

УДК 550.386

## ГЕОМАГНИТНАЯ АКТИВНОСТЬ КАК ОТРАЖЕНИЕ ПРОЦЕССОВ В МАГНИТОСФЕРНОМ ХВОСТЕ. 2. МОДЕЛЬ КОНВЕКЦИИ ПЛАЗМЫ

© 2013 г. Г. Ф. Крымский, А. А. Данилов, Г. А. Макаров

Институт космических исследований и аэронавтики им. Ю.Г. Шафера, СО РАН, г. Якутск

e-mail: gmakarov@ikfia.ysn.ru

Поступила в редакцию 03.08.2011 г.

После доработки 21.05.2012 г.

Построена модель конвекции плазмы в магнитосферном хвосте. Несмотря на сильные упрощения, положенные в ее основу, модель удовлетворительно описывает основные характеристики процесса. Рассчитаны физические параметры, характеризующие магнитосферный хвост, описаны конвекция силовых трубок в нем и процесс высыпания электронов. Модель объясняет полугодовую вариацию магнитной активности.

DOI: 10.7868/S001679401304010X

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В 1-й части статьи [Данилов и др., 2013] показано, что усредненная по времени геомагнитная активность в периоды, когда отсутствуют возмущения, обнаруживает зависимость от угла наклона геомагнитного диполя к направлению солнечного ветра. Это проявляется как суточная вариация по мировому времени и как полугодовая вариация уровня активности. Активность повышается, когда диполь ориентирован перпендикулярно к направлению солнечного ветра.

Здесь мы попытаемся построить простейшую модель, описывающую геомагнитную активность, усредненную по времени, и на ее основе понять указанную выше зависимость.

Основным принципом, которым мы будем при этом руководствоваться, будет максимально возможное упрощение модели, избавление от излишней детализации. В соответствии с этим мы будем стремиться в наименьшей степени опираться на наблюдательные данные и будем предпочитать получать необходимые параметры из общих соображений. Перечислим основные упрощения модели.

Геомагнитная активность в сильной степени зависит от параметров солнечного ветра, в особенности, от ориентации межпланетного магнитного поля. С этим связано возникновение магнитных возмущений – периодов, когда активность сильно повышается. Модель будет настроена на относительно спокойные периоды. При этом в силу усреднения по времени, при котором подавляются всякие флуктуации, параметры модели можно полагать постоянными. Соответственно модель будет применима только к описанию стационарного состояния системы.

Плазма солнечного ветра и соответственно плазма в теле геомагнитного хвоста будет считаться идеально проводящей, и диссипация энергии будет допускаться только в области дневной магнитопаузы и в удаленной зоне хвоста, а также в областях высыпания частиц в полярную ионосферу. Будет постулироваться равенство электронной и ионной температур в плазме хвоста.

Геометрия магнитосферы и ее магнитных оболочек в области ближнего и дальнего хвоста будет полагаться максимально упрощенной. Область в удаленном хвосте, где происходит пересоединение магнитного поля и возникает конвекция плазмы, направленная к Земле, – так называемая X-точка – определяется из условия гидродинамической неустойчивости обтекания. Возникающая турбулентность в результате обеспечивает в этой зоне необходимую диссипацию магнитного поля.

Высыпание частиц в полярную ионосферу рассматривается с учетом эффекта электронного охлаждения: высыпания быстрых электронов и обратного потока из ионосферы медленных. Как будет показано, этот эффект позволяет преодолеть так называемый “кризис конвекции” [Erickson and Wolf, 1980], так как значительно уменьшает время высыпания.

### 2. ПОТОК И НАПРЯЖЕННОСТЬ МАГНИТНОГО ПОЛЯ В ХВОСТЕ

Главным параметром магнитосферного хвоста является продольное (радиальное) магнитное поле в его долях. Рассчитаем его, предположив, что поток геомагнитного поля, внешний по отношению к замкнутой магнитосфере, сносится в хвост. Лобовая точка магнитосферы находится на радиусе  $R_0$ , который определяется балансом давлений

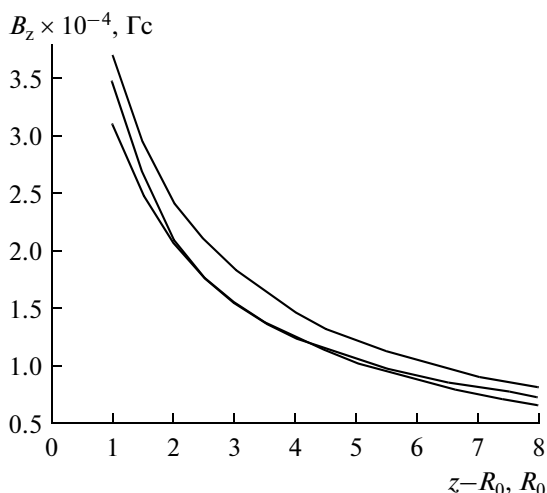


Рис. 1. Напряженность магнитного поля в хвосте. По оси абсцисс отложена величина  $z - R_0$ , представляющая расстояние от Земли в единицах  $R_0$ . По оси ординат — поле в гауссах. Верхняя и нижняя кривые соответствуют модели с наклоном диполя  $0^\circ$  и  $23.5^\circ$ . Между ними располагается эмпирическая кривая.

$$m_p n u_0^2 = \frac{(2B_0)^2}{8\pi}.$$

Здесь  $n = 8$  частиц/см<sup>3</sup> — концентрация частиц солнечного ветра,  $u_0 = 4 \times 10^7$  см/с — его средняя скорость,  $m_p$  — масса протона,  $B_0 = M/R_0^3$  — поле в лобовой точке невозмущенного диполя с моментом  $M$ . Вблизи магнитопаузы оно имеет удвоенное значение.

При указанных здесь параметрах имеем  $R_0 \approx 10R_E$  ( $R_E$  — земной радиус).

Магнитный поток  $\Phi_1$ , соответствующий внешним оболочкам  $L > R_0$ , считаем слутым в хвост, и его значение

$$\Phi_1 = \frac{2\pi M}{R_0}.$$

Границу магнитосферы будем представлять в виде параболоида, совпадающего вблизи лобовой точки со сферой радиуса  $R_0$ . Пусть  $z$  — координата вдоль оси параболоида. Начало координат поместим в лобовой точке. Поперечная координата  $y$  отсчитывается от оси параболоида. Параболоид  $z = \alpha y^2$  при  $z \approx 0$  совпадает со сферой  $(z - R_0)^2 + y^2 = R_0^2$ . Отсюда  $\alpha = 1/(2R_0)$ , и получаем

$$y = \sqrt{2R_0 z}.$$

Поле в хвосте определяется потоком  $\Phi_1$ , распределенным по половине его сечения:

$$B_z = \frac{2\Phi_1}{\pi y^2} = \frac{2M}{R_0^2 z} = B_s \frac{R_0}{z}.$$

Здесь  $B_s = \sqrt{8\pi n m_p} u_0 = 74 \times 10^{-5}$  гс — поле в лобовой точке.

Если теперь предположить, что ось диполя не перпендикулярна к вектору скорости ветра  $u_0$ , а отклонена на угол  $\psi$ , то нарисованную картину необходимо модифицировать. Изменение геометрии магнитосферы в зависимости от угла наклона магнитного диполя исследовано в работе [Olson, 1969]. Там показано, что расстояние до лобовой точки меняется незначительно.

Положим, что лобовая точка остается на том же расстоянии, но она теперь уже не будет находиться в экваториальной плоскости диполя, а будет соответствовать геомагнитной широте  $\psi$ . Она будет лежать на оболочке

$$L = R_0 / \cos^2 \psi.$$

Соответственно поток  $\Phi_1$ , слутый в хвост, будет уменьшен множителем  $\cos^2 \psi$ . Такое же уменьшение испытает поле в хвосте

$$B_z = B_s \frac{R_0}{z} \cos^2 \psi.$$

Найденное поле можно сравнить с эмпирической зависимостью [Магнитосферно-ионосферная..., 1993]:

$$B_z = 100.1 \times 10^{-5} \text{ гс} \left( \frac{r}{R_E} \right)^{-0.736},$$

определенной для  $10R_E < r < 80R_E$ . Эту зависимость можно записать по-другому:

$$B_z = B_{\text{ЭМП}} \left( \frac{R_0}{z - R_0} \right)^{0.736},$$

$$B_{\text{ЭМП}} = 35 \times 10^{-5} \text{ гс}.$$

Как видно из рис. 1, где представлены вычисленные нами зависимости  $B_z(z)$  для  $\psi = 0$  и  $\psi = 23.5^\circ$  вместе с эмпирической кривой, элементарная теория вполне соответствует наблюдениям.

Этот результат имеет важные следствия. При его выводе мы не делали никаких предположений о механизме диссипации энергии на дневной границе магнитосферы, в результате которого происходит формирование хвоста. Вместе с тем хорошо известно, что хвост является динамическим образованием: он непрерывно пополняется новыми силовыми трубками, а существующие в нем трубки постоянно конвектируют по направлению к Земле и удаляются из хвоста. Поддержание вычисленного нами потока требует согласования механизма удаления трубок и механизма диссипации.

Здесь мы будем предполагать, что механизм диссипации действует в насыщенном режиме: он непрерывно поставляет в хвост такой магнитный поток, который изымается из хвоста конвекцией.

**3. ПРЕДПОЛОЖЕНИЕ О МЕХАНИЗМЕ КОНВЕКЦИИ. УРАВНЕНИЕ БАЛАНСА**

Схематическое изображение магнитосферного хвоста представлено на рис. 2. На некотором расстоянии происходит пересоединение магнитного поля в долях хвоста. Топологически этот процесс изображен на схеме как X-точка. Образующиеся замкнутые магнитные трубки движутся к Земле. Их движение сопровождается сокращением длины и уменьшением объема. Находящаяся в них плазма при этом нагревается, ее плотность и давление увеличиваются. Возникающий градиент давления препятствует дальнейшему сокращению трубок. Горловины трубок, погруженные в полярную ионосферу, позволяют плазме высыпаться. Таким образом осуществляется сброс давления и устраняется препятствие, запрещающее дальнейшую конвекцию. Вполне естественно предполагать, сброс в ионосферу происходит с тепловой скоростью нагретых частиц, при этом скорость электронов значительно больше, чем ионов (протонов). Следовательно, сброс давления производят нагретые электроны, которые высыпаются в ионосферу, застревают там и создают тем самым избыточный положительный заряд в магнитной трубке. В результате в трубку поступают холодные электроны из ионосферы. Этот механизм эффективно охлаждает плазму и дает возможность продолжать конвекцию к Земле.

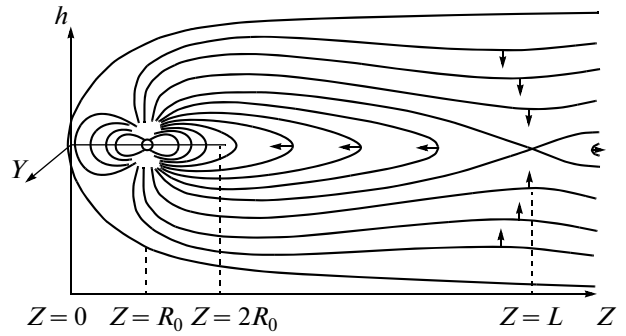
Пусть  $z$  – координата вдоль оси хвоста. Давление  $p$  в плазменном слое меняется по этой координате в соответствии с уравнением баланса

$$\frac{dp}{dz} = -\gamma \frac{1}{dV} \frac{d\delta V}{dz} p + \gamma \frac{p}{\Lambda}.$$

Здесь  $\delta V$  – “физический объем”, то есть объем, занимаемый силовой трубкой, в которой находится фиксированная группа частиц плазмы. Этот объем сокращается по мере конвекции (при уменьшении  $z$ ).  $\gamma = 5/3$  – показатель адиабаты.  $\Lambda$  – характерная длина, на которой происходит высыпание плазмы. Она зависит от времени жизни частиц и скорости конвекции.

Дальше мы исследуем поведение всех величин, входящих в указанное уравнение.

**3.1. Пересоединение магнитного поля в хвосте.** Магнитные трубки, уходящие в хвост, на некотором расстоянии подвергаются пересоединению, а затем дрейфуют к Земле. Соответствующая координата  $z = L$ , где это происходит, является важным параметром, влияющим на протекание процессов в хвосте. Микроскопическая диссипация



**Рис. 2.** Схематическое изображение магнитосферного хвоста. Силовые линии образуют X-точку при  $z = L$ . Направление конвекции изображено стрелками.

токов слишком медленна и дает неразумно большое значение  $L$ . Следует предположить поэтому, что магнитные трубки сильно дробятся и перепутываются турбулентностью, в результате чего диссипация резко ускорена.

Развитие турбулентности возникает как результат неустойчивости течения плазмы в хвосте, скоростью которой переменна по его сечению.

Неустойчивость многоструйного течения в магнитном поле легко установить в результате несложного анализа уравнений магнитной гидродинамики, который приводит к дисперсионному соотношению

$$\omega = \langle u \rangle k \pm k \sqrt{\langle u \rangle^2 - \langle u^2 \rangle + v_A^2}.$$

Здесь  $\omega$ ,  $k$  – угловая частота и волновое число для волн, распространяющихся вдоль поля. Угловые скобки означают усреднение по сечению с учетом плотности среды,  $v_A$  – альфеновская скорость.

Из этого соотношения видно, что если дисперсия скоростей  $\langle \delta u^2 \rangle = \langle u^2 \rangle - \langle u \rangle^2$  больше, чем квадрат альфеновской скорости, возникает неустойчивость. В сопутствующей системе, движущейся со скоростью  $\langle u \rangle$ , возмущения магнитного поля нарастают с инкрементом

$$\gamma_0 = k \sqrt{\langle \delta u^2 \rangle - v_A^2}.$$

**3.2. Область пересоединения.** Течение в хвосте определяется параметрами обтекающего хвост ветра. Эти параметры легко находятся из уравнения

$$u^2 + \frac{2\gamma}{\gamma - 1} \frac{p_f}{\rho_f} \left(\frac{p}{p_f}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \text{const},$$

где

$$p_f = \frac{2}{\gamma + 1} \rho_0 u_0^2, \quad \rho_f = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \rho_0,$$

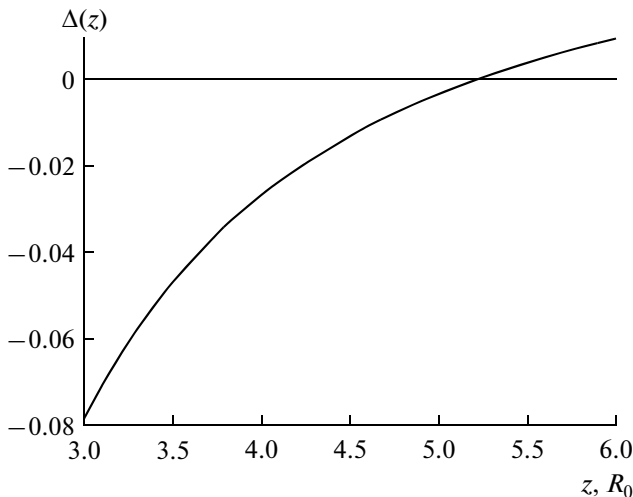


Рис. 3. Поведение функции  $\Delta(z)$  – квадрата инкремента.

$\gamma = 5/3$  – показатель адиабаты газа,  $\rho_0, u_0$  – плотность и скорость солнечного ветра перед фронтом ударной волны,  $p_f, \rho_f$  – параметры в лобовой точке ударной волны, которая является сильной.

Давление  $p(z)$  пропорционально квадрату косинуса угла между направлением невозмущенного ветра и нормалью к ударному фронту, который равен

$$(dy/ds)^2 = \frac{(dy/dz)^2}{1 + (dy/dz)^2}.$$

Поскольку  $y = \sqrt{2R_0z}$ , то соответствующий множитель равен  $R_0/(R_0 + 2z)$ .

Скорость в лобовой точке ударного фронта  $u_f = u_0(\gamma - 1)/(\gamma + 1)$  и, подставляя в уравнение все величины, получаем

$$p(z) = \frac{2}{\gamma + 1} \rho_0 u_0^2 \frac{R_0}{R_0 + 2z}, \quad \rho(z) = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \rho_0 \left( \frac{R_0}{R_0 + 2z} \right)^{1/\gamma}$$

$$u^2(z) + \frac{4\gamma}{(\gamma + 1)^2} u_0^2 \left( \frac{R_0}{R_0 + 2z} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = u_0^2.$$

Скорость обтекания  $u(z)$  падает, когда течение пересекает границу хвоста, и под поверхностью хвоста составляет

$$u_*(z) = \sqrt{u^2(z) - v_{A*}^2}.$$

Здесь

$$v_{A*}^2 = \frac{B_z^2(z)}{4\pi\rho(z)} = \frac{B_s^2}{4\pi\rho(z)} \frac{R_0^2}{z^2}.$$

Это падение скорости обусловлено перепадом давления.

Вблизи  $X$ -точки, где происходит пересоединение магнитного поля в хвосте, профиль скорости можно принять линейно падающим к осевой линии

$$u(h) = u_*(L)h/h_0,$$

где  $h$  – радиальное расстояние,  $h_0$  – радиус хвоста. Чтобы найти  $L$ , постулируем, что профиль скорости ведет себя так же в любом сечении, и подсчитаем дисперсию скоростей в сечении хвоста  $\langle \delta u^2(z) \rangle$ . Угловые скобки здесь означают усреднение по сечению. При этом необходимо принимать во внимание, что  $\rho$  также будет зависеть от  $h$ , поскольку происходит полное затормаживание течения у осевой линии.

В сопутствующей системе магнитное поле в хвосте падает с “декрементом”

$$\delta_B = \frac{1}{B_z} \left| \frac{dB_z}{dz} \right| = \frac{R_0 \langle u \rangle}{z}.$$

Здесь  $\langle u \rangle$  – скорость течения, усредненная по сечению хвоста.

Длину  $L$  оценим как расстояние, на котором инкремент роста возмущений поля  $\gamma_0$  становимся равным по величине декременту  $\delta_B$ . Так как инкремент зависит от волнового числа  $k$ , необходимо оценить, какие волновые числа существенно влияют на структуру хвоста. Характерную длину волны будем считать равной ширине хвоста  $y(z)$  и, следовательно, положим

$$k = \frac{\pi}{\sqrt{2R_0z}}.$$

В итоге получаем уравнение

$$\frac{R_0 \langle u(z) \rangle}{z} = \frac{\pi}{\sqrt{2R_0z}} \sqrt{\langle \delta u^2(z) \rangle - \frac{B_s^2}{4\pi \langle \rho(z) \rangle} \frac{R_0^2}{z^2}},$$

в котором угловые скобки означают усреднение величин по сечению хвоста.

Взяв теперь подкоренное выражение в уравнении в качестве известной функции  $\Delta(z)$ , построим ее график. Он показан на рис. 3. Видно, что эта величина растет с  $z$ . Она становится положительной при  $z = L_0 = 5.22R_0$ . Здесь величина  $\Delta' = 0.0147u_0^2R_0$ , а скорость  $\langle u \rangle = 0.436u_0$ .

Уравнение удовлетворяется при  $z = L_0 + \Delta L$ , где  $\Delta L$  определяется равенством

$$\Delta' \Delta L = \left[ \frac{R_0 \langle u(L_0) \rangle \sqrt{2RL_0}}{L_0 \pi} \right]^2.$$

Находим  $\Delta L = 0.50R_0$ , откуда координата  $X$ -точки  $z = L = 5.72R_0$ .

3.3. *Оболочки и объемы.* Замкнутые трубки образуют оболочки, объемы которых меняются в процессе конвекции. Будем различать 3 объема,

характеризующих оболочку, которая пересекает нейтральный слой хвоста при координате  $z$ : объем  $V$ , охватываемый оболочкой, парциальный объем  $dV$ , заключенный между соседними оболочками  $z$  и  $\delta z$ , и “физический” объем  $\delta V$ , занимаемый конвектируемой плазмой и изменяющийся в процессе конвекции. Парциальный и физический объемы необходимо знать лишь с точностью до постоянного множителя. Имеем очевидные соотношения:

$$dV = dV/dz, \quad \delta V = dV|\dot{z}|,$$

где  $\dot{z}$  – скорость конвекции.

Чтобы определять указанные объемы, нет необходимости знать точную форму каждой оболочки. Воспользуемся следующими приближениями для “дальних” и “ближних” оболочек.

Дальние оболочки будем представлять объемами, ограниченными в системе координат  $z, y, h$  (см. рис. 4а) поверхностью параболического цилиндра  $y = \pm\sqrt{(2R_0z)}$  и двумя плоскостями  $h = \pm R_0(1 - z/z_0)$ .

Объем, ограниченный такой оболочкой, получаем послойным интегрированием:

$$V(z_0) = \int_{-R_0}^{R_0} s(h)dh, \quad s(h) = 2 \int_0^{z_1(h)} y(z)dz.$$

Здесь  $z_1 = z_0(1 - h/R_0)$ .

Имеем

$$s(h) = 2 \int_0^{z_1} \sqrt{2R_0z} dz = 2\sqrt{2R_0} \frac{2}{3} z_1^{3/2}.$$

Подстановка  $z_1$  дает

$$s(h) = \frac{4}{3} \sqrt{2R_0z_0} \left(1 - \frac{h}{R_0}\right)^{3/2}.$$

Соответственно

$$V(z_0) = \frac{8}{3} \sqrt{2R_0z_0} \int_0^{R_0} \left(1 - \frac{h}{R_0}\right)^{3/2} dh.$$

После взятия интеграла

$$V(z_0) = \frac{16}{15} \sqrt{2R_0} z_0^{3/2}.$$

Далее индекс у  $z_0$  будет опущен.

Для ближних оболочек построим объем, состоящий из трубок дипольного магнитного поля, пересекающих нейтральную поверхность в треугольнике с углами в точках  $z_1 = R_0, y_1 = 0, z_{2,3} = z, y_{2,3} = \pm\sqrt{(2R_0z)}$  (см. рис. 4б).

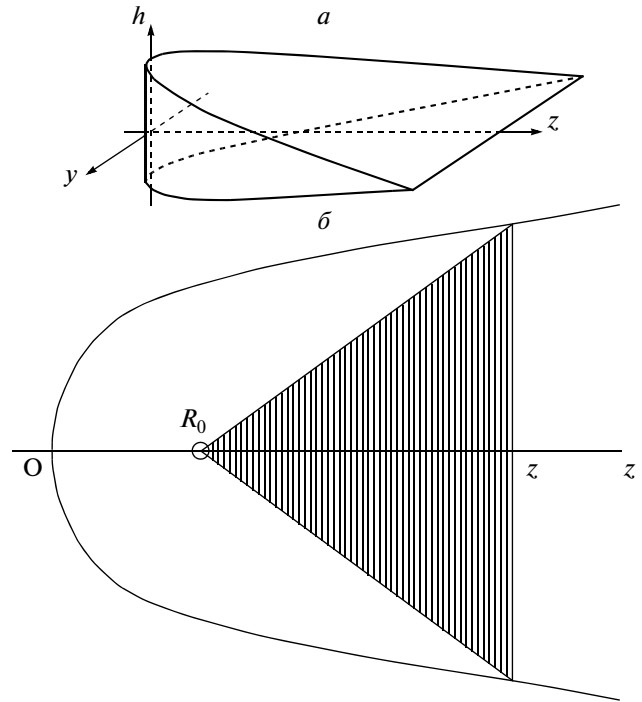


Рис. 4. а – объем  $V$  для “дальней” оболочки; б – сечение экваториальной плоскостью силовых трубок, входящих в ближнюю оболочку.

Полный объем, ограниченный оболочкой чистого диполя с экваториальным радиусом  $r_3$ , равен

$$V_{\text{Э}} = \frac{64\pi}{105} r_3^3.$$

Сектор трубок, находящихся в пределах азимутального угла  $d\varphi$  и с экваториальными радиусами от 0 до  $r_3(\varphi)$ , имеет объем

$$dV(\varphi) = \frac{64\pi}{105} r_3^3(\varphi) \frac{d\varphi}{2\pi}.$$

В нашем случае

$$r_3(\varphi) = (z - R_0) \frac{1}{\cos\varphi},$$

$$-\varphi_m < \varphi < \varphi_m, \quad \text{tg } \varphi_m = \frac{y(z)}{z - R_0}.$$

Искомый объем

$$V(z) = \frac{64\pi}{105} \int_{-\varphi_m}^{\varphi_m} r_3^3 \frac{d\varphi}{2\pi} = \frac{64}{105} (z - R_0)^3 I(z),$$

$$I(z) = \int_0^{\varphi_m} \frac{d\varphi}{\cos^3 \varphi}.$$

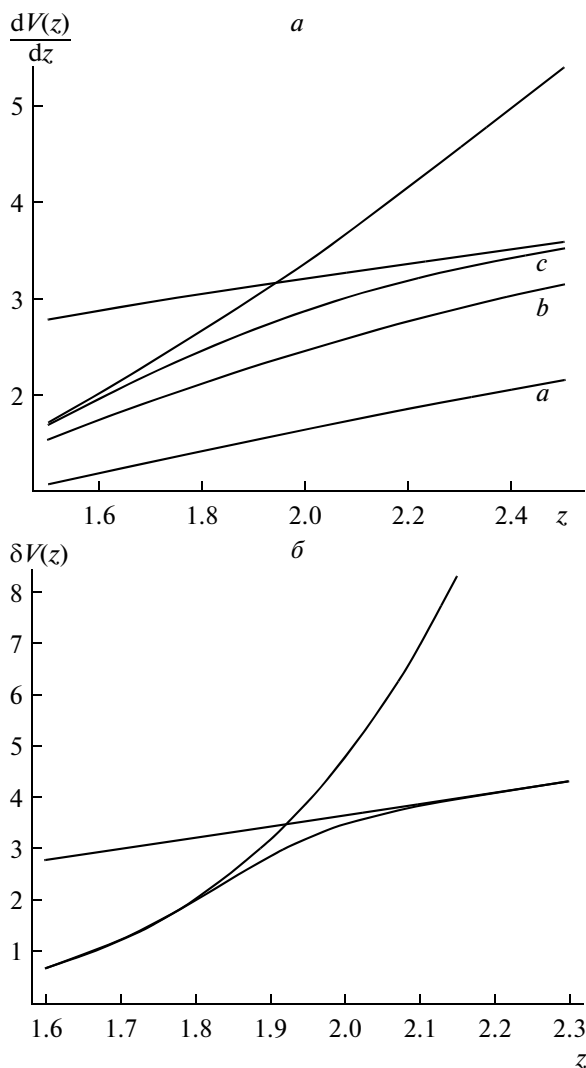


Рис. 5. *a* – парциальные объемы ближних и дальних оболочек; *a, b, c* – кривые сращивания 1–3 порядков; *б* – сращивание физических объемов оболочек.

При подстановке  $t = \sin\varphi$  последний интеграл превращается в

$$I = \int_0^{t_m} \frac{dt}{(1-t^2)^2} = \frac{1}{2} \frac{t_m}{1-t_m^2} + \frac{1}{4} \ln \frac{1+t_m}{1-t_m}.$$

Верхний предел

$$t_m = \sin\varphi_m = \frac{y}{\sqrt{y^2 + (z-R_0)^2}} = \sqrt{\frac{2R_0z}{z^2 + R_0^2}}.$$

Получаем значение интеграла

$$I(z) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2R_0z(z-R_0)^2}{(z-R_0)^2}} + \frac{1}{2} \ln \frac{\sqrt{z^2 + R_0^2} + \sqrt{2R_0z}}{z-R_0}.$$

Производя дифференцирование по  $z$  двух выражений для  $V(z)$ , найдем парциальные объемы для ближних и дальних оболочек. Зависимость этих объемов от  $z$  показана на рис. 5*a*.

3.4. *Сращивание асимптотических кривых для парциального объема.* Как видно из рисунка, асимптотические кривые для парциального объема пересекаются, это происходит при  $z = 1.942R_0$ . В ближней и дальней зонах мы должны выбирать меньшее из двух значений. Произведем сращивание асимптотик. Сначала применим процедуру простого сращивания  $V_1(z)$  и  $V_2(z)$ , состоящую в вычислении

$$V_{\text{сращ}} = \frac{V_1 V_2}{V_1 + V_2}.$$

Она дает правильное поведение  $V_{\text{сращ}}$ , когда  $V_1 \gg V_2$ , или  $V_2 \gg V_1$ , но примерно в два раза занижает значение, когда  $V_1 \approx V_2$ . Если из исходных данных вычесть сращенную функцию и повторить процедуру сращивания, то мы получим сращенную функцию 2-го порядка. Повторяя процедуру еще раз, найдем функцию 3-го порядка. Итерационный процесс сращивания реализуется просто, но останавливать его приходится на глаз. Как видно из рис. 5*a*, где кривые *a, b, c* дают сращивание в 1–3 порядках, разумно выбрать в качестве результирующей кривой кривую *c*.

3.5. *Меридиональная компонента поля в ближней и дальней зоне.* Изменение магнитного потока вследствие конвекции можно определить безразмерным параметром  $\Phi$  посредством равенства

$$\dot{\Phi} = B_s R_0 u_0 k.$$

Эта же величина может быть выражена через переменные, зависящие от  $z$ :

$$\dot{\Phi} = B_\theta(z) 2y(z) |\dot{z}(z)|.$$

Здесь  $B_\theta$  – меридиональная компонента поля, пересекающего нейтральный слой при координате  $z$ ,  $2y$  – ширина слоя,  $\dot{z}$  – скорость конвекции. Поведение  $\dot{z}(z)$  можно найти, исходя из очевидного равенства  $\rho(z)\delta V(z) = \text{const}$ , где  $\rho(z)$  – плотность плазмы. Получаем

$$\dot{z} \sim 1/\rho(z) dV/dz.$$

В дальней зоне давление в плазменном слое  $p = B_z^2/8\pi \sim z^{-2}$ , соответственно в адиабатическом приближении  $\rho(z) \sim z^{-2/\gamma}$ . Так как  $dV/dz \sim z^{1/2}$ , имеем

$$\dot{z} \sim z^{\frac{2}{\gamma} - \frac{1}{2}}.$$

Поведение  $B_\theta$ , следовательно, находится как

$$B_\theta \sim 1/y\dot{z} \sim z^{-2/\gamma}.$$

Естественно потребовать, чтобы в  $X$ -точке выполнялось равенство

$$B_\theta(L) = B_z(L).$$

Таким образом, в дальней зоне

$$B_\theta(z) = B_s \frac{R_0}{L} \left(\frac{L}{z}\right)^{2/\gamma}.$$

В ближней зоне поле близко к полю диполя

$$B_\theta(z) = \frac{B_s R_0^3}{2(z - R_0)^3}.$$

3.6. *Длина высыпания.* Характерная длина высыпания частиц определяется их временем жизни  $T$  и скоростью конвекции  $\dot{z}$ :

$$\Lambda = T|\dot{z}|.$$

Для времени жизни имеем равенство

$$T = \frac{dV/dz}{ds_0/dz} \frac{1}{\langle v \rangle}.$$

Здесь  $dV/dz$  и  $ds_0/dz$  – парциальный объем оболочки и величина элемента поверхности ионосферы, через который происходит высыпание частиц из указанного объема;  $\langle v \rangle$  – средняя скорость истечения частиц.

Элемент поверхности – площадь сечения трубки в экваториальном слое (то есть, ширина слоя), умноженная на коэффициент дилуции, который равен удвоенному отношению меридионального поля в хвосте к полю в полярной ионосфере (коэффициент 2 отражает наличие двух полярных шапок):

$$\frac{ds_0}{dz} = 2y(z) \frac{2B_\theta(z)}{B_e}.$$

Поле в ионосфере

$$B_e = \frac{2M}{R_E^3} = \frac{2M R_0^3}{R_0^3 R_E^3} = 10^3 B_s.$$

В результате

$$\frac{ds_0}{dz} = 4 \times 10^{-3} \sqrt{2R_0 z} \frac{B_\theta(z)}{B_s}.$$

Чтобы найти скорость истечения частиц, рассмотрим газ с максвелловским распределением скоростей. Пусть  $f(v) = C_0 \exp(-v^2/v_0^2)$  – его функция распределения. Тогда концентрация частиц

$n$ , их плотность потока через площадку  $q$  и давление газа  $p$  определяются интегралами

$$n = C_0 \int f(v) v^2 dv d\Omega,$$

$$q = C_0 \int f(v) v_\perp v^2 dv d\Omega,$$

$$p = 2C_0 m \int f(v) v_\perp^2 v^2 dv d\Omega,$$

где  $m$  – масса частиц,  $d\Omega$  – элемент телесного угла. Первый интеграл берется по сфере, а два других – по полусфере. Эти величины равны

$$n = 4\pi C_0 v_0^3 I_2; \quad q = \pi C_0 v_0^4 I_3;$$

$$p = (4\pi/3) C_0 m v_0^5 I_4,$$

где

$$I_k = \int_0^\infty e^{-x^2} x^k dx; \quad I_2 = \frac{\sqrt{\pi}}{4}; \quad I_3 = \frac{1}{2};$$

$$I_4 = \frac{3\sqrt{\pi}}{8}.$$

Параметр  $v_0$  целесообразно выразить через скорость звука

$$c_s = \sqrt{\frac{\gamma p}{nm}} = \sqrt{\frac{\gamma}{2}} v_0.$$

Тогда получим среднюю скорость истечения

$$\langle v \rangle = \frac{q}{n} = \frac{v_0}{2\sqrt{\pi}} = \frac{c_s}{\sqrt{2\pi\gamma}}.$$

В  $X$ -точке, то есть, в точке остановки плазмы, скорость звука такая же, как за фронтом головной ударной волны:

$$c_s = \sqrt{\frac{2\gamma(\gamma-1)}{\gamma+1}} u_0.$$

По мере уменьшения  $z$  скорость звука растет пропорционально степени плотности плазмы  $\rho^{(\gamma-1)/2}$ , то есть,  $\sim \delta V^{-(\gamma-1)/2}$ . Следовательно, к  $c_{зв}$  должен быть добавлен соответствующий множитель, зависящий от  $z$ . Наконец, следует учесть, что высыпание электронов из хвоста происходит в 40 раз быстрее, чем ионов, а электроны составляют половину всех частиц плазмы. Это дает дополнительный множитель, равный 20.

В итоге следует положить

$$\langle v \rangle = \frac{20}{\gamma+1} \sqrt{\frac{\gamma}{\pi}} u_0 \left[ \frac{\delta V(L)}{\delta V(z)} \right]^{\frac{\gamma-1}{2}}.$$

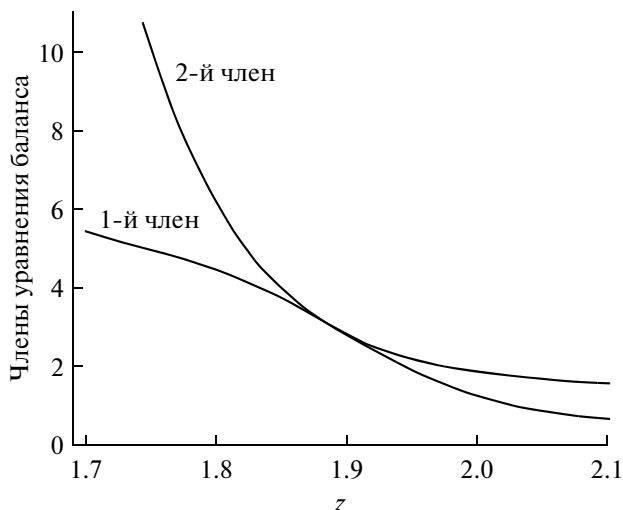


Рис. 6. Поведение 1-го и 2-го членов уравнения баланса (нижняя и верхняя кривые, соответственно).

Скорость дрейфа

$$\dot{z} = -\frac{B_s u_0 \kappa}{2 B_\theta(z)} \sqrt{\frac{R_0}{2z}}.$$

Определим  $\delta V$  следующим образом

$$\delta V = \frac{dV B_s}{dz B_\theta} \left( \frac{R_0}{z} \right)^{1/2}.$$

Тогда получим при  $\gamma = 5/3$ :

$$\Lambda = 25\kappa \sqrt{\frac{\pi}{6}} \frac{1}{R_0} [\delta V(L)]^{-1/3} \frac{\delta V(z)^{7/3}}{dV/dz}.$$

Функция  $\delta V(z)$ , входящая в это выражение, определена только в ближней и дальней зонах. Ее необходимо подвергнуть сращиванию. Рисунок 5б показывает результат сращивания.

#### 4. АНАЛИЗ УРАВНЕНИЯ БАЛАНСА. ПРИНЦИП УСТОЙЧИВОСТИ

В процессе конвекции магнитных трубок к Земле в них возрастает давление плазмы и одновременно ускоряется сброс частиц в ионосферу. В некоторой точке  $z_m$  эти два процесса уравновешиваются и давление достигает максимума. Потребуем, чтобы при малых изменениях параметра  $\kappa$ , определяющего скорость конвекции, точка  $z_m$  оставалась неизменной. Иначе говоря, точка  $z_m$  должна являться стационарной точкой уравнения баланса. Она обеспечивает существование стационарного решения. Если допустить сильные отклонения от этой точки, система должна входить в режим автоколебаний.

Таким образом, необходимо, чтобы выполнялись 2 условия:

$$p'(z_m) = 0; p''(z_m) = 0.$$

Если нанести на график кривые  $(d\delta V)/\delta V$  и  $1/\Lambda$ , изображающие поведение 1 и 2 членов в правой части уравнения баланса, то выполнение упомянутых условий означает, что кривые соприкасаются в точке  $z_m$ . Это будет достигнуто при некотором  $\kappa$ , обеспечивающем стационарный режим конвекции. На рисунке 6 изображен результат такого выбора, дающего  $\kappa = 0.0105$ . При этом получается  $z_m = 1.89R_0$ .

Координата  $z_a$ , при которой происходит наиболее интенсивное высыпание частиц, определяется условием

$$\frac{d}{dz} \left( \frac{p}{\Lambda} \right) = 0,$$

которому соответствует уравнение

$$\frac{d\Lambda}{dz} = \gamma \left( 1 - \frac{\Lambda}{\delta V} \frac{d\delta V}{dz} \right).$$

Корнем этого уравнения при указанном значении  $\kappa$  является  $z_a = 1.736R_0$ .

Это значение может быть приведено к дипольному полю. Сращенное (“реальное”) поле меньше дипольного. Приведение к дипольному полю означает уменьшение  $z_a$  на некоторую величину  $\Delta z$ , которую можно оценить, подсчитав “излишек” магнитного потока:

$$\begin{aligned} & \int_{R_0}^{z_a} (B_{\theta d}(z) - B_\theta(z))(z - R_0) dz = \\ & = \int_{z_a - \Delta z}^{z_a} B_{\theta d}(z)(z - R_0) dz. \end{aligned}$$

Здесь  $B_{\theta d}(z)$  — чисто дипольное поле. Это дает  $\Delta z = 0.026R_0$ . С этой поправкой  $z_a = 1.710R_0$  и получаем геомагнитную широту, где высыпания максимальны,

$$\varphi_a = \arccos \frac{1}{\sqrt{10(z_a/(R_0 - 1))}} = 67.9^\circ.$$

#### 5. ОСНОВНЫЕ ПАРАМЕТРЫ МОДЕЛИ

Модель предсказывает значение электрического потенциала поперек магнитосферы, определяющего поле “утро–вечер”, равное

$$U = \frac{1}{c} B_s R_0 u_0 \kappa = 19.8 \text{ кВ.}$$



Средняя энергия высыпающихся частиц равна их средней энергии в  $X$ -точке, умноженной на фактор адиабатического нагрева  $[\delta V(L)/\delta V(z_a)]^{2/3} = 4.65$ , то есть составляет около 5 кэВ.

Полная выделяемая мощность в обеих полярных шапках

$$N = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \int_{R_0}^L p(z) \langle v \rangle \frac{ds_0}{dz} dz,$$

где давление плазмы

$$p(z) = \frac{B_s^2 R_0^2}{8\pi L^2} \left[ \frac{\delta V(z)}{\delta V(L)} \right]^{-\frac{5}{3}} \exp\left(-\frac{5}{3} \int_z^L dz\right).$$

Вычисление дает  $N = 16$  ГВт.

Как уже было отмечено, в случае наклонного диполя  $B_z$  в хвосте уменьшается на множитель  $\cos^2\psi$ . Чтобы, по возможности, не менять формул в нашей модели, примем новое значение параметра  $B_s$ :

$$B_s(\psi) = B_s(0) \cos^2\psi.$$

Тогда поле  $B_0$  в ближней зоне приобретет множитель  $1/\cos^2\psi$ , а выражение для  $ds_0/dz$  дополнится множителем  $\cos^2\psi$ .

С учетом этих изменений подсчет выделяемой мощности в электронных высыпаниях для  $\psi = 23.5^\circ$  дает  $N = 9.5$  ГВт, то есть 60% от мощности, получаемой в случае диполя без наклона.

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. Построена упрощенная модель конвекции плазмы в магнитосферном хвосте, в которой наиболее существенным элементом являются высыпания частиц в полярную ионосферу. Модель опирается на механизм электронного охлаждения плазмы, в соответствии с которым диссипация энергии обеспечивается высыпаниями электронов.

2. Модель дает правильные по порядку величины значения электрического потенциала поперек магнитосферы, энергии высыпающихся частиц и мощности, выделяемой в высыпаниях. Выделяемая мощность сильно зависит от угла наклона диполя к вектору скорости солнечного ветра.

Работа выполнена в рамках гранта Государственной поддержки ведущих научных школ России № НШ-1741.2012.2.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Данилов А.А., Крымский Г.Ф., Макаров Г.А. Геомагнитная активность как отражение процессов в магнитосферном хвосте. 1. Источник суточной и полугодовой вариаций геомагнитной активности // Геомагнетизм и аэрномия. Т. 53. № 4. С. 469–475. 2013.
- Магнитосферно-ионосферная физика. Краткий справочник / Отв. ред. Ю.П. Мальцев. Санкт-Петербург. “Наука”, 184 с. 1993.
- Erickson C.M., Wolf R.A. Is steady convection possible in the Earth’s magnetotail? // Geophys. Res. Lett. V. 7. № 11. P. 897–900. 1980.
- Olson W.P. The shape of the tilted magnetopause // J. Geophys. Res., Space Physics. V. 74. № 24. P. 5642–5651. 1969.