номер гармоники). Спектр ω_n^2 состоит при $\nu \neq 0$ из конечного числа собственных значений, а при $\nu = 0$ – из бесконечного числа собственных значений, сгущающихся к нулю. На рис. 4 показана пространственная структура собственных функций на примере компоненты $\xi(R)$. Для использованного при расчетах набора параметров весь спектр состоит из трех собственных значений $\Omega_1^2 = -0.04167$ (основная мода), $\Omega_2^2 = -0.01252$ (вторая гармоника) и $\Omega_3^2 = -0.002715$. При расчетах принята нормировка

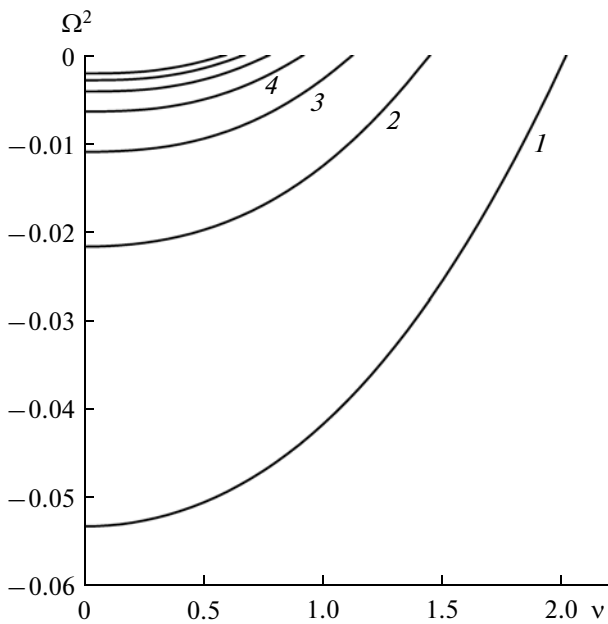


Рис. 5. Зависимость дискретного спектра Ω^2 от параметра ν . При расчетах приняты значения $\beta_0 = 0.95$, $h = 1$, $L/R_0 = 1/6$ и $k_y = 2$. Цифры у кривых обозначают номер радиальной гармоники.

частоты ω на характерную альвеновскую частоту: $\Omega = \omega L/V_{A0}$.

Отметим, что зависимость собственных значений от положения границы $R_{\min} = a$ довольно сла-

бая. При смещении точки a влево от области градиента давления дискретный спектр и собственные функции очень быстро перестают зависеть от a .

6. ЗАВИСИМОСТЬ ДИСКРЕТНОГО СПЕКТРА ОТ ПАРАМЕТРОВ

Изучим зависимость нескольких низших собственных значений ω_n^2 (инкрементов неустойчивости) от параметра “нагретости плазмы” β_0 и параметров k_y и ν , определяющих пространственную структуру собственных колебаний системы.

Зависимость спектра от ν при заданных значениях остальных параметров представлена на рис. 5. Отметим, что случай $\nu = 0$ – вырожденный; только при $\nu = 0$ множество собственных значений бесконечно и имеет точку сгущения $\omega^2 = 0$, а при $\nu \neq 0$ это множество становится конечным. По мере роста ν собственные значения поднимаются вверх и одно за другим исчезают, достигнув нулевого уровня (порог неустойчивости). Позже всех при некотором $\nu = \nu_0$ исчезает основная мода, и мы попадаем в область устойчивости $\nu > \nu_0$. Причина этого понятна: $\nu = k_{\parallel} R$, т.е. параметр ν есть отношение продольного волнового числа к кривизне силовой линии, а выпрямление силовых линий ведет к устойчивости.

На рисунке 6а представлена зависимость спектра от параметра β_0 , характеризующего давление

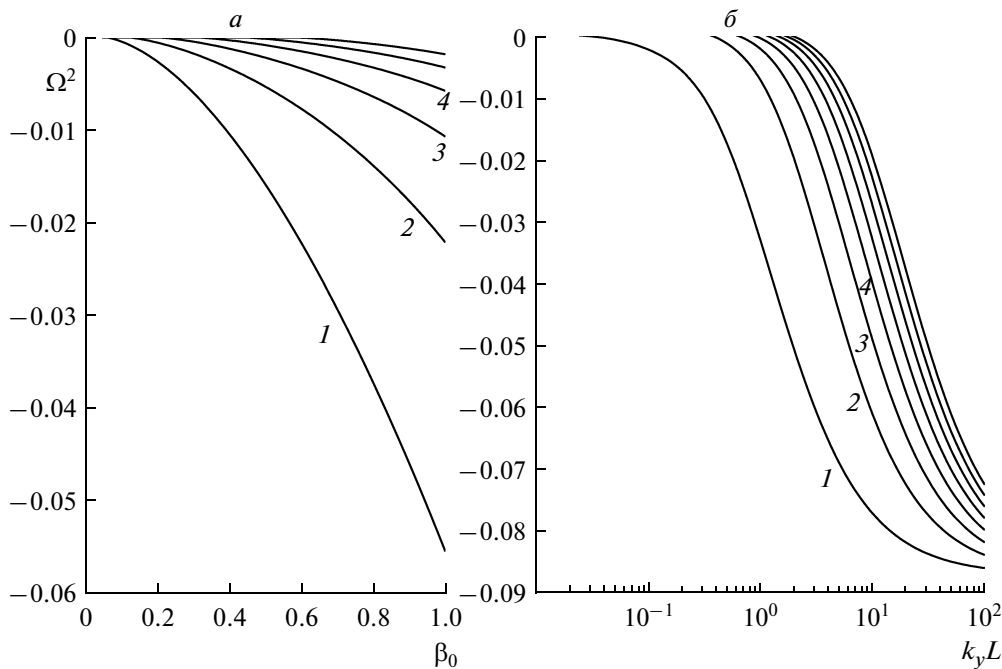


Рис. 6. Зависимость дискретного спектра Ω^2 от параметра β_0 при $k_y = 2$ (слева) и от параметра k_y при $\beta_0 = 0.95$ (справа). При расчетах приняты значения $h = 1$, $L/R_0 = 1/6$ и $\nu = 0.5$. Цифры у кривых обозначают номер радиальной гармоники.

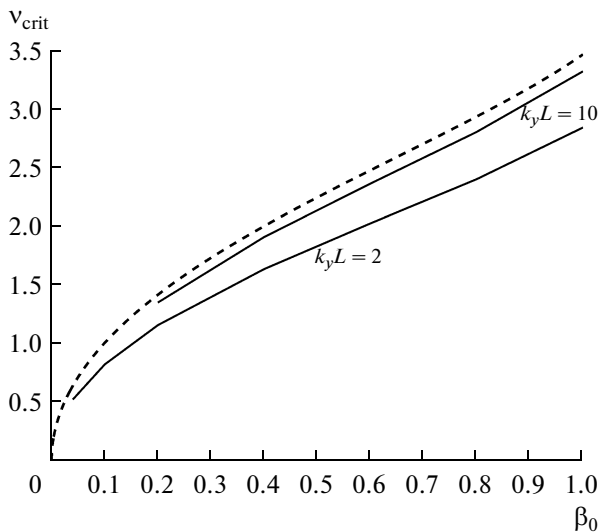


Рис. 7. Сравнение порогов неустойчивости, полученных для точного численного решения (сплошная линия), и из дисперсионного уравнения в ВКБ-приближении (штриховая линия).

плазмы, для $v \neq 0$. В пределе $\beta_0 \rightarrow 0$ спектр ω_n^2 заведомо исчезает. При $v \neq 0$ существует пороговое значение $\beta_0^{(0)}(v)$, ниже которого плазма устойчива относительно возмущений с таким v . После превышения порога инкремент неустойчивости растет с увеличением β_0 .

На рисунке 6б показана зависимость собственных значений ω_n^2 от азимутального волнового числа k_y , при $v = 0.5$. Использованная точная модель позволила рассмотреть картину возмущений при произвольных k_y . Это рассмотрение показывает, что порог неустойчивости по величине k_y очень низкий, и основная гармоника может возбуждаться даже при малых k_y . Более высокие гармоники имеют заметный порог по k_y . Инкремент неустойчивости быстро растет с увеличением k_y в области $k_y L \lesssim 1$, а при $k_y L \gg 1$ медленно приближается к предельному значению.

В локальном ВКБ-приближении для азимутально-мелкомасштабных возмущений ($k_y \rightarrow \infty$) критерий неустойчивости [Liu, 1997] в цилиндрической геометрии, когда $k_{\parallel} = vR^{-1}$, сводится к неравенству

$$-\beta k_p R > v^2. \quad (8)$$

На рисунке 7 дано сравнение порога неустойчивости, соответствующего условию (8), и порога неустойчивости для точного численного решения. Штриховой линией показана величина $M(\beta_0) = \max_R[-R\beta(R; \beta_0)k_p(R)]$. Для возмущений с $v^2 > M(\beta_0)$ система локально устойчива во всем

пространстве, а при $v^2 < M(\beta_0)$ появляется область неустойчивости — интервал значений R , расширяющийся в обе стороны от точки максимума при уменьшении v . Сплошные линии показывают максимальное значение v , выше которого дискретный спектр в точной задаче отсутствует. Эта величина зависит от k_y и от h , и при $k_y \rightarrow \infty$ ее график приближается к штриховой линии (которая не зависит, естественно, ни от k_y , ни от h).

Приведенный график показывает, что при любом v порог по параметру β_0 для конечных по радиусу возмущений (сплошные линии) оказывается выше, чем для ВКБ-возмущений (штриховая линия). Таким образом, глобальный анализ указывает на более высокий порог неустойчивости, чем предсказано локальной теорией (8).

7. ОБСУЖДЕНИЕ: СОПОСТАВЛЕНИЕ С РЕЗУЛЬТАТАМИ МГД МОДЕЛИРОВАНИЯ И НАБЛЮДЕНИЯМИ

Благоприятные условия для развития баллонной неустойчивости возникают при сильно вытянутых в хвост магнитосферы силовых линиях перед началом взрывной фазы суббури [Zhu et al., 2009]. Локальное превышение порога баллонной неустойчивости приводит к вытягивающему силовым линиям выбросу плазмы наружу. Нарастание возмущения происходит аperiodически, хотя дрейфовые эффекты могут привести к осцилляторному росту возмущений и их сносу в азимутальном направлении со скоростью порядка скорости ларморовского дрейфа плазмы [Miura et al., 1989]. При этом в радиальном направлении нарастающие возмущения не распространяются, а локализованы в области градиента плазмы (стоячая волна). Радиальный размер основной моды возмущения имеет порядок характерного размера неоднородности давления плазмы. Наиболее низкий порог по параметру β_0 имеет фундаментальная радиальная мода, причём пороговое значение β_0 выше значений, даваемых локальным критерием. По графику на рис. 6 можно оценить величину линейного инкремента основной моды неустойчивости. В области масштабов $k_y L \gg 1$ инкремент $\Gamma \approx (V_A/L)\text{Im}\Omega \approx 0.03 \text{ с}^{-1}$ при $V_A = 500 \text{ км/с}$, $L = 0.8R_E$. Характерное время нарастания неустойчивости $\tau \approx \Gamma^{-1} \approx 30 \text{ с}$, что сопоставимо с наблюдаемыми временами развития взрывной фазы суббури.

подавляющее большинство результатов по баллонным возмущениям были получены в рамках редуцированных МГД уравнений в асимптотическом пределе $k_y/k_x \rightarrow \infty$. Действительно, развивающиеся при начале суббури возмущения представляют собой азимутально-локализованные “пальцы” аксиально расширяющейся плаз-

мы. Использованная в данной работе упрощенная модель плазмы в кривом поле с постоянной кривизной позволила рассмотреть картину возмущений при произвольных k_y . Это рассмотрение показало, что возможна дестабилизация и крупномасштабной в азимутальном направлении моды с $k_y L \ll 1$. Такая мода, названная модой $k_y=0$, действительно была неожиданно обнаружена при численном моделировании [Raeder et al., 2010]. Инкремент неустойчивости быстро растет с увеличением k_y в области $k_y L \lesssim 1$, а при $k_y L \gg 1$ медленно достигает насыщения. Это поведение согласуется с результатами численного моделирования [Zhu et al., 2004].

В реальной ситуации баллонные возмущения, по-видимому, локализованы вдоль силовой линии в приэкваториальной области магнитосферы, где резко возрастает β . Кроме того, в этой области силовые линии сильно искажаются и вытягиваются в хвост магнитосферы, благодаря чему резко увеличивается их кривизна. В рассмотренной упрощенной модели равновесные параметры постоянны вдоль силовой линии, и локализация возмущений по продольной координате обеспечивается с помощью граничных условий (рис. 1б). Использованное приближение продольно-однородного поля с постоянной кривизной дает возможность только качественно проследить влияние продольного масштаба возмущений на устойчивость плазмы. Сделать более точные выводы, касающиеся влияния симметрии продольной структуры стоячей моды относительно экваториальной плоскости, не представляется возможным. Более реальный подход может состоять в использовании какую-либо из численных моделей хвоста магнитосферы для более точного рассмотрения продольной структуры баллонных возмущений.

В рассмотренном случае источником свободной энергии для роста баллонной неустойчивости служит избыточное давление горячей плазмы в радиальном направлении. Предлагаемая 2D модель не учитывает ряд факторов, которые могут оказаться существенными для развития неустойчивости: анизотропию давления [Cheng and Qian, 1994] и кинетические эффекты [Klimushkin and Mager, 2008]. В рамках модели также не учитывалась возможность азимутальных градиентов давления плазмы и связанных с ними равновесных продольных токов [Иванов и др., 1992; Golovchanskaya and Maltsev, 2003]. Наблюдаемое иногда возбуждение суббури внешним триггером – межпланетной ударной волной при SSC или резким изменением ориентации ММП – может свидетельствовать о нелинейном механизме возбуждения неустойчивости в виде “МГД детонации” [Hurricane et al., 1999]. Для этого магнитосферная плазма должна находиться вблизи порога, определяемого линейной теорией устойчивости, а внешнее возму-

щение – иметь амплитуду, достаточную для перевода системы в область нелинейного взрывного роста.

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведен глобальный анализ баллонных возмущений в плазме конечного давления, находящейся в криволинейном магнитном поле, в рамках простой цилиндрической геометрии без использования приближения ВКБ. Получены решения системы зацепленных уравнений для альвеновской и ММЗ мод. Учет конечного размера возмущения в радиальном направлении приводит к повышению порога неустойчивости по сравнению с результатами локального анализа устойчивости с помощью дисперсионного соотношения в ВКБ-приближении.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ № 11-02-90491-Укр-ф-а. Выражаем признательность рецензенту за конструктивные замечания, О.К. Черемных и А.С. Парновскому – за полезные обсуждения.

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

Вывод системы уравнений для МГД возмущений в случае цилиндрической симметрии

Линеаризованные уравнения МГД для гармонического возмущения $\sim \exp(-i\omega t)$ имеют вид

$$\xi = \frac{1}{\omega^2 \rho} \nabla p + \frac{1}{\mu_0 \omega^2 \rho} \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{B}) + \frac{1}{\mu_0 \omega^2 \rho} \mathbf{B} \times (\nabla \times \mathbf{b}), \quad (9)$$

$$p = -\xi \nabla P - \gamma P \nabla \xi, \quad (10)$$

$$b = \nabla \times (\xi \times \mathbf{B}).$$

Мы рассматриваем двумерный случай: равновесные параметры не зависят от координаты y и силовые линии поля \mathbf{B} лежат в плоскостях $y = \text{const}$. Исключим \mathbf{b} из (9) с помощью (10) и выпишем проекции полученного уравнения на векторы локального базиса $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Кроме того, перейдем вместо ξ_3 и p к новым неизвестным: $u = \nabla \cdot \xi$, характеризующей сжатие плазмы, и нормированному возмущению полного давления q . В результате получается система уравнений

$$\nabla_1 q = \beta \kappa_p q + \nabla_3 [B^{-1} \nabla_3 (B \xi_1)] + (k_A^2 + \beta \kappa_c \kappa_p) \xi_1 + \gamma \beta \kappa_c u, \quad (11)$$

$$\nabla_2 q = B^{-1} \nabla_3 (B \nabla_3 \xi_2) + k_A^2 \xi_2,$$

$$\nabla_1 \xi_1 + \nabla_2 \xi_2 = \kappa_c \xi_1 + B \kappa_s^{-2} \nabla_3 (B^{-1} \nabla_3 u) + u, \quad B \nabla_3 (B^{-1} \nabla_3 u) + k_c^2 u + 2 \kappa_c k_s^2 \xi_1 + k_s^2 q = 0.$$

Можно показать, что система уравнений, полученная в работе [Cheng, 2002], в двумерном случае с точностью до обозначений совпадает с системой (11).

В случае конфигурации с цилиндрической симметрией проекции оператора ∇ на векторы локального базиса $\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_R, \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_\theta$ имеют вид $\nabla_1 = \partial_R, \nabla_2 = \partial_y, \nabla_3 = R^{-1}\partial_\theta$. Для рассматриваемых гармоник $\exp(i\nu\theta + ik_y y)$ система (11) сводится к системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\partial_R q = \beta \kappa_p q + (L_A + \beta \kappa_c \kappa_p) \xi_1 + \gamma \beta \kappa_c u, \tag{12}$$

$$\partial_R \xi_1 = \kappa_c \xi_1 + k_s^{-2} L_s u - ik_y \xi_2$$

и двух соотношений

$$ik_y q = L_A \xi_2, \tag{13}$$

$$2\kappa_c \xi_1 + q + k_s^{-2} L_c u = 0.$$

Исключая ξ_2 и u с помощью соотношений (13) из системы (12), приходим к системе уравнений (2).

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

Сравнение ВКБ-асимптотики с локальным дисперсионным соотношением

Знание функции $k_R^2(R)$ позволяет вычислить спектр ω_n^2 в “квазиклассическом” приближении, пользуясь аналогом уравнения Бора–Зоммерфельда:

$$\int_{R_1}^{R_2} k_R(R) dR = \pi(n + 1/2), \quad n = 0, 1, \dots \tag{14}$$

Это уравнение определяет некоторый дискретный набор значений ω_n^2 . Отличие уравнения (14) от классического правила квантования состоит в том, что спектральный параметр ω^2 входит в него более сложным образом. Однако формула (14) все же позволяет сделать некоторые асимптотические оценки спектра.

Найдем асимптотику при $k_y \rightarrow \infty$ величины $I = k_R^2(R; k_y)$, выражающейся через коэффициенты системы (2) с помощью формул (6) и (4). Параметр k_y входит только в коэффициент a_{21} , причем $a_{21} = k_y^2 L_A^{-1} + O(1)$ при $k_y \rightarrow \infty$. Из (6) и (4) следует, что

$$k_R^2(R; k_y) = -a_{12} a_{21} + A + B a_{21}^{-1} \partial_R a_{21} - \frac{1}{2} a_{21}^{-1} \partial_{RR} a_{21} - \frac{3}{4} a_{21}^{-2} (\partial_R a_{21})^2,$$

где A и B не зависят от k_y . Все слагаемые, кроме первого, при $k_y \rightarrow \infty$ стремятся к конечным пределам. Поэтому главный член асимптотики квадрата локального радиального волнового числа при $k_y \rightarrow \infty$ имеет вид

$$k_R^2(R; k_y) = -k_y^2 L_A^{-1}(R) a_{12}(R). \tag{15}$$

Величина $-L_A > 0$ при $\omega^2 < 0$, поэтому квазиклассическая волновая функция локализована между двумя корнями уравнения $a_{12}(R; \omega_n^2) = 0$. Учитывая явный вид коэффициента a_{12} , можно переписать соотношение (15) как

$$\frac{k_R^2}{k_y^2} = -1 + \frac{4k_A^2}{R^2(k_A^2 - v^2 R^{-2})(k_c^2 - v^2 R^{-2})} + \frac{\beta \kappa_p}{R(k_A^2 - v^2 R^{-2})}. \tag{16}$$

Соотношение (16) связывает между собой локальные волновые параметры $k_R(R), k_{\parallel}(R) = v/R$ и глобальные параметры k_y и $\omega = \omega_n$ (частота фиксирована, а номер собственного значения $n \rightarrow \infty$).

Общее локальное дисперсионное соотношение, полученное в пределе больших поперечных волновых чисел [Golovchanskaya and Mingalev, 2006, Мазур и др., 2012], имеет вид

$$(\omega^2 - k_{\parallel}^2 V_A^2)(\omega^2 - k_{\parallel}^2 V_c^2) + \frac{k_2^2}{k_1^2 + k_2^2} \times \tag{17}$$

$$\times [\beta \kappa_c \kappa_p V_A^2 (\omega^2 - k_{\parallel}^2 V_c^2) - 4\kappa_c^2 V_c^2 \omega^2] = 0,$$

где κ_c – локальная кривизна силовой линии. В частном случае системы, обладающей цилиндрической симметрией, оно должно совпадать с (16). Действительно, полагая в (17) $k_1 = k_R(R), k_2 = k_y, \kappa_c = -1/R$ и $k_{\parallel}(R) = v/R$, получим, после преобразований, соотношение (16).

“Квазиклассический” спектр, получаемый с помощью (14), и точный спектр, находимый путем решения системы уравнений (2) оказываются близки, даже для основной моды. Поскольку вычислительные процедуры, приводящие к таким “почти совпадающим” результатам резко различаются, это служит надежной проверкой алгоритма численного счета.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Иванов В.Н., Похотелов О.А., Фейгин Ф.З., Ру А., Перро С., Лекс Д. Баллонная неустойчивость в магнитосфере Земли при непостоянном давлении и конечном β // Геомагнетизм и аэрномия. Т. 32. С. 68–74. 1992.
- Мазур Н.Г., Федоров Е.Н., Пилипенко В.А. Дисперсионное соотношение для баллонных мод и условие

- их устойчивости в околоземной плазме // Геомагнетизм и аэрномия. Т. 52. № 5. С. 639–648. 2012.
- Черемных О.К., Парновский А.С. Баллонные моды во внутренней магнитосфере Земли с учетом конечной проводимости ионосферы // Космич. наука и технология. Т. 10. С. 82–86. 2004.
- Agapitov A.V., Cheremnykh O.K., Parnowski A.S. Ballooning perturbations in the inner magnetosphere of the Earth: spectrum, stability and eigenmode analysis // Adv. Space Res. V. 41. P. 1682–1687. 2007.
- Allan W., Poulter E.M., White S.P. Hydromagnetic wave coupling in the magnetosphere-plasmasphere effects on impulse – excited resonances // Planet. Space Sci. V. 12. P. 1189–1197. 1986.
- Cheremnykh O.K., Parnowski A.S., Burdo O.S. Ballooning modes in the inner magnetosphere of the Earth // Planet. Space Sci. V. 55. P. 1217–1229. 2004.
- Cheng C.Z., Qian Q. Theory of ballooning-mirror instabilities for anisotropic pressure plasmas in the magnetosphere // Geophys. Res. Lett. V. 99. P. 11193–11209. 1994.
- Cheng C.Z. MHD field line resonances and global modes in three-dimensional magnetic fields // J. Geophys. Res. doi:10.1029/2002JA009470. 2002.
- Golovchanskaya I.V., Maltsev Y.P. Interchange instability in the presence of the field-aligned current: Application to the auroral arc formation // J. Geophys. Res. V. 108. 1106. doi:10.1029/2002JA009505. 2003.
- Golovchanskaya I.V., Maltsev Y.P. On the identification of plasma sheet flapping waves observed by Cluster // Geophys. Res. Lett. V. 32. L02102, doi:10.1029/2004GL021552. 2005.
- Golovchanskaya I.V., Mingalev O.V. Propagation of the ballooning waves in the Earth's magnetotail // Proc. of 29-th Annual Seminar, Apatity. P. 126–132. 2006.
- Hameiri E., Laurence P., Mond M. The ballooning instability in space plasmas // J. Geophys. Res. V. 96. P. 1513–1526. 1991.
- Hurricane O.A., Fong B.H., Cowley S.C., Coroniti F.V., Kennel C.F., Pellat R. Substorm detonation // J. Geophys. Res. V. 104. P. 10221–10231. 1999.
- Klimushkin D.Yu., Mager P.N. On the spatial structure and dispersion of slow magnetosonic modes coupled with Alfvén modes in planetary magnetospheres due to field line curvature // Planet. Space Sci. V. 56. P. 1273–1279. 2008.
- Liu W.W. Physics of the explosive growth phase: Ballooning instability revisited // J. Geophys. Res. V. 102. P. 4927–4931. 1997.
- Liu W.W., Xu B.-L., Samson J.C., Rostoker G. Theory and observations of auroral substorms: A magnetohydrodynamic approach // J. Geophys. Res. V. 100. P. 79–95. 1995.
- Mager P.N., Klimushkin D.Yu., Pilipenko V.A., Schäfer S. Field-aligned structure of poloidal Alfvén waves in a finite pressure plasma // Ann. Geophys. V. 27. P. 3875–3882. 2009.
- Miura A., Ohtani S., Tamao T. Ballooning instability and structure of diamagnetic waves in a model magnetosphere // J. Geophys. Res. V. 94. P. 15231–15242. 1989.
- Ohtani S., Tamao T. Does the ballooning instability trigger substorms in the near-Earth magnetotail? // J. Geophys. Res. V. 98. P. 19369–19379. 1993.
- Pokhotelov O.A., Sandberg I., Sagdeev R.Z., Treumann R.A., Onishchenko O.G., Balikhin M.A., Pavlenko V.P. Slow drift mirror modes in finite electron-temperature plasma: Hydrodynamic and kinetic drift mirror instabilities // J. Geophys. Res. V. 108. 1098, doi:10.1029/2002JA009651. 2003.
- Raeder J., Zhu P., Ge Y., Siscoe G. Open Geospace General Circulation Model simulation of a substorm: Axial tail instability and ballooning mode preceding substorm onset // J. Geophys. Res. V. 115. A00116, doi:10.1029/2010JA015876. 2010.
- Radosky H.R. A theory of latitude dependent geomagnetic micropulsations: the asymptotic fields // J. Geophys. Res. V. 79. P. 596. 1974.
- Zhu P., Bhattacharjee A., Ma Z.W. Finite k_y ballooning instability in the near-Earth magnetotail // J. Geophys. Res. V. 109. A11211. 2004.
- Zhu P., Raeder J., Germaschewski K., Hegna C.C. Initiation of ballooning instability in the near-Earth plasma sheet prior to the 23 March 2007 THEMIS substorm expansion onset // Ann. Geophys. V. 27. P. 1129–1138. 2009.