

УДК 550.338.2

УДАЛЕННЫЕ ЗЕМНЫЕ ОТРАЖЕНИЯ НА ИОНОГРАММАХ ИСЗ “ИНТЕРКОСМОС-19”

© 2013 г. А. Т. Карпачев¹, Г. А. Жбанков², В. А. Телегин¹

¹ Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н.В. Пушкова РАН, (ИЗМИРАН) г. Троицк, г. Москва

² НИИ физики Южного федерального университета, г. Ростов-на-Дону
e-mail: karp@izmiran.ru

Поступила в редакцию 01.08.2011 г.
После доработки 26.12.2011 г.

Рассмотрены сложные ионограммы со спутника “Интеркосмос-19” с сильно задержанными, иногда многократными земными отражениями. Анализ показывает, что эти отражения, как правило, связаны с резкими горизонтальными градиентами ионосферной плазмы. Такие градиенты формируются на стенках главного ионосферного провала, на пиках электронной концентрации, на внутреннем и особенно часто на внешнем склоне гребня экваториальной аномалии. В одном случае удаленные отражения от Земли (УОЗ) образовались вблизи экватора, когда спутник в перигее оказался ниже максимума слоя F_2 . На основе траекторных расчетов дана количественная интерпретация наиболее характерных случаев УОЗ. Для этого строилась модель ионосферы под спутником, рассчитывались лучевые траектории и формировались модельные ионограммы. Хорошее согласие экспериментальных и модельных ионограмм позволяет заключить, что задача интерпретации сложных ионограмм “Интеркосмос-19” с УОЗ, решена успешно.

DOI: 10.7868/S0016794013050088

1. ВВЕДЕНИЕ

На ионограммах спутника “Интеркосмос-19” (ИК-19) довольно часто регистрируются удаленные (задержанные), иногда многократные отражения от Земли (УОЗ) на расстояниях больших, чем обычные земные следы. Подобные следы были обнаружены ранее при зондировании на орбитальной станции “МИР”, но на высотах ниже максимума слоя F_2 [Данилкин и др., 2006]. Большой вклад в развитие методов анализа этих следов на основе траекторных расчетов был сделан Котонаевой [Котонаева, 2006; Данилкин и Котонаева, 2009]. Данная работа посвящена анализу механизма формирования УОЗ по данным ИК-19 на основе траекторных расчетов. Отметим, что о наличии таких следов на ионограммах спутников Alouette и ISIS не сообщалось.

2. ДАННЫЕ НАБЛЮДЕНИЙ

На рисунке 1 приведены характерные особенности структуры ионосферы, в области которых наблюдались УОЗ. Для каждого случая указаны дата, UT, LT, долгота и Kp -индекс.

Все случаи, кроме одного, отличаются наличием резкого горизонтального градиента ионосферной плазмы. На рисунке 1а такой градиент создается на полярной стенке главного ионосферного

провала (ГИП), на рис. 1б – на склоне высокоширотного пика N_e . На рисунке 1в обычное падение концентрации дневной плазмы к высоким широтам было усугублено ее резким уменьшением на средних широтах во время магнитной бури. УОЗ на рис. 1г и 1д наблюдались на внутреннем склоне гребня экваториальной аномалии (ЭА) и на внешнем склоне гребня ЭА соответственно. Последний тип реализуется наиболее часто. Наконец, УОЗ, представленный на рис. 1е, имел место внутри ЭА, вблизи экватора. Он не связан с сильным градиентом плазмы и будет рассмотрен отдельно. Итак, УОЗ наблюдаются на всех широтах ионосферы и связаны, как правило, с резким горизонтальным градиентом ионосферной плазмы.

3. МЕТОДИКА ТРАЕКТОРНЫХ РАСЧЕТОВ

Однозначная интерпретация сложных ионограмм возможна только на основе траекторных расчетов. Кратко представим методику этих расчетов. Задача построения модельной ионограммы сводится к решению граничной задачи по поиску всех лучей, вернувшихся обратно в точку излучения для каждой частоты зондирования. В общем случае уравнение граничной задачи можно записать в виде

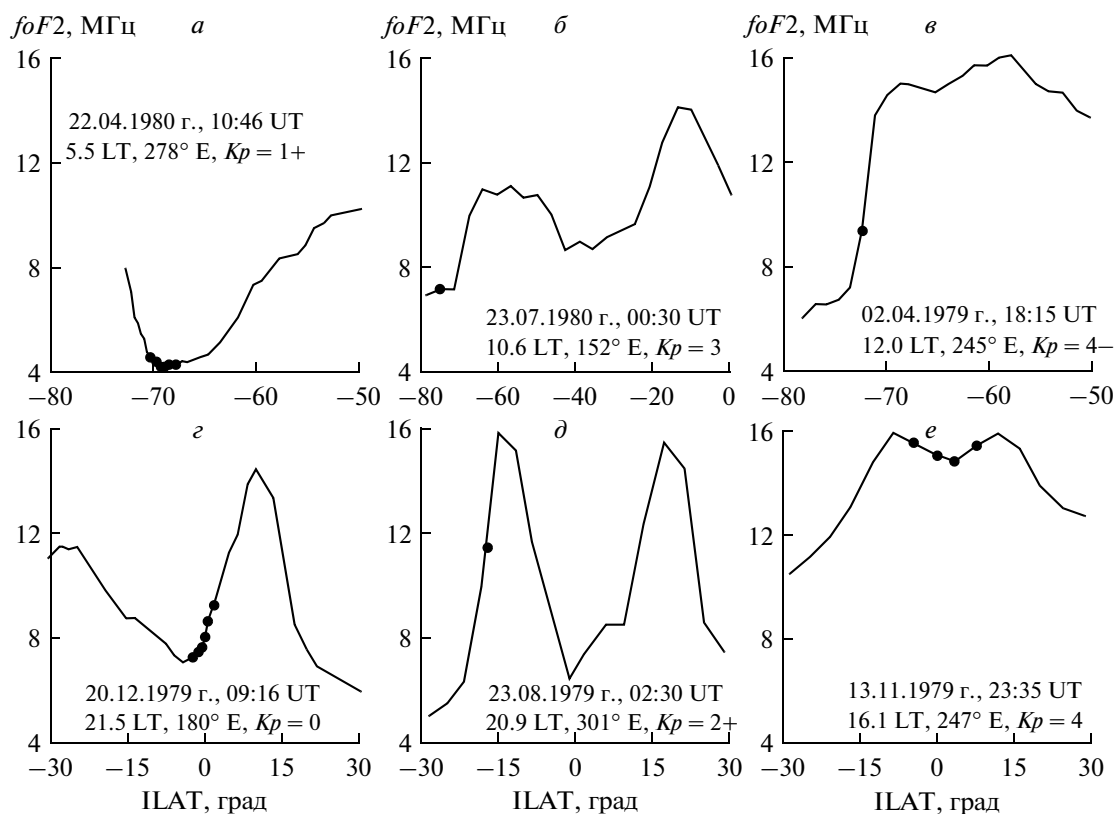


Рис. 1. Структуры ионосферы, в области которых наблюдались УОЗ (отмечены точками).

$$D(f, \Delta_0, \alpha_0) = 0, \quad (1)$$

где $D(f, \Delta_0, \alpha_0)$ — длина дуги, соединяющей начальную и конечную точки траектории при $R = R_{sat}$, как функция угла места волнового вектора Δ_0 в момент излучения, его азимутального угла α_0 и рабочей частоты f , т.е. расстояние от спутника до точки пересечения траектории с его орбитой. Однако не существует методов поиска всех корней уравнения с несколькими переменными, особенно при наличии сложных ионограмм и в случае близко расположенных корней. Поэтому при моделировании ионограммы внешнего зондирования в каждом конкретном случае необходимо определить принципы, на которых будет базироваться методика расчетов. В данном случае они следующие:

- электронная концентрация сильно изменяется в направлении вдоль меридиана;
- нет существенных градиентов электронной концентрации в перпендикулярном направлении;
- траектории всех лучей, участвующих в построении ионограммы, лежат в одной плоскости с вектором градиента;
- эта плоскость преимущественно совпадает с плоскостью меридиана;

— распространение O - и X -компонент необходимо рассчитывать согласно формулам магнитоионной теории;

— при отборе лучей из всех доступных необходимо оценивать энергетические параметры каждого следа;

— при сравнении модельной и экспериментальной ионограмм следует иметь в виду, что ионозонд ИК-19 на каждой частоте зондирования фиксировал только три отражения, максимальные по амплитуде.

Поскольку ионосфера представляет собой неоднородную магнитоактивную среду, нахождение траектории в ней аналитическими способами невозможно. Наиболее последовательно и эффективно в рамках геометрооптического приближения задача нахождения траекторных и энергетических характеристик радиоволн КВ диапазона реализуется на основе метода характеристик [Кравцов и Орлов, 1980; Гершман и др., 1984]. Он основан на численном решении локального дисперсионного уравнения путем приведения его к системе дифференциальных характеристических

уравнений относительно пространственных и лучевых координат

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{r}}{d\tau} = \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{p} - \frac{1}{2} \frac{\partial n^2}{\partial \mathbf{p}}, \\ \frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = -\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial \mathbf{r}} = \frac{1}{2} \frac{\partial n^2}{\partial \mathbf{r}}, \end{cases} \quad (2)$$

где $n = n(\beta, \mathbf{r})$ – показатель преломления падающей волны Эпплтона–Хартри, $\mathbf{r} = \{r, \theta, \varphi\}$ – радиус-вектор в сферической системе координат,

$\mathbf{p} = \frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}_0|} = \{p_i\}$ – нормированный волновой вектор, τ – независимая вспомогательная переменная.

Основные энергетические потери радиоволн связаны с эффектами пространственного ослабления и столкновительного поглощения. Пространственное ослабление луча L_s можно записать в виде $L_s = 10 \lg |J|$. Якобиан преобразования J от пространственных координат к лучевым $\xi = (P', \alpha_0, \Delta_0)$ в любой точке траектории (φ, θ, r) , необходимый для расчета пространственного ослабления, выглядит следующим образом

$$J = r^2 \sin^2 \theta \frac{\partial(\varphi, \theta, r)}{\partial(P', \alpha_0, \Delta_0)}. \quad (3)$$

Неизвестные производные по ξ , входящие в J , находятся решением расширенной системы лучевых уравнений. Ее можно получить из системы (2), дифференцируя каждое уравнение по ξ . Расчет столкновительного поглощения вдоль траектории осуществляется путем введения в систему дополнительного дифференциального уравнения

$$\frac{dL}{d\tau} = k_0 \chi n, \quad (4)$$

где n – показатель преломления, используемый при расчетах траекторий (2), χ – мнимая часть комплексного показателя преломления Эпплтона–Хартри.

Модель ионосферы. При определении распределения электронной концентрации под спутником в качестве начального приближения принимаются $N(h)$ -профили, полученные из результатов обработки ионограмм спутника ИК-19 в предположении вертикального распространения. Для расчета траекторий необходимо обеспечить непрерывность плазменной частоты и ее производных. Это достигается интерполяцией данных внешнего зондирования двумерным кубическим сплайном. Ниже максимума слоя $F2$ распределение электронной концентрации достраивается по данным модели IRI. В области резких горизонтальных градиентов электронной концентрации мы имеем дело с сугубо наклонными отражения-

ми от ионосферы, и разрез ионосферы вдоль орбиты спутника искажается. Поэтому для решения траекторных задач необходимо построить скорректированное модельное распределение электронной концентрации. Такое распределение строится методом последовательных приближений. Критерием соответствия модельного приближения истинному является степень совпадения экспериментальной ионограммы с модельной, полученной на основе траекторных расчетов.

4. УОЗ В ГЛАВНОМ ИОНОСФЕРНОМ ПРОВАЛЕ

Рассмотрим детально наиболее характерные случаи УОЗ – в провале, на внешнем склоне ЭА и внутри ЭА. На рисунке 2 приведены три ионограммы ИК-19, зафиксированные 22 апреля 1980 г. в области ГИП (рис. 1а). Все ионограммы отличаются средней степенью диффузности, что характерно для области ГИП. Однако все следы, включая УОЗ, частоты отсечки и критические частоты фиксируются достаточно четко. Отметим, что УОЗ и нормальное земное отражение образуют специфический след в виде крюка, который легко идентифицируется на ионограммах ИК-19. Ионограммы на рис. 2 расположены сверху вниз по мере удаления от полярной стенки провала (ПСП). Видно, что при этом действующие расстояния до УОЗ увеличиваются с 1000–1200 км на первой ионограмме до 1200–1400 км – на последней. Этот факт наводит на мысль, что УОЗ формируются отражениями от ПСП, однако как это происходит, можно показать только на основе траекторных расчетов.

На рисунке 3 приведен высотно-широтный разрез ионосферы в области ГИП, построенный в меридиональной плоскости. На широтах провала при наклонении орбиты 74° спутник пересекает довольно большой диапазон долгот, а, следовательно, и местного времени. В данном случае долготы изменялись от 268 до 285° , а местное время – от 4.6 до 5.8 ч для первой и последней ионограммы соответственно. На таком пространственном и временном интервале концентрация в области ПСП могла немного измениться, а ее наклон к плоскости меридиана мог составлять 1 – 2° . Однако при построении модельного разреза ионосферы эти изменения не учитывались; предполагалось, что с долготой ионосфера не изменяется, и распространение радиоволн идет строго в меридиональной плоскости. Модельный разрез ионосферы на рис. 3 построен по методике, описанной выше. Точками на орбите спутника отмечены сеансы зондирования. Кривыми на рис. 3 показаны лучевые траектории на частоте 8.6 МГц для первой ионограммы, полученной наиболее близко к ПСП. Лучевые траектории приведены только для O -компоненты радиосигнала и только для зем-

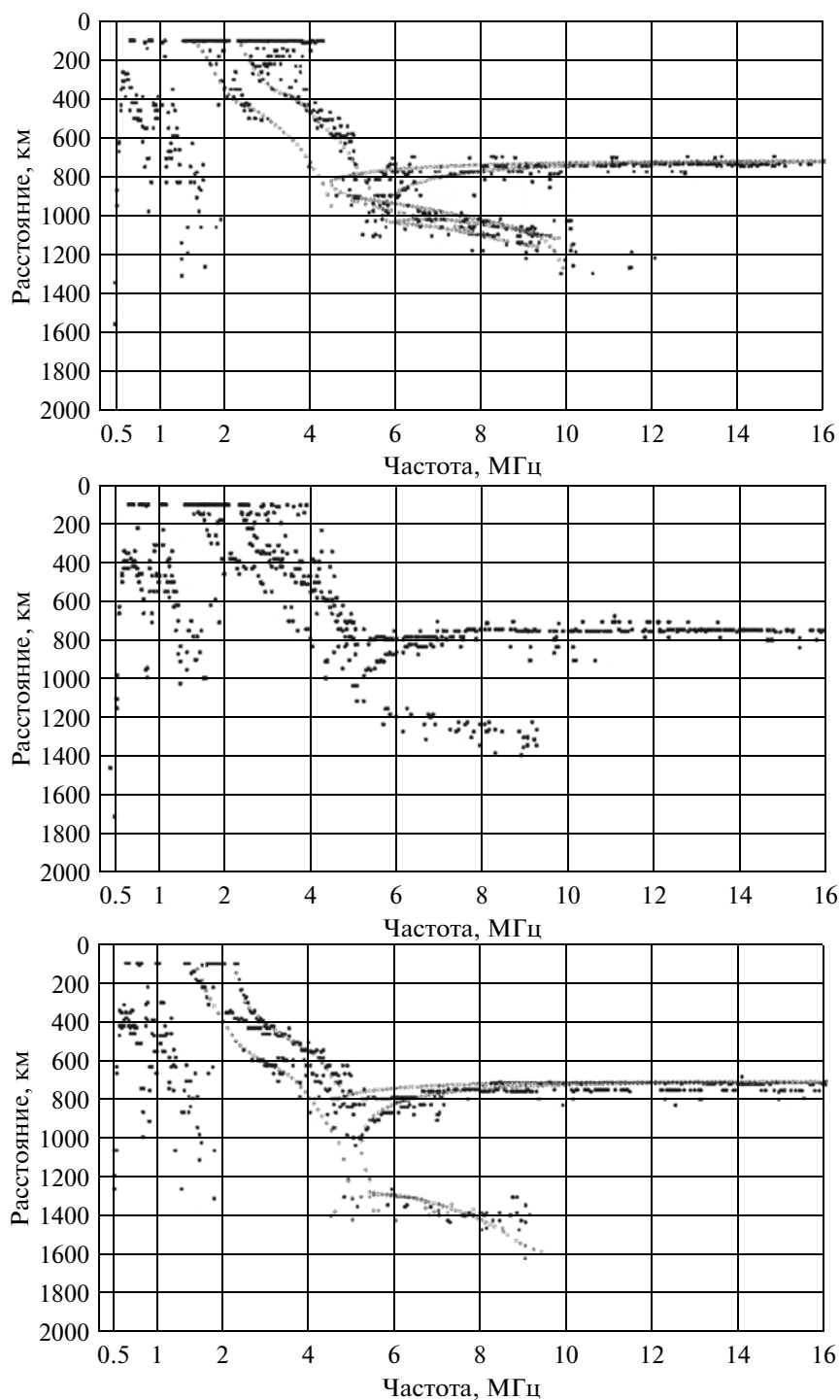


Рис. 2. Ионограммы, полученные 22.04.1980 г. в 10:45–10:47 UT в области ГИП. По оси X отложена частота в МГц, по оси Y – расстояние в км. Светлые кружки – расчет.

ных отражений – правый луч относится к основному следу, а два остальных формируют УОЗ. Видно, что при этом реализуются два варианта. Один луч отражается от Земли наклонно, а затем преломляется горизонтальным градиентом электронной концентрации на ПСП и возвращается

на спутник. Второй луч преломляется этим градиентом концентрации до тех пор, пока не станет вертикальным, что позволяет ему отразиться от Земли и тем же путем вернуться на спутник. Действующие расстояния для этих лучей различаются, но не намного, так что они в итоге формируют

широкий земной след. Его ширина может увеличиваться также за счет F -рассеяния.

Модельная ионограмма I , полученная с помощью траекторных расчетов, со всеми отражениями наложена на экспериментальную ионограмму, приведенную на рис. 2а. Видно, что и отражения ионосферных O - и X -компонент радиосигнала и земные отражения довольно хорошо согласуются на модельной и экспериментальной ионограммах. То же самое можно сказать и относительно ионограммы 3, наиболее удаленной от ПСП. Таким образом, УОЗ действительно формируется отражениями от ПСП по схеме, приведенной на рис. 3. Поэтому при удалении от нее действующие расстояния для УОЗ увеличиваются. Ясно, что точно такая же схема формирования УОЗ будет реализовываться и вблизи крутой стенки пика N_e на рис. 1б, поэтому траекторные расчеты для этого случая не проводились.

5. УОЗ НА СКЛОНЕ ГРЕБНЯ ЭКВАТОРИАЛЬНОЙ АНОМАЛИИ

На рисунке 4 приведена ионограмма ИК-19, полученная 22 августа 1979 г. в 00:47 UT (~20:20 LT) на внешнем склоне гребня ЭА (рис. 1д). На ней четко выделяется УОЗ в частотном диапазоне 10.8–12.8 МГц на действующих высотах 800–900 км. Критическая частота foF_2 , определенная по земному отражению, составляет ~10.8 МГц. Высоко-частотный участок основных следов, отраженных от ионосферы, после 11 МГц не регистрировался, поэтому критическую частоту слоя F_2 отсчитать невозможно; ясно только, что она больше, чем отсчитанная по земному следу. На частотах 12.0–13.4 МГц и высотах 1100–1200 км регистрируется дополнительный земной след, а на частотах 13.0–15.0 и высотах 1400–1500 км – еще один слабый, по-видимому, кратный ему след. Дополнительные земные следы наблюдаются не часто, так что главной особенностью рассматриваемой ионограммы остается наличие характерного крюка, образованного нормальным отражением от Земли и УОЗ.

На рисунке 5 приведен модельный высотно-широтный разрез ионосферы на внешнем склоне гребня ЭА. Он довольно сильно отличается от той картины, которую дает ИК-19 в предположении вертикального распространения, поскольку на склоне гребня ЭА зондирование на самом деле является наклонным – отклонения от вертикали могут достигать 30° . Это хорошо видно по лучевым траекториям, также приведенным на рис. 5 жирными кривыми. Все они принадлежат O -компоненте, частота зондирования равнялась 12 МГц.

Крайний левый луч относится к “нормальному” земному следу. Следующий, петлеобразный луч отражается от земной поверхности наклонно,

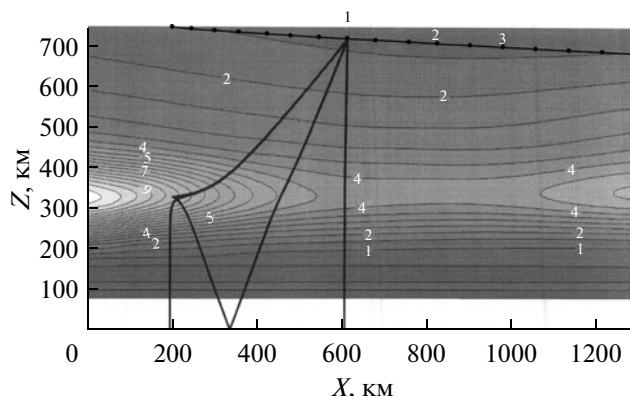


Рис. 3. Высотно-широтный разрез ионосферы в области ГИП. По обеим осям отложено расстояние в км, изолинии плазменной частоты представлены в МГц, точками отмечены сеансы зондирования на спутнике, жирные кривые – лучевые траектории для ионограммы I на частоте 8.6 МГц.

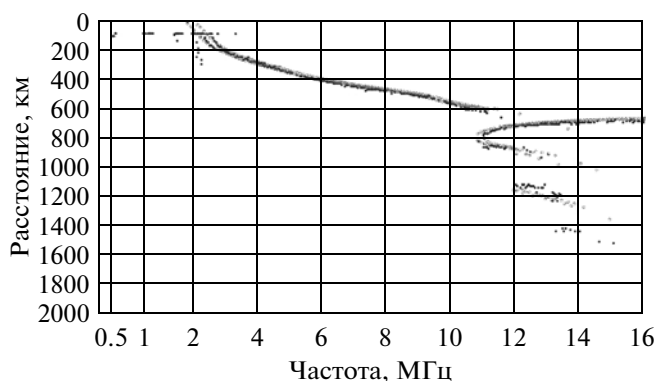


Рис. 4. Ионограмма, полученная 22.08.1979 г. на широте $30.4^\circ S$, долготе $60^\circ W$ и высоте 613 км. Светлые кружки – расчет. По оси X отложена частота в МГц, по оси Y – действующее расстояние в км.

затем преломляется горизонтальным градиентом электронной концентрации на склоне гребня ЭА и возвращается на спутник с большим запаздыванием. Следующий наклонный луч после отражения от Земли заходит в область, где плазменная частота выше зондирующей, и отражается назад по той же траектории. Из-за двойного отражения от Земли он возвращается на спутник с еще большей задержкой и образует удаленный след на действующих высотах 1100–1200 км и частотах 12–13.4 МГц. На ионограмме ИК-19 наблюдается еще один удаленный след на частотах 13–14 МГц и действующих расстояниях 1400–1500 км. Он отстоит от второго отражения примерно на такое же расстояние, как второе отражение отстоит от первого, следовательно, в этом случае имело место тройное “переотражение” от Земли. При тройном отражении от Земли задача становится чрезвычайно чувствительной к малейшим изменениям модель-

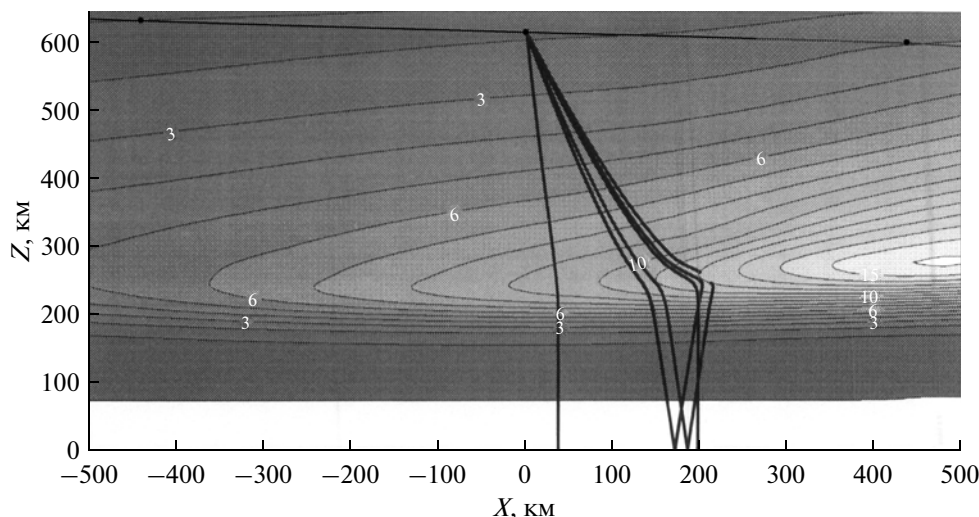


Рис. 5. Высотно-широтный разрез ионосферы в области гребня ЭА. По обеим осям отложено расстояние в км, изолинии плазменной частоты представлены в МГц, точками показаны положения спутника на орбите во время сеансов зондирования, жирные кривые — лучевые траектории на частоте 12 МГц для O -компоненты радиосигнала. Подробности в тексте.

ной ионосферы, поэтому этот след не рассчитывался. Следующий справа луч, распространяясь по сильно наклонной траектории, под действием горизонтального градиента электронной концентрации искривляется и приходит к поверхности Земли вертикально, возвращаясь назад по той же траектории. Этот луч вместе с петлеобразным, а также их X -компоненты как раз и образует УОЗ. Крайний луч справа отражается от ионосферы назад к спутнику, т.е. он участвует в формировании основного следа. Начиная примерно с частоты 10.5 МГц, лучи основных радиосигналов отражаются в области максимума слоя $F2$. При этом происходит сильная дефокусировка, и потери за счет столкновительного поглощения и пространственного ослабления вдоль траектории резко возрастают. На рисунке 6 приведен график суммарных потерь от частоты для основного и земно-

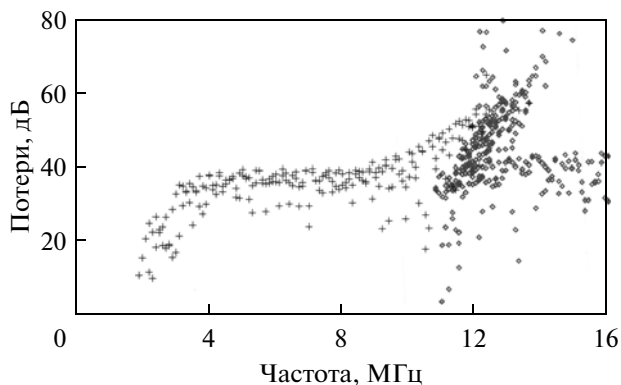


Рис. 6. Энергетические потери для основного (крестики) и земного (ромбики) следов в зависимости от частоты зондирования.

го следов. Видно, что вблизи критической частоты потери лучей, составляющих основной след, намного выше, чем отраженных от Земли. Поэтому высокочастотный участок основного следа, как правило, пропадает на ионограммах ИК-19, и понятие критической частоты в этом случае становится неопределенным.

Модельная ионограмма, полученная в расчетах, наложена на экспериментальную, изображенную на рис. 4. Видно, что удалось добиться практически полного соответствия между экспериментальной и модельной ионограммами. Таким образом, задача была поставлена корректно, а созданная модель ионосферы правильно отражает распределение электронной концентрации под спутником. При этом для более полного согласования слабые сигналы были удалены из модельной ионограммы, поскольку приемник ионозонда на каждой частоте фиксировал только три наиболее сильных отражения. Третий земной след на модельной ионограмме отсутствует по причине, указанной выше.

Как уже отмечалось выше, УОЗ наиболее часто образуются именно на внешнем склоне ЭА — сотни случаев за 2 года существования ИК-19. Из рисунка 5 видно, что на внешнем склоне гребня экваториальной аномалии высота слоя $F2$ понижается при переходе от гребня ЭА к низким широтам. При этом часто у подножия гребня ЭА, на геомагнитных широтах $30\text{--}35^\circ$ образуется глубокая “яма” с крутой экваториальной стенкой. Она регулярно наблюдается в вечерние/ночные часы (с 18 до 02 LT) в зимнем южном полушарии. В это же время f_oF2 в гребне экваториальной аномалии достигает ~ 16 МГц, а на средних широтах южного зимнего полушария критическая частота слоя $F2$ низкая, в результате

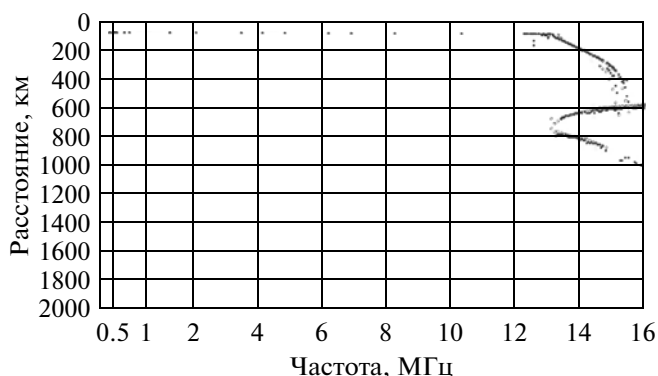


Рис. 7. Ионограмма, полученная 13.11.1979 г. в 23:35 UT на широте 7.4° S ($-3^{\circ}I$), долготе 246.2° E и высоте 535 км.

чего образуется резкий градиент электронной концентрации. Таким образом, для возникновения УОЗ необходимо наличие некоторого критического градиента концентрации, а благоприятствующим фактором является рост высоты слоя $F2$ в области этого градиента. В северном зимнем полушарии такая ситуация наблюдается гораздо реже. А на внутреннем, даже очень крутом склоне гребня ЭА, УОЗ наблюдался еще реже, вероятно потому, что высота слоя $F2$ здесь, наоборот, падает по мере роста концентрации плазмы.

6. УОЗ ПРИ ЗОНДИРОВАНИИ НИЖЕ МАКСИМУМА СЛОЯ $F2$

Рассмотрим, как формируется особый тип УОЗ, не связанный с заметным горизонтальным

градиентом ионосферной плазмы. Как было показано на рис. 1е, он реализовался внутри ЭА, около геомагнитного экватора. На рисунке 7 приведена одна из ионограмм, полученная 13.11.1979 г. в 23:35 UT на широте 7.4° S ($-3^{\circ}I$), долготе 246.2° E и высоте 509 км в дневной ионосфере (16:00 LT). Она отличается наличием ярко выраженного “крюка” на больших частотах, поскольку в дневное время вблизи экватора электронная концентрация очень высокая. Отметим еще одну, очень важную, особенность — земные следы начинаются на частоте, равной частоте отсечки. Эта особенность, а также высотно-широтный разрез ионосферы, построенный для рассматриваемого случая, послужили ключом к пониманию того, как был сформирован УОЗ.

Модельный высотно-широтный разрез экваториальной ионосферы для рассматриваемого случая приведен на рис. 8. Из него видно, что в данном случае спутник находился ниже максимума слоя $F2$. Эта довольно редкая ситуация реализуется тогда, когда спутник находится вблизи перигея, т.е. на высотах ~ 500 км, а максимум слоя $F2$ оказывается выше. Высота максимума слоя $F2$ вблизи экватора в дневное время с 15 до 17 LT может достигать 600 км и даже больше. Именно такая ситуация и реализовалась 13.11.1979 г. в 23:33–23:35 UT. На рисунке 8 также приведены лучевые траектории для частоты 14.5 МГц — короткий луч для отражения от вышележащего максимума слоя $F2$, основной земной луч и УОЗ.

Видно, что УОЗ формируется отражениями от Земли и от максимума слоя $F2$ при наличии небольшого наклона ионосферы в области эквато-

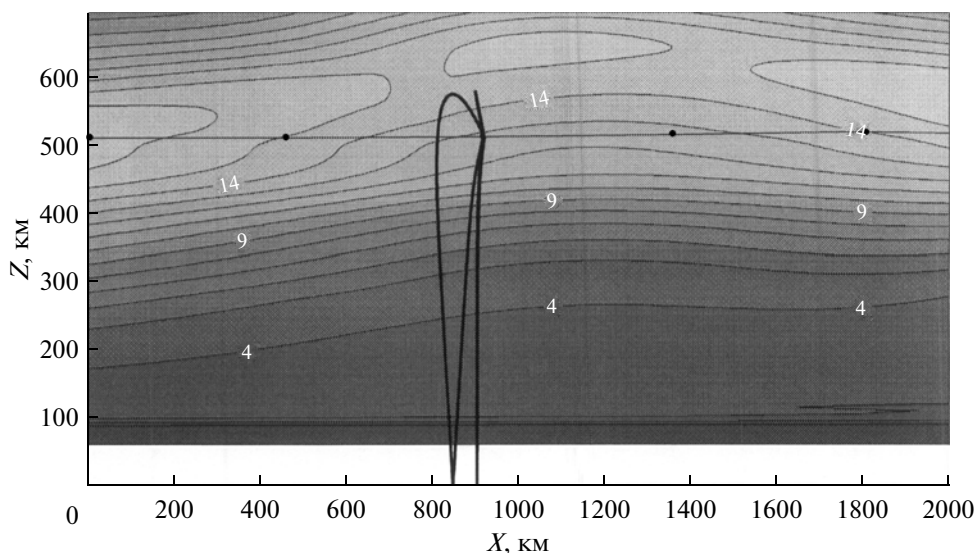


Рис. 8. Высотно-широтный разрез ионосферы над экватором. По обеим осям отложено расстояние в км, изолинии плазменной частоты представлены в МГц, точкой показано положение спутника на орбите, жирные кривые — лучевые траектории на частоте 14.5 МГц для O -компоненты радиосигнала.

ра. Такой наклон реализуется с обеих сторон экватора, поэтому и ионограммы с УОЗ наблюдались симметрично относительно геомагнитного экватора. Еще раз отметим, что ионограммы с удаленными земными следами наблюдались при зондировании на станции “МИР” как раз ниже максимума слоя $F2$. Однако они связывались исключительно с наличием сильных горизонтальных градиентов ионосферной плазмы [Данилкин и др., 2006]. Рассмотренный случай показывает, что наличие таких градиентов не является обязательным условием для образования УОЗ, во всяком случае, при зондировании вблизи экватора.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Итак, рассмотрен целый класс ионограмм со спутника ИК-19, которые характеризуются наличием удаленных отражений от Земли (УОЗ), иногда многократных. Эти ионограммы наблюдаются на всех широтах ионосферы от полярной стенки ионосферного провала до экватора. Большинство из них связано с наличием резкого горизонтального градиента ионосферной плазмы. Наиболее часто такой градиент образуется на стенках ионосферного провала и на крутом внешнем склоне гребня экваториальной аномалии в зимнем южном полушарии. Для интерпретации сложных ионограмм ИК-19 были привлечены траекторные расчеты. Они основаны на известном методе характеристик, реализованном в рамках геометрооптического приближения. Модельные ионограммы, построенные с помощью траекторных расчетов, полностью соответствуют экспериментальным. Это позволяет сделать вывод о том, что методика расчетов является адекватной, а построенное модельное распределение электронной концентрации достаточно точно воспроизводит реальное распределение. Траекторные расчеты показывают, что УОЗ образуется двумя типами лучей: отраженными от земной поверхности наклонно, а затем преломленными назад к спутнику резким горизонталь-

ным градиентом N_e в максимуме слоя $F2$, и наклонными лучами, претерпевшими искривление в области горизонтального градиента плазмы вплоть до вертикального направления, что позволяет им вернуться к спутнику после отражения от Земли. Дополнительные (многократные) удаленные отражения от Земли формируются подобным образом, но при двукратном и трехкратном “переотражениях” между Землей и слоем $F2$. Наибольшую трудность для интерпретации представлял особый тип УОЗ, который был зарегистрирован над экватором при отсутствии заметного градиента ионосферной плазмы. Анализ показал, что он образовался при довольно редком стечении обстоятельств, когда спутник в перигее (~500 км) оказался ниже максимума слоя $F2$. Экваториальный слой $F2$ оказывается на высотах 600 км и более в период с 15 до 18 LT. В этом случае УОЗ образуется отражениями от Земли и от вышележащей плотной наклонной ионосферы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Гершман Б.Н., Ерухимов Л.М., Яшин Ю.Я. Волновые явления в ионосфере и космической плазме. М.: Наука, 392 с. 1984.
- Данилкин Н.П., Котонаева Н.Г., Анишин М.М. Задержанный нижний след на спутниковых ионограммах – новое средство изучения макронеоднородностей ионосферы. Изв. вузов. Радиофизика. Т. 49. № 1. С. 9–20. 2006.
- Данилкин Н.П., Котонаева Н.Г. Обработка и интерпретация ионограмм радиозондирования ионосферы со сверхнизких орбит спутников // Геомагнетизм и аэронавигация. Т. 49. № 1. С. 74–87. 2009.
- Котонаева Н.Г. Математическая модель радиозондирования ионосферы с искусственного спутника Земли на высотах ниже максимума концентрации электронов // Геомагнетизм и аэронавигация. Т. 46. № 2. С. 234–242. 2006.
- Кравцов Ю.А., Орлов Ю.И. Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 304 с. 1980.