

УДК 550.383

ВЛИЯНИЕ СЖИМАЕМОСТИ НА ГЕНЕРАЦИЮ ГИДРОДИНАМИЧЕСКОЙ СПИРАЛЬНОСТИ В ЖИДКОМ ЯДРЕ ЗЕМЛИ

© 2012 г. М. Ю. Решетняк

ФГБУ науки Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, г. Москва

e-mail: m.reshetnyak@email.com

Поступила в редакцию 21.06.2011 г.

После доработки 18.07.2011 г.

На примере стандартной трехмерной модели тепловой конвекции во вращающейся сферической оболочке показано, как градиент плотности $\nabla\rho$ по радиусу влияет на генерацию гидродинамической спиральности χ . Так, генерация χ внутри Тейлоровского цилиндра слабо зависит $\nabla\rho$, а вне цилиндра сжимаемость жидкости усиливает генерацию χ . Рассмотрены следствия для теории геодинамо.

1. ВВЕДЕНИЕ

С середины 90-ых годов прошлого века наметился существенный прорыв в теории планетарного динамо. Стартовав от успешных моделей геодинамо [Schubert, 2007], ученые прешли к моделированию наблюдаемых в солнечной системе магнитных полей других планет и их спутников [Stanley and Glatzmaier, 2009]. Известно, что существование планетарных магнитных полей на расстоянии, сравнимом по масштабам с областью их генерации, связано с быстрым вращением планет. Так, при отсутствии вращения генерируемые магнитные поля имеют жгутообразную структуру [Казанцев, 1967; Meneguzzi and Pouquet, 1989], и в силу быстрого убывания на расстоянии, становятся практически невидимыми вдали от области генерации. В то же время, пространственный спектр планетарных полей убывает с увеличением волнового числа. Роль вращения сводится как к симметризации тороидального магнитного поля вокруг оси вращения и накачке поля в осесимметричную моду, так и к нарушению свойств зеркальной симметрии гидродинамической турбулентности [Parker, 1955; Moffatt, 1978]. Нарушение симметрии мелкомасштабного поля скорости \mathbf{v} приводит к появлению гидродинамической спиральности $\chi = \langle \mathbf{v} \cdot \text{rot} \mathbf{v} \rangle$, где $\langle \dots \rangle$ — означает осреднение. Величина χ тесно связана с известным α -эффектом, который описывает генерацию крупномасштабных магнитных полей мелкомасштабной турбулентностью [Krause and Rädler, 1980]. Очевидно, что при медленном вращении уже нет оснований ожидать совпадения направления геомагнитного диполя (усредненного за несколько миллионов лет) с осью вращения, но и как показывают численные эксперименты, не следует ожидать уже и доминирования дипольной моды вообще.

Возвращаясь к вопросу о генерации спиральности надо отметить, что возникновение корреляции скорости и ее завихренности может обеспечиваться разными механизмами. В частности, это могут быть сдвиговые течения, см. подробнее [Hollerbach and Rüdiger, 2004], когда спиральность генерируется вблизи твердых границ, где градиенты скорости в пограничных слоях велики.

Для астрофизики, более распространен другой сценарий генерации χ , основанный на идее прохождения конвективного вихря во вращающейся сжимаемой среде. При наличии отрицательного градиента плотности по высоте, вихрь поднимаясь (опускаясь) расширяется (сжимается) и начинает вращаться медленнее (быстрее), обеспечивая отрицательную спиральность в одном полушарии и положительную — в другом [Parker, 1955]. Очевидно, что данный механизм может работать вдали от границ и, возможно, оказывается более эффективным на малых масштабах, где память о границах объема уже утеряна и сдвиговые течения малы. Ситуация осложняется возможностью переноса χ по спектру [Фрик, 2010]. Отметим, что данный механизм полностью исключен в моделях Буссинеска, для которых поле скорости удовлетворяет условию бездивергентности $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$. В тоже время известно, что для жидкого ядра Земли скачок плотности по радиусу составляет всего 20% (см. подробнее важные для геодинамо параметры в [Braginsky and Roberts, 1995]), и априори совсем не очевидно, будет ли сжимаемость оказывать существенное влияние на генерацию спиральности. Напомним, что ранее, интерес к моделям аэластик [Braginsky and Roberts, 1995; Glatzmaier and Roberts, 1996], учитывающим сжимаемость, был вызван корректной формулировкой термодинамической задачи, а не принципиальными вопросами генерации магнитного поля.

Ниже, на примере трехмерной модели тепловой конвекции во вращающейся сферической оболочке мы рассмотрим к каким изменениям генерации спиральности приводит существование градиента плотности по радиусу, и что можно ожидать при экстраполяции полученных результатов к режиму земного динамо.

2. УРАВНЕНИЯ КОНВЕКЦИИ

Рассмотрим вращающийся вокруг оси z с угловой скоростью Ω сферический слой ($r_1 \leq r \leq r_0$) сжимаемой жидкости с плотностью $\rho(r)$, где (r, θ, φ) — сферическая система координат (для Земли $r_1 = 0.35, r_0 = 1$). Пренебрегая членами $\frac{\partial \rho}{\partial t}$ и вводя

следующие единицы измерения для скорости \mathbf{V} , времени t и давления P : κ/L , L^2/κ и $\rho\kappa^2/L^2$, где L — единица длины, κ — коэффициент молекулярной теплопроводности, $\bar{\rho}$ — среднее по профилю значение плотности, запишем уравнения тепловой конвекции в виде:

$$\begin{aligned} \text{Pr}^{-1} \text{Er} \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} - \mathbf{V} \times \nabla \times \rho \mathbf{V} - \mathbf{V}^2 \nabla \rho = \\ = -\nabla P + \mathbf{F} + \text{Er} \left(\nabla^2 \mathbf{V} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{V}) \right), \\ \rho \frac{\partial T}{\partial t} + \rho (\mathbf{V} \cdot \nabla) (T + T_0) = \nabla^2 T, \\ \mathbf{F} = -\rho \mathbf{1}_z \times \mathbf{V} + \text{Ra} \rho \text{Tr} \mathbf{1}_r. \end{aligned} \quad (1)$$

Безразмерные числа Прандтля, Экмана и модифицированного числа Рэлея заданы в виде: $\text{Pr} = \frac{\nu}{\kappa}$, $\text{Er} = \frac{\nu}{2\Omega L^2}$, $\text{Ra} = \frac{\alpha g_0 \delta T L}{2\Omega \kappa}$, где ν — коэффициент кинематической вязкости, α — коэффициент объемного расширения, g_0 — ускорение свободного падения, δT — единица возмущения температуры T относительно равновесного профиля T_0 .

Задача (1) замыкается граничными условиями на $r = r_1, r_0$. Для возмущения температуры T использованы нулевые граничные условия, что в совокупности с заданным выше профилем $T_0 = \frac{r_i/r - r_0}{r_0 - r_1}$, соответствует фиксированному значению

полной температуры $T_0 + T$: $(1, 0)$ на границах. Для поля скорости \mathbf{V} использованы нулевые граничные условия на внешней границе $r = r_0$. На границе с внутренним ядром $r = r_1$ $V_r = 0, V_\theta = 0$. Азимутальная компонента скорости $V_\varphi = \omega s$ вычисляется из уравнения момента импульса для внутреннего твердого ядра, вращающегося вокруг вертикальной оси z с угловой скоростью ω под действием вязких сил:

$$\begin{aligned} \text{Pr}^{-1} \frac{\partial \omega}{\partial t} = r_i^4 \oint \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{V_\varphi}{r} \right)_{r=r_i} \sin^2 \theta d\theta d\varphi, \\ I = \frac{8}{15} \pi r_i^5, \end{aligned} \quad (2)$$

где I — момент инерции твердого ядра относительно оси z , (s, φ, z) — цилиндрическая система координат.

В ходе решения задачи (1) использовано разложение по сферическим функциям и полиномам Чебышева (в радиальном направлении) [Simitev, 2004]. Многопроцессорный код реализован на языке Фортран-95 с использованием библиотек MPI [Решетняк, 2011]. Вычисления выполнены на сетках 128^3 .

3. ГЕНЕРАЦИЯ СПИРАЛЬНОСТИ

Свойствам конвекции при быстром вращении посвящено большое количество работ, см. ссылки в статье [Решетняк, 2010]. При увеличении чисел Рэлея при $\text{Pr} \sim 1$ первые возникающие конвективные моды представляют собой циклонические вертикальные колонки вне Тейлоровского цилиндра (ТЦ) (область над/под твердым ядром), удовлетворяющие в нулевом приближении (без учета сил вязкости и архимедовских сил) в основном объеме теореме Тейлора-Праудмана $\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial z} = 0$.

Такие течения называются геострофическими, и для них выполняется баланс градиента давления и силы Кориолиса. Рассмотрим северное полушарие. Направление закрутки жидкости в колонке определяется тем, является ли перегретый поток восходящим ($V_z > 0, T > 0$), или холодным, нисходящим ($V_z < 0, T < 0$). При формировании колонки вблизи твердой границы происходит уменьшение ее поперечного сечения, за счет чего появляется завихренность течения $\omega = \text{rot} \mathbf{V}$ в колонке, рис. 1. Корреляция между вертикальной скоростью V_z и вращением в горизонтальной плоскости ($\omega_z \neq 0$) приводит к появлению гидродинамической спиральности χ , рис. 2.

Увеличение интенсивности тепловых источников вызывает возбуждение конвекции внутри ТЦ, где более высокий порог возбуждения конвекции связан с тем, что вблизи границ вертикальные течения отклоняются практически под прямым углом к оси вращения z . В этом случае радиус закрутки течений силой Кориолиса минимален, и как следствие — потери на диссипацию максимальны. Распределение спиральности χ внутри ТЦ имеет уже более сложную структуру: оно знакопеременно — положительно вблизи r_i отрицательно вблизи r_0 . Для южного полушария $\chi(-z) = -\chi(z)$.

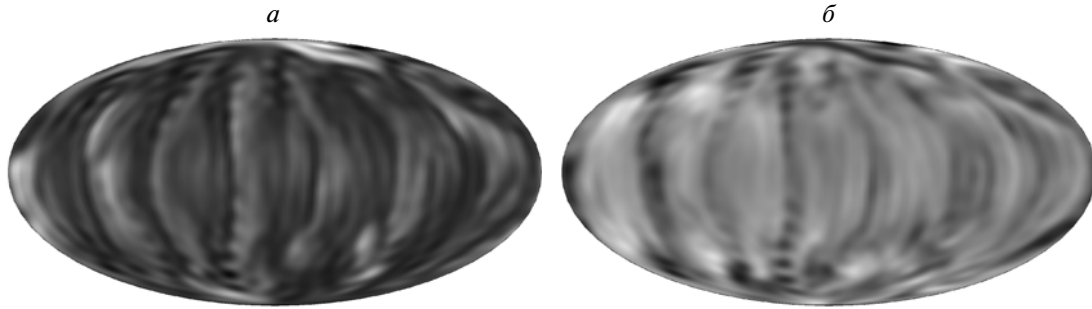


Рис. 1. Радиальное сечение: *a* – возмущения температуры $T(-0.09, 0.43)$ и *б*–азимутальной скорости $V_\phi - 372, 360$) для $r = 0.95, E = 2 \cdot 10^{-4}, Pr = 1, Ra = 8 \cdot 10^2$. Значения в скобках соответствуют диапазону полей. Темный цвет соответствует отрицательным значениям.

Рассмотрим источники спиральности χ более подробно. Из $\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} \sim PrE^{-1}(\mathbf{1}_z \times \mathbf{V} + RaTr)$ следует:

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} \sim PrE^{-1} \left(\frac{\partial \langle V^2 \rangle}{\partial z} - \langle V_2 \nabla \cdot \mathbf{V} \rangle + [(\nabla \times \mathbf{V}) \times \mathbf{V}]_z + Ra[Tr \cdot \text{rot} \mathbf{V} + \text{rot}(Tr) \cdot \mathbf{V}] \right). \quad (3)$$

В несжимаемой среде ($\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$) за генерацию спиральности отвечают первый член в правой части (3), вызванный силой Кориолиса, и член при числе Рэлея, связанный с плавучестью. На рис. 2 представлены распределения спиральности для разных Ra . Для малых Ra , течения близки к геострофическим ($\frac{\partial E_K}{\partial z} = 0$, в том числе и на экваторе,

$E_K = V^2/2$ – кинетическая энергия) и изменение кинетической энергии происходит на границе $r = r_0$, генерируя отрицательную спиральность в северном полушарии и положительную – в южном, см. рис. 2*a*. Интересно, что аналогичный результат получается и для не вязких граничных условий [Решетняк, 2010], где тангенциальная компонента скорости уже не равна нулю. Принципиальным отличием двух видов граничных условия является нулевое значение χ на границе для не вязких граничных условий, и не нулевое – для вязких. Оценка источника генерации в Экмановском слое толщиной $\sim E^{1/2}$ дает $E^{-1/2}/E_K$. По порядку величины конвективный снос крупномасштабной спиральности χ от границы в основной объем будет $\mathcal{G} \sim E^{-1/2} E_K E V = E^{1/2} V^3$. Обратим внимание, что данный механизм не обеспечивает генерацию спиральности в основном объеме. Другой интересной особенностью является то, что в выражение \mathcal{G} не входит горизонтальный масштаб колонки $l_\perp \sim E^{-1/3}$. Увеличение Ra существенно не меняет распределение спиральности вне ТЦ.

Рассмотрим поведение членов, связанных с силой Архимеда. Данные члены становятся эффективными при увеличении Ra , когда конвекция появляется и внутри ТЦ. В отличие от конвекции вне ТЦ, горизонтальный масштаб течений внутри ТЦ велик, а величина осесимметричных скоростей порядка величин более высоких гармоник. Для северного полушария первый член при числе Ra положителен вблизи r_j и отрицателен вблизи r_0 . Для оценки второго члена при Ra используем соотношение $(\text{rot}(Tr) \cdot \mathbf{V} = (\nabla T \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{V}$. Введем локальную цилиндрическую систему координат (s, ϕ, z) с осью z вдоль оси колонки, тогда $\langle (\nabla T \times \mathbf{r}) \cdot \mathbf{V} \rangle = -\langle \nabla_s T_z V_\phi \rangle > 0$, т.е. оба Архимедовские члена работают синхронно, обеспечивая смену знака спиральности в каждом из полушарий. Важно отме-

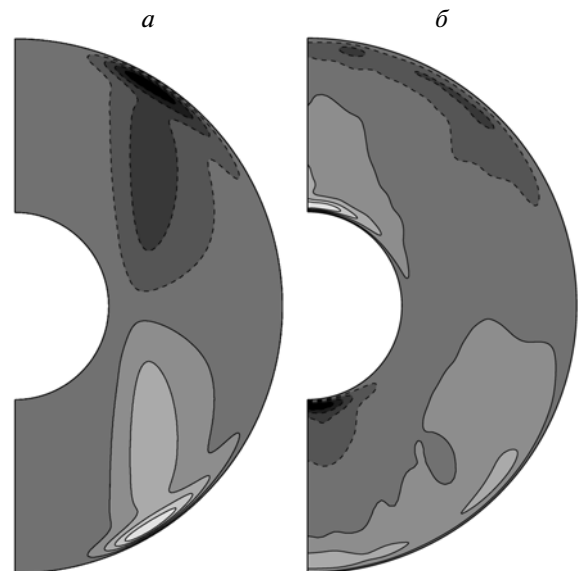


Рис. 2. Меридиональное сечение гидродинамической спиральности χ для несжимаемой жидкости для $E = 2 \cdot 10^{-4}, Pr = 1, a - Ra = 1.5 \cdot 10^2 (-38000, 38000)$ и $b - Ra = 8 \cdot 10^2 (-1.53 \cdot 10^6, 1.62 \cdot 10^6)$. Пунктирные изолинии соответствуют отрицательным значениям.

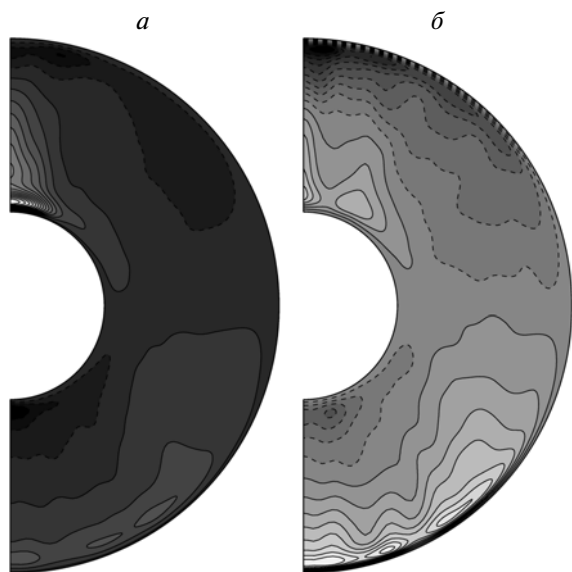


Рис. 3. Меридиональное сечение гидродинамической спиральности χ с учетом сжимаемости для $E = 2 \cdot 10^{-4}$, $Pr = 1$, $Ra = 8 \cdot 10^2$; а) $(-10^6, 10^6)$, $\Gamma = 1.148 - 0.237r^2$ и б) $(-7.4 \cdot 10^5, 7.4 \cdot 10^5)$, $\rho = 1.714 - 1.144r^2$.

туть, что помимо разной пространственной зависимости спиральности внутри и вне ТЦ, физический смысл χ в смысле динамики средних полей также различен в этих областях. Если вне цилиндра, мы имеем осреднение по колонкам, и хотя бы в перпендикулярном направлении выполняется требуемое для теории разделение по масштабам [Krause and Rädler, 1980], то для области внутри ТЦ такого разделения практически не существует, и основной вклад в генерацию спиральности вносят крупномасштабные течения. Такое различие может быть основанием для создания простых моделей геодинamo, например, моделей Паркера, с разной пространственной локализацией α - и ω -эффектов.

Третий член в правой части при высоких значениях корреляции между скоростью \mathbf{V} и завихренностью ω мал, но может приводить к неустойчивостям вида: $\frac{\partial}{\partial t} (|\mathbf{V}|\omega \cos \phi) \sim |\mathbf{V}|\omega \sin \phi$, где ϕ — угол между векторами \mathbf{V} и ω . Для стационарных $|\mathbf{V}|$ и $|\omega|$ имеем линейный рост угла: $\phi \sim -t$. Обратим внимание, что векторное произведение $\mathbf{V} \times \omega$ с точностью до множителя равно нелинейному конвективному члену в (1) и отвечает за перенос кинетической энергии по спектру.

Вернемся к члену, связанному со сжимаемостью. Используя $\nabla \cdot (\rho(r) \mathbf{V}) = 0$, имеем: $-\langle V_z \nabla \cdot \mathbf{V} \rangle = C \langle V_z V_r \rangle$, где $C = \frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dr}$, т.е. для северного полушария знак χ отрицательный и положительный — для южного, так что знак источника совпадает со зна-

ком \mathcal{C} , но генерация χ происходит во всем объеме жидкого ядра, а не только на границе. Влияние сжимаемости приводит к более равномерной генерации χ по всему объему и как следствие — к более эффективной генерации магнитного поля мелко-масштабной турбулентностью. На рис. 3 представлены сечения χ для а) $\rho_0/\rho_1 = 0.81$ (близко к земному режиму) и б) с большим градиентом $\nabla \rho$: $\rho_0/\rho_1 = 0.36$. С увеличением $\nabla \rho$ хорошо наблюдается укрупнение масштаба χ .

4. ОЦЕНКИ ДЛЯ ЗЕМЛИ. ОБСУЖДЕНИЕ

Приведем оценки характерных величин для жидкого ядра Земли [Jones, 2000]. Считая, что выполняется баланс сил Кориолиса и Архимеда $\alpha g_0 \delta T \sim 2\Omega V_{\omega d}$, где $V_{\omega d} = 3 \cdot 10^{-4}$ м сек $^{-1}$ — скорость западного дрейфа магнитного поля, для $L = 2.26 \cdot 10^6$ м сек $^{-1}$ и $\kappa = 10^{-5}$ м 2 сек $^{-1}$ имеем: $Ra = \frac{\alpha g_0 \delta T L}{2\Omega \kappa} \approx 1.5 \cdot 10^7$. Тогда в безразмерном виде $Ra T \sim V$. Для развитой турбулентности $V \sim V_r \sim V_0 \sim V_\phi$. Оценка для земного ядра сжимаемости дает $C = -0.2$.

Оценим эффективность генерации спиральности за счет эффектов сжимаемости. Сначала рассмотрим область вне ТЦ: $\Pi = \frac{2C \langle V_r V_z \rangle}{\frac{d \langle V^2 \rangle}{dz}} \sim 2CE^{-1/2}/V$. Принимая для Земли $E = 10^{-15}$ и оценивая безразмерную скорость по скорости западного дрейфа $V = V_{\omega d} L/\kappa = 7 \cdot 10^7$, получаем $\Pi \approx 1$, т.е. сжимаемость оказывает влияние на генерацию спиральности. Более того, поскольку знаки источников спиральности совпадают, то происходит усиление генерации спиральности вне ТЦ. Обратим внимание, что на малых масштабах вдали от твердых границ $\frac{d \langle V^2 \rangle}{dz} \rightarrow 0$ и без учета кон-

вективного сноса спиральности от границ $|\Pi| \rightarrow \infty$, что не соответствует реальному вкладу сжимаемости в генерацию χ .

Для области внутри ТЦ считая, что $\mathbf{r} \cdot \text{rot} \mathbf{V} \sim \mathbf{z} \cdot \text{rot} \mathbf{V} \sim 2mzV_\phi/s$, имеем: $\Pi = \frac{C \langle V_r V_z \rangle}{2zmRa \langle TV_\phi \rangle / s} \sim \frac{C_s}{2zm}$. Оценка Π дает $|\Pi| \ll 1$, где мы учли, что ази-

мутальное волновое число $m > 1$ и $s < z$. Другими словами, в жидком ядре Земли эффекты сжимаемости не должны оказывать существенного влияния на генерацию спиральности внутри ТЦ.

5. ВЫВОДЫ

В работе показано, что эффекты сжимаемости оказывают существенное влияние на генерацию гидродинамической спиральности в жидком ядре Земли. В свою очередь, наличие гидродинамической спиральности приводит к более эффективной генерации крупно-масштабного планетарного магнитного поля. В работе также показано отличие пространственного распределения гидродинамической спиральности для сжимаемых и не сжимаемых сред во вращающейся сферической оболочке.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- *Казанцев А.П.* Об усилении магнитного поля проводящей жидкостью // ЖЭТФ. Т. 53. С. 1806–1813. 1967.
- *Решетник М.Ю.* Тейлоровский цилиндр и конвекция в сферической оболочке // Геомагнетизм и аэронаука. Т. 50. № 2. С. 273–282. 2010.
- *Решетняк М.Ю.* Псевдоспектральный метод в моделях тепловой конвекции во вращающейся сферической оболочке для параллельных компьютеров // Вычислительные методы и программирование. Т. 12. С. 77–84. 2011. <http://num-meth.srcc.msu.ru/>
- *Фрик П.Г.* Турбулентность: подходы и модели. Регулярная хаотическая динамика: Москва-Ижевск, 332 с. 2010.
- *Braginsky S.I., Roberts P.H.* Equations governing convection in Earth's core and the geodynamo // Geophys. Astrophys. Fluid Dynamics. V. 79. P. 1–97. 1995.
- *Glatzmaier G.A., Roberts P.H.* An anelastic evolutionary geodynamo simulation driven by compositional and thermal convection // Physica D. V. 97. P. 81–94. 1996.
- *Hollerbach R., Rudiger G.* The Magnetic Universe. Weinheim: Wiley-VCH Verlag GmbH & Co. KGaA, 338 p. 2004.
- *Krauvse F., Rädler K.-H.* Mean field magnetohydrodynamics and dynamo theory. Berlin: Akademie-Verlag, 271 p. 1980.
- *Meneguzzi M., Pouquet A.* Turbulent dynamos driven by convection // J. Fluid Mech. V. 205. P. 297–318. 1989.
- *Moffatt H.K.* Magnetic field generation in electrically conducting fluids. Cambridge: Cambridge University Press, 343 p. 1978.
- *Parker E.N.* Hydromagnetic dynamo models // Astrophys. J. V. 122. P. 293–314. 1955.
- *Simitev R.Ph.D.* Thesis: Convection and Magnetic Field Generation in Rotating Spherical Fluid Shells. Bayreuth: University of Bayreuth, 193 p. 2004. <http://www.phy.uni-bayreuth.de/theo/tp4/members/simitev.html>
- *Stanley S., Glatzmaier G.A.* Dynamo models for planets other than Earth // Space Sci. Rev., V. 152. P. 617–649. 2010.
- Treatise on Geophysics. V. 8. Core dynamics. Ed. Schubert G. London: Elsevier, 345 p. 2007.