

УДК 537.67:521.1

## МУЛЬТИПОЛЬНЫЕ МОДЕЛИ ГЕОМАГНИТНОГО ПОЛЯ: ПОСТРОЕНИЕ $N$ -ГО ПРИБЛИЖЕНИЯ

© 2013 г. К. А. Антипов, А. А. Тихонов

*С.-Петербургский государственный университет, г. С.-Петербург*

*e-mail: antipov\_k@rambler.ru, aatikhonov@rambler.ru*

Поступила в редакцию 02.11.2010 г.

После доработки 03.10.2012 г.

Программно и аналитически обоснована возможность мультипольного представления геомагнитного потенциала, а также магнитной индукции и ее градиента, с произвольной степенью точности. Полученные выражения отличаются краткостью записи и удобством использования как при ручном аналитическом исследовании, так и в компьютерных исследованиях с использованием методов компьютерной алгебры и численных методов. Для практического использования в прикладных задачах космодинамики получены неизвестные ранее аналитические выражения компонент первых семи мультипольных тензоров, выраженные через гауссовы коэффициенты. Разработан алгоритм, позволяющий построить аналитические выражения компонент мультипольного тензора произвольного ранга, а также компоненты вектора магнитной индукции в любом конечном приближении.

DOI: 10.7868/S0016794013020028

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Для построения математических моделей вращательного относительно центра масс движения искусственных спутников Земли (ИСЗ), находящихся под воздействием разнообразных моментов сил, вызванных взаимодействием с магнитным полем Земли (МПЗ), например, магнитных, лоренцевых и др., требуется знать индукцию МПЗ (а иногда и градиент индукции) в функции радиус-вектора точки околоземного пространства. Ввиду сложного строения МПЗ и отсутствия указанной функциональной зависимости в аналитическом виде, возникает проблема математического моделирования МПЗ как неизбежного этапа при построении наиболее подходящей математической модели динамики ИСЗ, на базе которой далее будет производиться аналитическое и/или численное исследование той или иной задачи космодинамики.

Использование хорошо известной простейшей модели МПЗ “прямой магнитный диполь” [Белецкий и Хентов, 1985; Сарычев и Овчинников, 1985] позволило решить большое количество задач. Однако, не всегда использование этой модели приводит к качественно верным результатам, поскольку не позволяет учесть влияние суточного вращения Земли на индукцию МПЗ (вектор  $\mathbf{B}$ ). Как показано в работе [Тихонов, 2002] использование более реалистичной модели МПЗ “наклонный магнитный диполь” не уточняет модели “прямой диполь”, а построение математических моделей вращательного движения ИСЗ, корректно учитывающих все слагаемые одного

порядка в выражении для вектора  $\mathbf{B}$ , приводит к необходимости учета квадрупольной и, возможно, мультипольных составляющих более высоких порядков (в зависимости от постановки задачи). Кроме того, актуальность учета мультипольных составляющих МПЗ в исследованиях, направленных на получение достоверных качественных и количественных результатов, обостряется еще и потому, что МПЗ претерпевает изменения, в результате которых по имеющимся данным за последние 100 лет дипольная составляющая МПЗ убывает, а квадрупольная возрастает.

В задачах динамики ИСЗ, взаимодействующих с МПЗ, основную роль играет не потенциал МПЗ, а магнитная индукция  $\mathbf{B}$  МПЗ, задаваемая обычно в виде проекций на оси орбитальной системы координат. Вообще, ввиду преимущественного использования декартовых систем координат в решении задач динамики ИСЗ (абсолютная, орбитальная, кенигова, главных осей инерции и др.), возникает необходимость предварительно адаптировать представление потенциала, как исходного объекта, характеризующего МПЗ, к использованию в дальнейшем декартовых координат вместо сферических при отыскании вектора  $\mathbf{B}$ , а затем и его градиента.

Математический аппарат, позволивший решить эту задачу, а также аналитически построить вектор  $\mathbf{B}$  в квадрупольном приближении, был предложен в работе [Петров и Тихонов, 1999]. В работе [Тихонов и Петров, 2002] было дано развитие этого математического аппарата, позволившее каждой из первых трех мультипольных со-

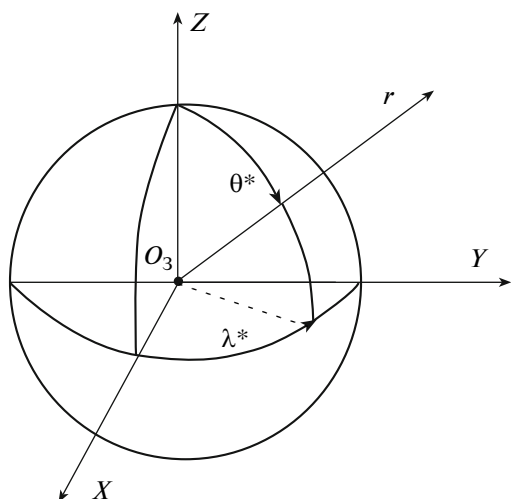


Рис. 1. Система сферических координат  $r, \theta^*, \lambda^*$ .

ставляющих (2-го, 3-го и 4-го порядков) геомагнитного потенциала поставить в соответствие однозначно определяемый тензор соответствующего ранга, названный мультипольным тензором и зависящий только от гауссовых коэффициентов, как объективную характеристику данной составляющей. В той же работе получен аналитически вектор  $\mathbf{B}$  с учетом первых трех мультипольных составляющих (2-го, 3-го и 4-го порядков) и поставлен вопрос о возможности отыскания компонент мультипольных тензоров 5-го и более высоких рангов.

Цель данной работы – дать ответ на этот вопрос, установить свойства мультипольного тензора  $\mathbf{M}^{(n)}$   $n$ -го ранга, разработать численно-аналитический алгоритм, позволяющий аналитически найти компоненты этого тензора, получить неизвестные ранее выражения для компонент тензора  $\mathbf{M}^{(5)}$ .

## 2. СИСТЕМЫ КООРДИНАТ И ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Сохраняя обозначения, использованные в работе [Тихонов и Петров, 2002], введем в рассмотрение следующие системы координат. Жестко связанная с Землей система координат (рис. 1)  $O_3XYZ$  (с осями  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$ ), начало которой расположено в центре Земли, ось  $O_3X$  направлена в точку пересечения земного экватора и нулевого меридиана, ось  $O_3Y$  лежит в плоскости экватора и повернута относительно оси  $O_3X$  на  $90^\circ$  в восточном направлении. На рис. 1 изображена также система сферических координат  $r, \theta^*, \lambda^*$ .

Вспомогательная система координат (рис. 2)  $O_3X^0Y^0Z^0$  (орты  $\tau_1^0, \tau_2^0, \tau_3^0$ ), связана с плоскостью орбиты ИСЗ. Ось  $O_3X^0$  направлена в восходящий

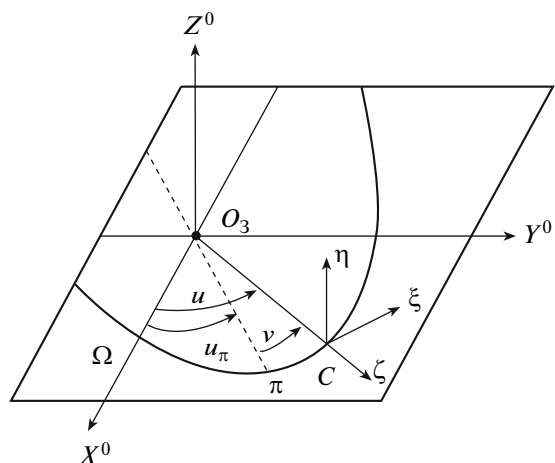


Рис. 2. Орбитальная система координат с началом в центре масс ИСЗ.

узел орбиты, который на рис. 2 обозначен буквой  $\Omega$ , ось  $O_3Z^0$  – по нормали к плоскости орбиты.

На рисунке 2 показаны также: орбитальная система координат  $C\xi\eta\zeta$  с началом в центре масс ИСЗ, истинная аномалия  $v$ , аргумент перигея  $u_\pi$  (сам перигей обозначен буквой  $\pi$ ), аргумент широты  $u$ .

Для вычисления индукции и градиента индукции МПЗ потребуются сферические координаты  $r, \theta, \lambda$ , показанные на рис. 3

Взаимная ориентация систем координат  $O_3XYZ$  и  $O_3X^0Y^0Z^0$  показана на рис. 4, где  $i$  – угол наклона орбиты ИСЗ,  $\phi = \widehat{(\tau_1^0, \tau_1)}$  – часовой угол восходящего узла орбиты.

Компоненты матрицы  $\Gamma = (\gamma_{ij})$  ( $i = \overline{1,3}, j = \overline{1,3}$ ) направляющих косинусов, определяющих ориентацию системы координат  $O_3XYZ$  относительно  $O_3X^0Y^0Z^0$  согласно равенствам  $\tau_i^0 = \sum_{j=1}^3 \gamma_{ij} \tau_j$ ,  $i = \overline{1,3}$ , выражаются через углы  $i$  и  $\phi$  следующим образом:

$$\gamma_{11} = \cos \phi, \gamma_{12} = -\sin \phi, \gamma_{13} = 0,$$

$$\gamma_{21} = \cos i \sin \phi, \gamma_{22} = \cos i \cos \phi, \gamma_{23} = \sin i,$$

$$\gamma_{31} = -\sin i \sin \phi, \gamma_{32} = -\sin i \cos \phi, \gamma_{33} = \cos i,$$

Рассматривая преобразование координат радиуса-вектора

$$\mathbf{r} = (X^0, Y^0, Z^0)^T = r(\cos \theta \cos \lambda, \cos \theta \sin \lambda, \sin \theta)^T$$

при переходе от системы координат  $O_3X^0Y^0Z^0$  к системе  $O_3XYZ$ , в которой

$$\mathbf{r} = (X, Y, Z)^T = r(\sin \theta^* \cos \lambda^*, \sin \theta^* \sin \lambda^*, \cos \theta^*)^T, \quad (1)$$

получаем, что углы  $\theta^*$  и  $\lambda^*$  связаны с углами  $\lambda$  и  $\theta$  соотношениями

$$\mathbf{S}^*(\theta^*, \lambda^*) = \mathbf{\Gamma}^T \mathbf{S}(\lambda, \theta),$$

где  $\mathbf{S}^*(\theta^*, \lambda^*) = (\sin \theta^* \cos \lambda^*, \sin \theta^* \sin \lambda^*, \cos \theta^*)^T$ ,  $\mathbf{S}(\lambda, \theta) = (\cos \theta \cos \lambda, \cos \theta \sin \lambda, \sin \theta)^T$ .

### 3. МЕЖДУНАРОДНОЕ АНАЛИТИЧЕСКОЕ ПОЛЕ

Следуя результатам, представленным в работе [Сарычев и Овчинников, 1985], будем считать внешнее МПЗ (созданное плазменной оболочкой Земли) пренебрежимо слабым по сравнению с собственным МПЗ (источники которого внутри земного шара). Собственное МПЗ является потенциальным векторным полем, потенциал которого обычно представляют (см. [Яновский, 1978]) в виде ряда Лежандра в сферических координатах  $r, \theta^*, \lambda^*$  (рис. 1):

$$U^* = \sum_{n=1}^{\infty} U_n^* = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_3^{n+2}}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^n P_n^m(\cos \theta^*) \times (g_n^m \cos m\lambda^* + h_n^m \sin m\lambda^*). \quad (2)$$

Здесь  $R_3$  – средний радиус Земли,  $P_n^0(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$  – полиномы Лежандра,  $P_n^m(x) = k_n^m (1 - x^2)^{m/2} \frac{d^m}{dx^m} P_n^0(x)$  – квазинормированные по Шмидту присоединенные функции Лежандра, где  $k_n^m = \sqrt{\varepsilon_m \frac{(n-m)!}{(n+m)!}}$  – нормирующие множители, в которых  $\varepsilon_0 = 1, \varepsilon_m = 2$  при  $m \geq 1$ . Значения коэффициентов  $g_n^m$  и  $h_n^m$ , называемых далее гауссовыми коэффициентами, утвержденные Международной Ассоциацией Геомагнетизма и Аэронавтики согласно модели Международного аналитического поля IGRF-2005, можно найти в [Macmillan and Maus, 2005].

В прикладных исследованиях ограничиваются приближенным представлением потенциала в виде отрезка ряда (2) с конечным числом  $N$  слагаемых:

$$U^* = \sum_{n=1}^N U_n^*. \quad (3)$$

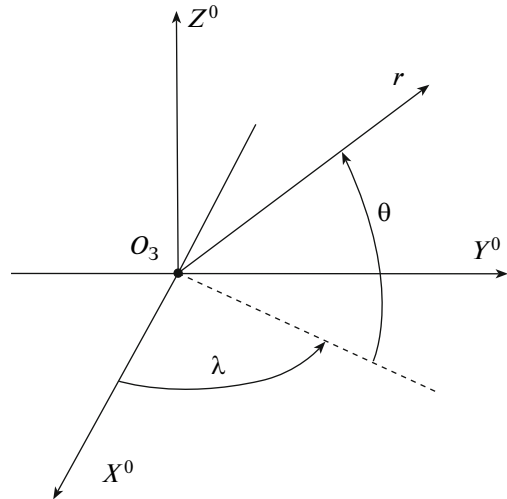


Рис. 3. Сферические координаты  $r, \theta, \lambda$  для вычисления индукции и градиента индукции МПЗ.

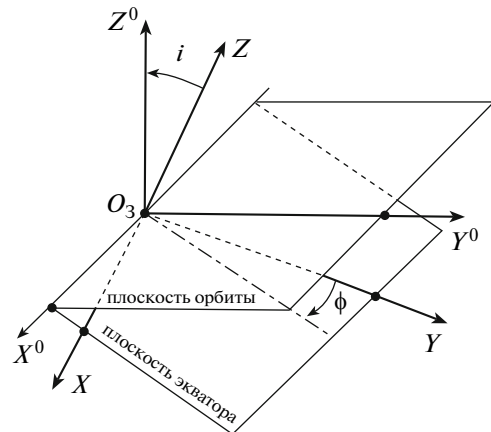


Рис. 4. Взаимная ориентация систем координат  $O_3XYZ$  и  $O_3X^0Y^0Z^0$ .

Здесь  $U_1^*$  – потенциал дипольной составляющей МПЗ, а остальные  $U_n^*$  – потенциалы мультипольных составляющих  $n$ -го порядка:

$$U_n^* = \frac{R_3^{n+2}}{r^{n+1}} \sum_{m=0}^n P_n^m(\cos \theta^*) (g_n^m \cos m\lambda^* + h_n^m \sin m\lambda^*). \quad (4)$$

В декартовых координатах  $XYZ$  имеем:  $U_1^* = \frac{R_3^3}{r^3} (g_1^1 X + h_1^1 Y + g_1^0 Z) = \frac{R_3^3 \mathbf{M}^{(1)} \cdot \mathbf{r}}{r^3}$ , где  $R_3^3 \mathbf{M}^{(1)} = R_3^3 (g_1^1, h_1^1, g_1^0)^T$  – магнитный момент дипольной составляющей МПЗ (называемый кратко дипольный магнитный момент).

## 4. МУЛЬТИПОЛЬНЫЕ ТЕНЗОРЫ

В работе [Тихонов и Петров, 2002] потенциал (3) был аппроксимирован конечной суммой из четырех слагаемых и показано, что потенциал  $U_n^*$ , описывающий мультипольную составляющую МПЗ  $n$ -го порядка ( $n \leq 4$ ), может быть представлен в виде

$$U_n^* = \frac{R_3^{n+2}}{r^{2n+1}} \mathbf{M}^{(n)} \underset{n}{\overset{\cdot\cdot\cdot}{\otimes}} (\otimes^n \mathbf{r}), \quad (5)$$

где  $\mathbf{M}^{(n)}$  – мультипольный тензор МПЗ ранга  $n$ , найденный явным образом и зависящий только от гауссовых коэффициентов,  $R_3^{n+2} \mathbf{M}^{(n)}$  – магнитный момент  $n$ -го порядка, тензор  $\otimes^n \mathbf{r}$  ранга  $n$  определяется по индукции следующим образом:  $\otimes^1 \mathbf{r} = \mathbf{r}$ ,  $\otimes^{n+1} \mathbf{r} = \otimes^n \mathbf{r} \otimes \mathbf{r}$ . Операция  $\underset{n}{\overset{\cdot\cdot\cdot}{\otimes}}$  определяется для пары тензоров  $\mathbf{A}$  и  $\mathbf{B}$  ранга  $n$  следующим образом

$$\mathbf{A} \underset{n}{\overset{\cdot\cdot\cdot}{\otimes}} \mathbf{B} = \sum_{i_1} \sum_{i_2} \dots \sum_{i_n} A_{i_1 i_2 \dots i_n} \times B_{i_1 i_2 \dots i_n}.$$

Обратимся теперь к искомому представлению потенциала  $U^*$  в виде (3), (5) с произвольным числом  $N$  и подлежащими определению мультипольными тензорами  $\mathbf{M}^{(n)}$ . С одной стороны, каждое из слагаемых  $U_n^*$  в сумме (3) имеет вид (4).

С другой стороны, в силу (5)  $U_n^*$  зависит от вектора  $\mathbf{r}$ , который, в свою очередь, также может быть выражен через сферические координаты  $r$ ,  $\theta^*$ ,  $\lambda^*$  с неопределенными коэффициентами  $M_{i_1 i_2 \dots i_n}$ . Приравнявая соответствующие коэффициенты при одинаковых комбинациях произведений тригонометрических функций, получим систему линейных алгебраических уравнений, в которой, однако, число неизвестных больше числа уравнений. Для замыкания системы уравнений следует использовать дополнительные соотношения, вытекающие из рассмотрения свойств мультипольных тензоров  $\mathbf{M}^{(n)}$ . В работе [Тихонов и Петров, 2002] было доказано, что при любом  $n$  мультипольный тензор  $\mathbf{M}^{(n)}$  обладает свойствами:

1. симметрии по любой паре индексов, то есть неизменяемости при транспонировании по любой паре индексов;

2. равенства нулю любой свертки по паре индексов (например, равенство нулю свертки по первой паре индексов:  $\sum_{k=1}^3 M_{k, k, i_3, \dots, i_n} = 0$ ).

С учетом указанных свойств мультипольных тензоров получается система линейных алгебраических уравнений, которая позволяет единственным образом выразить неизвестные компоненты тензора  $\mathbf{M}^{(n)}$  через известные гауссовы коэффициенты. Для получения такой системы и реше-

ния ее был разработан численно-аналитический алгоритм, реализованный в пакете *Maple*. С помощью этого алгоритма за считанные секунды можно получить аналитически компоненты мультипольного тензора  $\mathbf{M}^{(n)}$  для произвольного значения числа  $n$ .

## 5. КОМПОНЕНТЫ МУЛЬТИПОЛЬНЫХ ТЕНЗОРОВ ВЫСШИХ РАНГОВ

Первые четыре тензора ( $\mathbf{M}^{(1)}$ ,  $\mathbf{M}^{(2)}$ ,  $\mathbf{M}^{(3)}$ ,  $\mathbf{M}^{(4)}$ ) были получены в работе [Тихонов и Петров, 2002]. Приведем неизвестные ранее выражения для компонент тензоров  $\mathbf{M}^{(5)}$ , а также правильные выражения для тех компонент, которые в работе [Тихонов и Петров, 2002] содержат опечатки:

$$M_{11} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}g_2^2 - g_2^0), \quad M_{12} = \frac{\sqrt{3}}{2}h_2^2, \quad M_{13} = \frac{\sqrt{3}}{2}g_2^1,$$

$$M_{22} = -\frac{1}{2}(g_2^0 + \sqrt{3}g_2^2), \quad M_{23} = \frac{\sqrt{3}}{2}h_2^1, \quad M_{33} = g_2^0,$$

$$M_{111} = \frac{\sqrt{6}}{12}(\sqrt{15}g_3^3 - 3g_3^1), \quad M_{112} = \frac{\sqrt{6}}{12}(\sqrt{15}h_3^3 - h_3^1),$$

$$M_{113} = \frac{1}{6}(\sqrt{15}g_3^2 - 3g_3^0), \quad M_{122} = -\frac{\sqrt{6}}{12}(\sqrt{15}g_3^3 + g_3^1),$$

$$M_{123} = \frac{\sqrt{15}}{6}h_3^2, \quad M_{133} = \frac{\sqrt{6}}{3}g_3^1,$$

$$M_{222} = -\frac{\sqrt{6}}{12}(\sqrt{15}h_3^3 + 3h_3^1), \quad M_{223} = -\frac{1}{6}(\sqrt{15}g_3^2 + 3g_3^0),$$

$$M_{233} = \frac{\sqrt{6}}{3}h_3^1, \quad M_{333} = g_3^0,$$

$$M_{1111} = \frac{1}{8}(\sqrt{35}g_4^4 - 2\sqrt{5}g_4^2 + 3g_4^0),$$

$$M_{1112} = \frac{\sqrt{5}}{8}(\sqrt{7}h_4^4 - h_4^2),$$

$$M_{1113} = \frac{\sqrt{10}}{16}(\sqrt{7}g_4^3 - 3g_4^1),$$

$$M_{1122} = \frac{1}{8}(g_4^0 - \sqrt{35}g_4^4),$$

$$M_{1123} = \frac{\sqrt{10}}{16}(\sqrt{7}h_4^3 - h_4^1),$$

$$M_{1133} = \frac{1}{4}(\sqrt{5}g_4^2 - 2g_4^0),$$

$$M_{1222} = -\frac{\sqrt{5}}{8}(\sqrt{7}h_4^4 + h_4^2),$$

$$M_{1223} = -\frac{\sqrt{10}}{16}(g_4^1 + \sqrt{7}g_4^3),$$

$$\begin{aligned}
 M_{1233} &= \frac{\sqrt{5}}{4} h_4^2, & M_{1333} &= \frac{\sqrt{10}}{4} g_4^1, \\
 M_{2222} &= \frac{1}{8} (3g_4^0 + \sqrt{35}g_4^4 + 2\sqrt{5}g_4^2), \\
 M_{2223} &= -\frac{\sqrt{10}}{16} (\sqrt{7}h_4^3 + 3h_4^1), \\
 M_{2233} &= -\frac{1}{4} (2g_4^0 + \sqrt{5}g_4^2), & M_{2333} &= \frac{\sqrt{10}}{4} h_4^1, \\
 M_{3333} &= g_4^0, \\
 M_{11111} &= \frac{1}{16} (3\sqrt{14}g_5^5 - \sqrt{70}g_5^3 + 2\sqrt{15}g_5^1), \\
 M_{11112} &= \frac{1}{80} (15\sqrt{14}h_5^5 - 3\sqrt{70}h_5^3 + 2\sqrt{15}h_5^1), \\
 M_{11113} &= \frac{1}{40} (3\sqrt{35}g_5^4 + 15g_5^0 - 2\sqrt{105}g_5^2), \\
 M_{11122} &= \frac{1}{80} (-15\sqrt{14}g_5^5 + \sqrt{70}g_5^3 + 2\sqrt{15}g_5^1), \\
 M_{11123} &= \frac{\sqrt{35}}{40} (3h_5^4 - \sqrt{3}h_5^2), \\
 M_{11133} &= \frac{\sqrt{5}}{20} (\sqrt{14}g_5^3 - 3\sqrt{3}g_5^1), \\
 M_{11222} &= \frac{1}{80} (-15\sqrt{14}h_5^5 - \sqrt{70}h_5^3 + 2\sqrt{15}h_5^1), \\
 M_{11223} &= \frac{1}{40} (-3\sqrt{35}g_5^4 + 5g_5^0), \\
 M_{11233} &= \frac{\sqrt{5}}{20} (\sqrt{14}h_5^3 - \sqrt{3}h_5^1), \\
 M_{11333} &= \frac{1}{20} (\sqrt{105}g_5^2 - 10g_5^0), \\
 M_{12222} &= \frac{1}{80} (3\sqrt{70}g_5^3 + 15\sqrt{14}g_5^5 + 2\sqrt{15}g_5^1), \\
 M_{12223} &= -\frac{\sqrt{35}}{40} (\sqrt{3}h_5^2 + 3h_5^4), \\
 M_{12233} &= -\frac{\sqrt{5}}{20} (\sqrt{14}g_5^3 + \sqrt{3}g_5^1), \\
 M_{12333} &= \frac{\sqrt{105}}{20} h_5^2, & M_{13333} &= \frac{\sqrt{15}}{5} g_5^1, \\
 M_{22222} &= \frac{1}{16} (\sqrt{70}h_5^3 + 3\sqrt{14}h_5^5 + 2\sqrt{15}h_5^1), \\
 M_{22223} &= \frac{1}{40} (2\sqrt{105}g_5^2 + 15g_5^0 + 3\sqrt{35}g_5^4), \\
 M_{22233} &= -\frac{\sqrt{5}}{20} (\sqrt{14}h_5^3 + 3\sqrt{3}h_5^1), \\
 M_{22333} &= -\frac{1}{20} (\sqrt{105}g_5^2 + 10g_5^0), \\
 M_{23333} &= \frac{\sqrt{15}}{5} h_5^1, & M_{33333} &= g_5^0.
 \end{aligned}$$

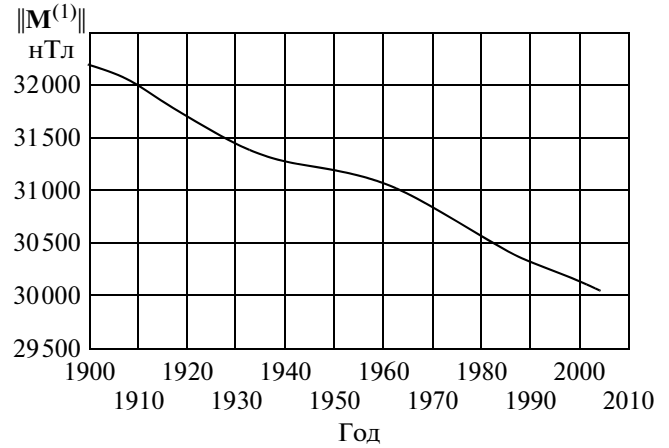


Рис. 5. Зависимость ||M<sup>(1)</sup>|| от времени.

Таким образом, программно и алгоритмически обоснована возможность представления геомагнитного потенциала в виде (3) с произвольным числом  $N$  слагаемых вида (5).

Полученное представление потенциала МПЗ (3), (5) выгодно отличается от традиционного представления (3), (4) во-первых краткостью записи, во-вторых однотипной структурой слагаемых, а в-третьих – явным присутствием в каждом слагаемом множителя  $\mathbf{M}^{(n)}$ , зависящего только от гауссовых коэффициентов и являющегося характеристикой собственных свойств данной мультипольной составляющей потенциала МПЗ. Последнее из упомянутых преимуществ представляется наиболее важным. Действительно, отсутствие зависимости мультипольного тензора  $\mathbf{M}^{(n)}$  от координат точек околоземного пространства позволяет рассматривать его как объективную характеристику соответствующей мультипольной составляющей потенциала МПЗ. Представление потенциала в виде (3), (5) вносит ясность в понимание мультипольной структуры геомагнитного поля и позволяет лучше представить его как поле, образованное совокупностью магнитных мультиполей, каждый из которых, как многомерный объект, характеризуется тензором соответствующего ранга.

Кроме того, представление потенциала МПЗ в виде (3), (5) позволяет сравнивать между собой отдельные слагаемые этого потенциала по норме соответствующих тензоров, поскольку такие оценки не зависят от координат точек околоземного пространства.

Прежде всего, представляет интерес проследить зависимость  $\|\mathbf{M}^{(1)}\|$  и  $\|\mathbf{M}^{(2)}\|$  от времени, пользуясь имеющимися данными (см. [Яновский, 1978, Manda et al., Macmillan and Maus, 2005], а также <http://www.ngdc.noaa.gov/IAGA/vmod/igrf.html>) о гауссовых коэффициентах для различных эпох. Построенные графики (рис. 5 и рис. 6) сви-

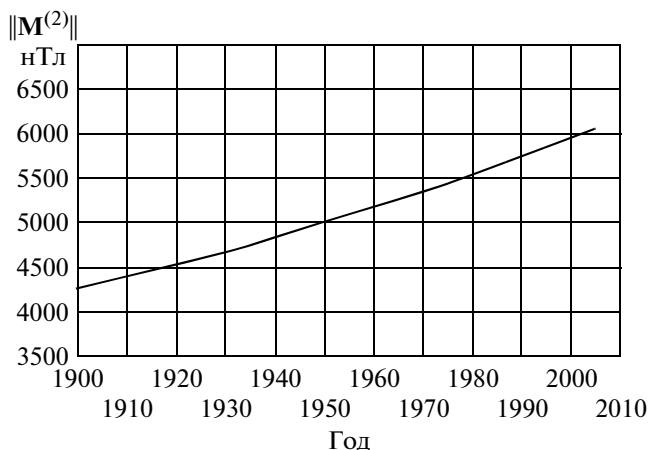


Рис. 6. Зависимость ||M<sup>(2)</sup>|| от времени.

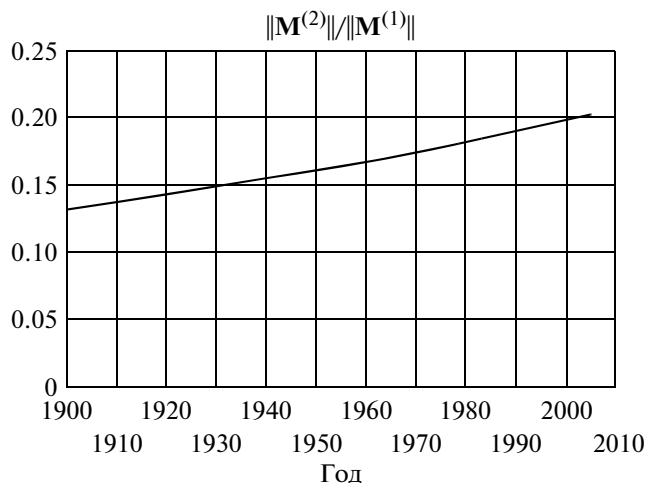


Рис. 7. Отношение норм ||M<sup>(2)</sup>||/||M<sup>(1)</sup>|| в зависимости от времени.

детельствуют о том, что дипольная составляющая геомагнитного потенциала неуклонно убывает, а квадрупольная, наоборот, — растет. В результате этого МПЗ постепенно теряет свой простой дипольный вид с присущей ему симметрией и становится более сложным и асимметричным.

Рассмотрим также отношения норм ||M<sup>(2)</sup>||/||M<sup>(1)</sup>|| в зависимости от времени. Построенный на рис. 7 график свидетельствует о том, что ||M<sup>(2)</sup>|| растет быстрее, чем убывает ||M<sup>(1)</sup>||. Всего за 50 последних лет (прошедших с начала космической эры) отношение рассматриваемых норм возросло с 16% в 1957 году до 20% в 2007 году и в настоящее время продолжает увеличиваться.

### 6. МАГНИТНАЯ ИНДУКЦИЯ МПЗ

Имея потенциал, представленный в виде (3), (5) перейдем к отысканию магнитной индукции МПЗ, определяемой равенством

$$\mathbf{V} = -\text{grad}U^*. \tag{6}$$

Получаем:

$$\mathbf{V} = -\sum_{n=1}^N \text{grad}U_n^* = \sum_{n=1}^N \mathbf{B}^{(n)}. \tag{7}$$

Как показано в [Петров и Тихонов, 1999], для нахождения проекций вектора  $\mathbf{V}$  на оси орбитальной системы координат  $\xi\eta\zeta$ , а также для нахождения компонент тензора  $\mathbf{D}$  градиента индукции МПЗ в центре масс ИСЗ, целесообразно представить потенциал (3) в виде функции сферических координат  $r, \theta, \lambda$  (рис. 3), причем записывать его в этом случае будем без символа  $*$ .

Согласно работе [Петров и Тихонов, 1999], компоненты вектора  $\mathbf{V}$  в центре масс ИСЗ (точка С) в орбитальной системе координат  $C\xi\eta\zeta$  могут быть вычислены по формуле

$$(B_\xi B_\eta B_\zeta)^T = -\left( \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial \lambda} \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial \theta} \frac{\partial U}{\partial r} \right)_{\substack{\lambda=u \\ \theta=0 \\ r=R}}^T. \tag{8}$$

Для того, чтобы представить потенциал (6) в виде функции сферических координат  $r, \theta, \lambda$ , выразим его сначала в виде функции от декартовых координат  $X, Y, Z$ , затем ортогональным преобразованием координат с матрицей  $\Gamma$  перейдем в этом выражении к декартовым координатам  $X^0, Y^0, Z^0$  и, выразив последние через сферические координаты  $r, \theta, \lambda$ , получим искомое выражение потенциала (3), (5) через эти сферические координаты.

В соответствии с изложенным планом вначале преобразованием координат с матрицей  $\Gamma$  получаем выражение потенциала (3) в виде функции декартовых координат  $X^0, Y^0, Z^0$

$$U^* = \frac{R_3^3}{r^2} \mathbf{M}_0^{(1)} \cdot \mathbf{r}^0 + \frac{R_3^4}{r^3} \mathbf{M}_0^{(2)} \cdot (\otimes^2 \mathbf{r}^0) + \dots + \frac{R_3^{N+2}}{r^{N+1}} \mathbf{M}_0^{(N)} \cdot (\otimes^N \mathbf{r}^0), \tag{9}$$

где  $\mathbf{r}^0$  — единичный вектор  $\mathbf{r}/r$  в проекциях на оси системы координат  $O_3X^0Y^0Z^0$ , а  $\mathbf{M}_0^{(n)}$  — мультипольный тензор  $n$ -го ранга, преобразованный к осям системы координат  $O_3X^0Y^0Z^0$  по формуле

$$(\mathbf{M}_0^{(n)})_{i_1, j_2, \dots, i_n} = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_n=1}^3 \gamma_{i_1, j_1} \gamma_{i_2, j_2} \dots \gamma_{i_n, j_n} \mathbf{M}_{j_1, j_2, \dots, j_n}^{(n)}. \tag{10}$$

Далее, подставляя в (9) проекции вектора  $\mathbf{r}^0$  на оси системы координат  $O_3X^0Y^0Z^0$ , выраженные через сферические координаты  $r, \theta$  и  $\lambda$

$$r_1^0 = \cos \theta \cos \lambda, \quad r_2^0 = \cos \theta \sin \lambda, \quad r_3^0 = \sin \theta,$$

получаем потенциал (9) в виде функции от сферических координат  $r, \theta$  и  $\lambda$ :

$$U = \sum_{n=1}^N \frac{R_3^{n+2}}{r^{n+1}} \mathbf{M}_0^{(n)} \underset{n}{\overset{\cdot\cdot\cdot}{\otimes}} (\otimes^n \mathbf{r}^0). \quad (11)$$

Для отыскания индукции в центре масс ИСЗ в проекциях на оси орбитальной системы координат подставим (11) в (8), учитывая, что  $(\otimes^n \mathbf{r}^0)$  зависит только от  $\lambda$  и  $\theta$ , а  $r = R$ :

$$\begin{pmatrix} B_\xi \\ B_\eta \\ B_\zeta \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \sum_{n=1}^N \left(\frac{R_3}{R}\right)^{n+2} \mathbf{M}_0^{(n)} \underset{n}{\overset{\cdot\cdot\cdot}{\otimes}} \frac{\partial}{\partial \lambda} (\otimes^n \mathbf{r}^0) \\ \sum_{n=1}^N \left(\frac{R_3}{R}\right)^{n+2} \mathbf{M}_0^{(n)} \underset{n}{\overset{\cdot\cdot\cdot}{\otimes}} \frac{\partial}{\partial \theta} (\otimes^n \mathbf{r}^0) \\ - \sum_{n=1}^N (n+1) \left(\frac{R_3}{R}\right)^{n+2} \mathbf{M}_0^{(n)} \underset{n}{\overset{\cdot\cdot\cdot}{\otimes}} (\otimes^n \mathbf{r}^0) \end{pmatrix}_{\substack{\lambda=u \\ \theta=0}}. \quad (12)$$

Вычислим входящие в (12) частные производные. Рассмотрим  $\frac{\partial}{\partial \lambda} (\otimes^n \mathbf{r}^0)$  и найдем  $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ -ый элемент этого тензора для  $\forall j_m = \overline{1, 3}, m = \overline{1, n}$ :

$$\left( \frac{\partial (\otimes^n \mathbf{r}^0)}{\partial \lambda} \right)_{j_1, j_2, \dots, j_n} = \sum_{k=1}^n r_{j_1}^0 r_{j_2}^0 \dots r_{j_{k-1}}^0 \frac{\partial r_{j_k}^0}{\partial \lambda} r_{j_{k+1}}^0 \dots r_{j_{n-1}}^0 r_{j_n}^0. \quad (13)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}_0^{(n)} \underset{n}{\overset{\cdot\cdot\cdot}{\otimes}} \frac{\partial (\otimes^n \mathbf{r}^0)}{\partial \lambda} = \\ & = \sum_{j_1=1, j_2=1}^3 \sum_{j_n=1, k=1}^3 \dots \sum_{j_n=1, k=1}^3 \left( \mathbf{M}_0^{(n)} \right)_{j_n, j_{n-1}, \dots, j_1} r_{j_1}^0 r_{j_2}^0 \dots \frac{\partial r_{j_k}^0}{\partial \lambda} \dots r_{j_{n-1}}^0 r_{j_n}^0. \end{aligned} \quad (14)$$

Поскольку

$$\begin{aligned} & \sum_{j_1=1, j_2=1}^3 \sum_{j_n=1, k=1}^3 \dots \sum_{j_n=1, k=1}^3 r_{j_1}^0 r_{j_2}^0 \dots \frac{\partial r_{j_k}^0}{\partial \lambda} \dots r_{j_{n-1}}^0 r_{j_n}^0 = \\ & = n \sum_{j_1=1, j_2=1}^3 \sum_{j_n=1}^3 \dots \sum_{j_n=1}^3 \frac{\partial r_{j_1}^0}{\partial \lambda} r_{j_2}^0 r_{j_3}^0 \dots r_{j_{n-1}}^0 r_{j_n}^0, \end{aligned} \quad (15)$$

то приводя подобные слагаемые в выражении (14) с учетом симметричности тензоров  $\mathbf{M}_0^{(n)}$  по любой паре индексов, получим

$$\begin{aligned} & \mathbf{M}_0^{(n)} \underset{n}{\overset{\cdot\cdot\cdot}{\otimes}} \frac{\partial (\otimes^n \mathbf{r}^0)}{\partial \lambda} = \\ & = n \sum_{j_1=1, j_2=1}^3 \sum_{j_n=1}^3 \dots \sum_{j_n=1}^3 \left( \mathbf{M}_0^{(n)} \right)_{j_n, j_{n-1}, \dots, j_1} \frac{\partial r_{j_1}^0}{\partial \lambda} r_{j_2}^0 r_{j_3}^0 \dots r_{j_{n-1}}^0 r_{j_n}^0. \end{aligned} \quad (16)$$

Кроме того, положим

$$\mathbf{T}_r = \mathbf{r}^0 \Big|_{\substack{\lambda=u \\ \theta=0}} = (\cos u, \sin u, 0)^T, \quad \mathbf{T}_r^{(n)} = \otimes^n \mathbf{T}_r, \quad (17)$$

$$\mathbf{T}_\lambda = \frac{\partial \mathbf{r}^0}{\partial \lambda} \Big|_{\substack{\lambda=u \\ \theta=0}} = (-\sin u, \cos u, 0)^T, \quad (18)$$

$$\mathbf{T}_\lambda^{(n)} = \mathbf{T}_\lambda \otimes^{n-1} \mathbf{T}_r,$$

$$\mathbf{T}_\theta = \frac{\partial \mathbf{r}^0}{\partial \theta} \Big|_{\substack{\lambda=u \\ \theta=0}} = (0, 0, 1)^T, \quad \mathbf{T}_\theta^{(n)} = \mathbf{T}_\theta \otimes^{n-1} \mathbf{T}_r, \quad (19)$$

тогда

$$\mathbf{M}_0^{(n)} \underset{n}{\overset{\cdot\cdot\cdot}{\otimes}} \frac{\partial (\otimes^n \mathbf{r}^0)}{\partial \lambda} \Big|_{\substack{\lambda=u \\ \theta=0 \\ r=R}} = n \mathbf{M}_0^{(n)} \underset{n}{\overset{\cdot\cdot\cdot}{\otimes}} \mathbf{T}_\lambda^{(n)}. \quad (20)$$

Проводя аналогичные (13)–(16) действия для переменной  $\theta$ , получим

$$\mathbf{M}_0^{(n)} \underset{n}{\overset{\cdot\cdot\cdot}{\otimes}} \frac{\partial (\otimes^n \mathbf{r}^0)}{\partial \theta} \Big|_{\substack{\lambda=u \\ \theta=0 \\ r=R}} = n \mathbf{M}_0^{(n)} \underset{n}{\overset{\cdot\cdot\cdot}{\otimes}} \mathbf{T}_\theta^{(n)}, \quad (21)$$

где  $\mathbf{T}_\theta^{(n)}$  определено согласно (19), (17).

Результаты вычисления частных производных (20) и (21) подставим в (12), и, учитывая (7), определим индукцию в центре масс тела в проекциях на орбитальные оси координат следующим образом:  $\mathbf{B} = \sum_{n=1}^N \mathbf{B}^{(n)}$ , где

$$\begin{pmatrix} B_\xi^{(n)} \\ B_\eta^{(n)} \\ B_\zeta^{(n)} \end{pmatrix} = - \left( \frac{R_3}{R} \right)^{n+2} \begin{pmatrix} n \mathbf{M}_0^{(n)} \underset{n}{\overset{\cdot\cdot\cdot}{\otimes}} \mathbf{T}_\lambda^{(n)} \\ n \mathbf{M}_0^{(n)} \underset{n}{\overset{\cdot\cdot\cdot}{\otimes}} \mathbf{T}_\theta^{(n)} \\ -(n+1) \mathbf{M}_0^{(n)} \underset{n}{\overset{\cdot\cdot\cdot}{\otimes}} \mathbf{T}_r^{(n)} \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Несколько иначе вектор  $\mathbf{B}^{(n)}$  можно переписать в другой форме, явно указывающей на зависимость этого вектора от мультипольного тензора  $\mathbf{M}_0^{(n)}$ , определяемого по формуле (10), и аргумента широты  $u$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}^{(n)} &= \left( \frac{R_3}{R} \right)^{n+2} \begin{pmatrix} n \sin u & -n \cos u & 0 \\ 0 & 0 & -n \\ (n+1) \cos u & (n+1) \sin u & 0 \end{pmatrix} \times \\ & \times \mathbf{M}_0^{(n)} \underset{n-1}{\overset{\cdot\cdot\cdot}{\otimes}} \otimes^{n-1} \begin{pmatrix} \cos u \\ \sin u \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (23)$$

Заметим, что выражение потенциала МПЗ через его мультипольные тензоры приводит к довольно удобной и краткой форме записи проекций индукции МПЗ на оси орбитальной системы координат. В противном случае, при использовании потенциала МПЗ в виде отрезка ряда (2) с любым произвольным числом слагаемых, эти проекции, являющиеся весьма громоздкими три-

гонометрическими выражениями, пришлось бы записывать непосредственно, а не в свернутой форме, как в (23). Это преимущество тензорной записи оказывается полезным при аналитическом исследовании задач, при исследованиях с использованием методов компьютерной алгебры (именно благодаря методам компьютерной алгебры удалось преодолеть технические трудности, возникшие при построении мультипольных моделей МПЗ высоких порядков), а также при выполнении численных экспериментов.

## 7. ГРАДИЕНТНОСТЬ МПЗ

Во многих исследованиях, связанных с учетом влияния МПЗ на вращательное движение ИСЗ относительно его центра масс, требуется знать значение вектора  $\mathbf{V}$  не только в точке орбиты, соответствующей положению центра масс ИСЗ в данный момент времени, но и в произвольной точке ИСЗ с учетом его пространственных размеров, то есть требуется учитывать градиентность МПЗ (неоднородность МПЗ в объеме ИСЗ). Важность учета градиентности МПЗ в некоторых задачах динамики заряженных ИСЗ обнаружена и обоснована в работах [Тихонов, 1987, 1991].

В работе [Петров и Тихонов, 1999] показано, что в линейном приближении вектор  $\mathbf{V}$ , зависящий от относительного радиус-вектора  $\boldsymbol{\rho} = \xi \xi_0 + \eta \eta_0 + \zeta \zeta_0$  данной точки ИСЗ относительно его центра масс, может быть представлен в виде  $\mathbf{V}(\boldsymbol{\rho}) = \mathbf{V}_C + (\boldsymbol{\rho} \nabla)_C \mathbf{V}$ , где  $\mathbf{V}_C$  – значение  $\mathbf{V}$  в центре масс ИСЗ (т.е. при  $\boldsymbol{\rho} = 0$ ), а  $(\boldsymbol{\rho} \nabla)_C \mathbf{V} = \xi \left. \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \xi} \right|_C + \eta \left. \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \eta} \right|_C + \zeta \left. \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial \zeta} \right|_C$  – дифференциал вектора  $\mathbf{V}(\boldsymbol{\rho})$  в центре масс ИСЗ на приращении радиус-вектора  $\boldsymbol{\rho}$ . В свою очередь  $(\boldsymbol{\rho} \nabla)_C \mathbf{V}$  может быть представлен в виде  $\mathbf{D}_C \cdot \boldsymbol{\rho}$ , где  $\mathbf{D}_C$  – матрица симметричного бездивергентного ( $D_{C\xi\xi} + D_{C\eta\eta} + D_{C\zeta\zeta} = 0$ ) тензора 2-го ранга, называемого градиентом векторного поля. Компоненты матрицы  $\mathbf{D}_C$  имеют вид

$$\begin{aligned} D_{C\xi\xi} &= -\frac{1}{R} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda^2} + \frac{\partial U}{\partial r} \right), \\ D_{C\eta\eta} &= -\frac{1}{R} \left( \frac{1}{R} \frac{\partial^2 U}{\partial \theta^2} + \frac{\partial U}{\partial r} \right), \\ D_{C\zeta\zeta} &= -\frac{\partial^2 U}{\partial r^2}, \quad D_{C\xi\eta} = -\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda \partial \theta}, \\ D_{C\xi\zeta} &= -\frac{1}{R} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial \lambda \partial r} - \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial \lambda} \right), \\ D_{C\eta\zeta} &= -\frac{1}{R} \left( \frac{\partial^2 U}{\partial \theta \partial r} - \frac{1}{R} \frac{\partial U}{\partial \theta} \right), \end{aligned} \quad (24)$$

причем производные вычисляются при  $\lambda = u$ ,  $\theta = 0$ ,  $r = R$ .

Поскольку потенциал  $U$  представляет собой сумму мультипольных составляющих (11), то градиент векторного поля будет обладать аналогичным свойством и может быть представлен в виде

$$\mathbf{D}_C = \sum_{n=1}^N \mathbf{D}_C^{(n)}, \quad \text{где } N \in \mathbb{N}.$$

Переходя к вычислению производных, входящих в формулы (24), заметим, что первые производные, содержащиеся в этих формулах, уже были получены выше (см. (22)) при вычислении магнитной индукции МПЗ по формулам (8). Поэтому имеем:

$$\left( \frac{\partial U_n}{\partial \lambda} \right)_{\substack{\lambda=u \\ \theta=0 \\ r=R}} = R \left( \frac{R_3}{R} \right)^{n+2} n \mathbf{M}_0^{(n)} \underset{n}{\overset{\cdot\cdot\cdot}{T}}_\lambda^{(n)}, \quad (25)$$

$$\left( \frac{\partial U_n}{\partial \theta} \right)_{\substack{\lambda=u \\ \theta=0 \\ r=R}} = R \left( \frac{R_3}{R} \right)^{n+2} n \mathbf{M}_0^{(n)} \underset{n}{\overset{\cdot\cdot\cdot}{T}}_\theta^{(n)}, \quad (26)$$

$$\left( \frac{\partial U_n}{\partial r} \right)_{\substack{\lambda=u \\ \theta=0 \\ r=R}} = - \left( \frac{R_3}{R} \right)^{n+2} (n+1) \mathbf{M}_0^{(n)} \underset{n}{\overset{\cdot\cdot\cdot}{T}}_r^{(n)}. \quad (27)$$

Вычисление вторых производных потенциала  $U$ , входящих в формулы (24), вынесено в Приложение. В результате получены следующие компоненты тензора  $\mathbf{D}_C^{(n)}$ :

$$\begin{aligned} D_{C\xi\xi}^{(n)} &= \\ &= \frac{1}{R} \left( \frac{R_3}{R} \right)^{n+2} \mathbf{M}_0^{(n)} \underset{n}{\overset{\cdot\cdot\cdot}{T}}_\lambda^{(n)} \left( (2n+1) T_r^{(n)} - n(n-1) T_\lambda \otimes T_\lambda^{(n-1)} \right), \\ D_{C\eta\eta}^{(n)} &= \\ &= \frac{1}{R} \left( \frac{R_3}{R} \right)^{n+2} \mathbf{M}_0^{(n)} \underset{n}{\overset{\cdot\cdot\cdot}{T}}_\theta^{(n)} \left( (2n+1) T_r^{(n)} - n(n-1) T_\theta \otimes T_\theta^{(n-1)} \right), \\ D_{C\zeta\zeta}^{(n)} &= -(n+1)(n+2) \frac{1}{R} \left( \frac{R_3}{R} \right)^{n+2} \mathbf{M}_0^{(n)} \underset{n}{\overset{\cdot\cdot\cdot}{T}}_r^{(n)}, \\ D_{C\xi\eta}^{(n)} &= \\ &= -\frac{n(n-1)}{2} \frac{1}{R} \left( \frac{R_3}{R} \right)^{n+2} \mathbf{M}_0^{(n)} \underset{n}{\overset{\cdot\cdot\cdot}{T}}_\lambda^{(n)} \left( T_\lambda \otimes T_\theta^{(n-1)} + T_\theta \otimes T_\lambda^{(n-1)} \right), \\ D_{C\xi\zeta}^{(n)} &= n(n+2) \frac{1}{R} \left( \frac{R_3}{R} \right)^{n+2} \mathbf{M}_0^{(n)} \underset{n}{\overset{\cdot\cdot\cdot}{T}}_\lambda^{(n)}, \\ D_{C\eta\zeta}^{(n)} &= n(n+2) \frac{1}{R} \left( \frac{R_3}{R} \right)^{n+2} \mathbf{M}_0^{(n)} \underset{n}{\overset{\cdot\cdot\cdot}{T}}_\theta^{(n)}. \end{aligned} \quad (28)$$

## 8. ВЫВОДЫ

Путем введения в рассмотрение понятия мультипольного тензора  $\mathbf{M}^{(n)}$   $n$ -го ранга получено мультипольное представление потенциала МПЗ



(3), (5), выгодно отличающееся от традиционного представления (3), (4) краткостью записи, однотипной структурой слагаемых, а также явным присутствием в каждом слагаемом множителя  $\mathbf{M}^{(n)}$ , зависящего только от гауссовых коэффициентов и являющегося характеристикой собственных свойств данной мультипольной составляющей потенциала МПЗ. Показано, что независимость мультипольного тензора  $\mathbf{M}^{(n)}$  от координат точек околоземного пространства позволяет рассматривать его как объективную характеристику соответствующей мультипольной составляющей потенциала МПЗ. Получено представление потенциала в виде (3), (5), которое вносит ясность в понимание мультипольной структуры геомагнитного поля и позволяет лучше представить его как поле, образованное совокупностью магнитных мультиполей, каждый из которых, как многомерный объект, характеризуется тензором соответствующего ранга.

Получены компактные и удобные для использования аналитические выражения, позволяющие представить вектор магнитной индукции, а также компоненты тензора ее градиента, через компоненты мультипольных тензоров с произвольной степенью точности. Таким образом, решение задачи, начатое в работе [Петров и Тихонов, 1999] и продолженное в [Тихонов и Петров, 2002], доведено до логического завершения: программно и алгоритмически обоснована возможность мультипольного представления геомагнитного потенциала, а также магнитной индукции и ее градиента, с произвольной степенью точности для практического использования в прикладных задачах космодинамики.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Вычисление вторых производных потенциала  $U$ , входящих в формулы (24), начнем с рассмотрения выражения  $\frac{\partial^2}{\partial \lambda^2} (\otimes^n \mathbf{r}^0)$ . Найдем  $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ -ый элемент этого тензора для  $\forall j_m = \overline{1, 3}, m = \overline{1, n}$ . Для этого продифференцируем сумму произведений вида (13), а в полученном результате отдельно запишем слагаемые состоящие из произведений, в которых множителем будет вторая производная, и слагаемые, в которых множителями будут по две производных первого порядка. Затем приведем подобные среди последних слагаемых — они входят в сумму по два раза, благодаря двойному дифференцированию произведения. Таким образом запишем сумму согласно примеру  $(abc)'' = (a''bc + ab''c + abc'') + 2(a'b'c + a'bc' + ab'c')$ :

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2 (\otimes^n \mathbf{r}^0)}{\partial \lambda^2} \right)_{j_1, j_2, \dots, j_n} &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \frac{\partial (\otimes^n \mathbf{r}^0)}{\partial \lambda} \right)_{j_1, j_2, \dots, j_n} = \\ &= \frac{\partial}{\partial \lambda} \left( \sum_{k=1}^n r_{j_1}^0 r_{j_2}^0 \dots r_{j_{k-1}}^0 \frac{\partial r_{j_k}^0}{\partial \lambda} r_{j_{k+1}}^0 \dots r_{j_{n-1}}^0 r_{j_n}^0 \right) = \\ &= \sum_{k=1}^n r_{j_1}^0 r_{j_2}^0 \dots r_{j_{k-1}}^0 \frac{\partial^2 r_{j_k}^0}{\partial \lambda^2} r_{j_{k+1}}^0 \dots r_{j_{n-1}}^0 r_{j_n}^0 + \\ &+ 2 \sum_{k=2}^n \sum_{m=1}^{k-1} r_{j_1}^0 r_{j_2}^0 \dots r_{j_{m-1}}^0 \frac{\partial r_{j_m}^0}{\partial \lambda} r_{j_{m+1}}^0 \dots r_{j_{k-1}}^0 \frac{\partial r_{j_k}^0}{\partial \lambda} r_{j_{k+1}}^0 \dots r_{j_{n-1}}^0 r_{j_n}^0. \end{aligned} \tag{29}$$

Поэтому далее можно выполнить следующую операцию

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_0^{(n)} \underset{n}{\overset{\cdot\cdot\cdot}{\cdot}} \frac{\partial^2 (\otimes^n \mathbf{r}^0)}{\partial \lambda^2} &= \\ &= \sum_{j_1=1}^3 \sum_{j_2=1}^3 \dots \sum_{j_n=1}^3 \left( \sum_{k=1}^n (\mathbf{M}_0^{(n)})_{j_n, j_{n-1}, \dots, j_1} r_{j_1}^0 r_{j_2}^0 \dots \frac{\partial^2 r_{j_k}^0}{\partial \lambda^2} \dots r_{j_{n-1}}^0 r_{j_n}^0 + \right. \\ &\left. + 2 \sum_{k=2}^n \sum_{m=1}^{k-1} (\mathbf{M}_0^{(n)})_{j_n, j_{n-1}, \dots, j_1} r_{j_1}^0 r_{j_2}^0 \dots \frac{\partial r_{j_m}^0}{\partial \lambda} \dots \frac{\partial r_{j_k}^0}{\partial \lambda} \dots r_{j_{n-1}}^0 r_{j_n}^0 \right). \end{aligned} \tag{30}$$

Так как равенство (15) полностью справедливо и для суммы произведений, в которых одним из множителей является вторая производная, то приводя подобные слагаемые в выражении (30) с учетом симметричности тензоров  $\mathbf{M}_0^{(n)}$  по любой паре индексов, аналогично (16) получим

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_0^{(n)} \underset{n}{\overset{\cdot\cdot\cdot}{\cdot}} \frac{\partial^2 (\otimes^n \mathbf{r}^0)}{\partial \lambda^2} &= \\ &= \sum_{j_1=1}^3 \sum_{j_2=1}^3 \dots \sum_{j_n=1}^3 \left[ n (\mathbf{M}_0^{(n)})_{j_n, j_{n-1}, \dots, j_1} \left( \frac{\partial^2 r_{j_1}^0}{\partial \lambda^2} r_{j_2}^0 r_{j_3}^0 \dots r_{j_{n-1}}^0 r_{j_n}^0 + \right. \right. \\ &\left. \left. + (n-1) \frac{\partial r_{j_1}^0}{\partial \lambda} \frac{\partial r_{j_2}^0}{\partial \lambda} r_{j_3}^0 \dots r_{j_{n-1}}^0 r_{j_n}^0 \right) \right]. \end{aligned} \tag{31}$$

Учитывая что  $\frac{\partial^2 \mathbf{r}^0}{\partial \lambda^2} \Big|_{\substack{\lambda=u \\ \theta=0 \\ r=R}} = (-\cos u, -\sin u, 0)^T = -\mathbf{T}_r$ , а также (17), (18), представим равенство (31) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_0^{(n)} \underset{n}{\overset{\cdot\cdot\cdot}{\cdot}} \frac{\partial^2 (\otimes^n \mathbf{r}^0)}{\partial \lambda^2} \Big|_{\substack{\lambda=u \\ \theta=0 \\ r=R}} &= \\ &= n \mathbf{M}_0^{(n)} \underset{n}{\overset{\cdot\cdot\cdot}{\cdot}} \left( (n-1) \mathbf{T}_\lambda \otimes \mathbf{T}_\lambda^{(n-1)} - \mathbf{T}_r^{(n)} \right). \end{aligned} \tag{32}$$

Следовательно

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 U_n}{\partial \lambda^2} \right|_{\substack{\lambda=u \\ \theta=0 \\ r=R}} &= R \left( \frac{R_3}{R} \right)^{n+2} \mathbf{M}_0^{(n)} \underset{n}{\overset{\cdot\cdot\cdot}{\cdot}} \left. \frac{\partial^2 (\otimes^n \mathbf{r}^0)}{\partial \lambda^2} \right|_{\substack{\lambda=u \\ \theta=0 \\ r=R}} = \\ &= n R \left( \frac{R_3}{R} \right)^{n+2} \mathbf{M}_0^{(n)} \underset{n}{\overset{\cdot\cdot\cdot}{\cdot}} ((n-1) \mathbf{T}_\lambda \otimes \mathbf{T}_\lambda^{(n-1)} - \mathbf{T}_r^{(n)}). \end{aligned} \quad (33)$$

Рассмотрим теперь  $\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} (\otimes^n \mathbf{r}^0)$  и найдем  $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ -ый элемент этого тензора для  $\forall j_m = \overline{1, 3}, m = \overline{1, n}$ . Проводя рассуждения аналогично (29)–(33) для переменной  $\theta$  и учитывая, что  $\left. \frac{\partial^2 \mathbf{r}^0}{\partial \theta^2} \right|_{\substack{\lambda=u \\ \theta=0 \\ r=R}} = (-\cos u, -\sin u, 0)^T = -\mathbf{T}_r$ , получим

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 U_n}{\partial \theta^2} \right|_{\substack{\lambda=u \\ \theta=0 \\ r=R}} &= R \left( \frac{R_3}{R} \right)^{n+2} \mathbf{M}_0^{(n)} \underset{n}{\overset{\cdot\cdot\cdot}{\cdot}} \left. \frac{\partial^2 (\otimes^n \mathbf{r}^0)}{\partial \theta^2} \right|_{\substack{\lambda=u \\ \theta=0 \\ r=R}} = \\ &= n R \left( \frac{R_3}{R} \right)^{n+2} \mathbf{M}_0^{(n)} \underset{n}{\overset{\cdot\cdot\cdot}{\cdot}} ((n-1) \mathbf{T}_\theta \otimes \mathbf{T}_\theta^{(n-1)} - \mathbf{T}_r^{(n)}). \end{aligned} \quad (34)$$

Займемся вычислением  $\left. \frac{\partial^2 U_n}{\partial r^2} \right|_{\substack{\lambda=u \\ \theta=0 \\ r=R}}$ . Используя выражение для  $U_n$  из формулы (11), получим

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^2 U_n}{\partial r^2} \right|_{\substack{\lambda=u \\ \theta=0 \\ r=R}} &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left( \frac{R_3^{n+2}}{r^{n+1}} \mathbf{M}_0^{(n)} \underset{n}{\overset{\cdot\cdot\cdot}{\cdot}} (\otimes^n \mathbf{r}^0) \right) \Big|_{\substack{\lambda=u \\ \theta=0 \\ r=R}} = \\ &= \mathbf{M}_0^{(n)} \underset{n}{\overset{\cdot\cdot\cdot}{\cdot}} (\otimes^n \mathbf{r}^0) \frac{\partial^2}{\partial r^2} \left( \frac{R_3^{n+2}}{r^{n+1}} \right) \Big|_{\substack{\lambda=u \\ \theta=0 \\ r=R}} = \\ &= (n+1)(n+2) \frac{1}{R} \left( \frac{R_3}{R} \right)^{n+2} \mathbf{M}_0^{(n)} \underset{n}{\overset{\cdot\cdot\cdot}{\cdot}} \mathbf{T}_r^{(n)}. \end{aligned} \quad (35)$$

Далее вычислим  $\left. \frac{\partial^2 U_n}{\partial \lambda \partial \theta} \right|_{\substack{\lambda=u \\ \theta=0 \\ r=R}}$ . Рассмотрим  $\frac{\partial^2}{\partial \lambda \partial \theta} (\otimes^n \mathbf{r}^0)$  и найдем  $(j_1, j_2, \dots, j_n)$ -ый элемент этого тензора для  $\forall j_m = \overline{1, 3}, m = \overline{1, n}$ . Для этого продифференцируем сумму произведений вида (13) по переменной  $\theta$ , а в полученном результате отдельно запишем слагаемые состоящие из произведений, в которых множителем будет вторая производная, и

слагаемые, в которых множителями будут по две производных первого порядка:

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2 (\otimes^n \mathbf{r}^0)}{\partial \lambda \partial \theta} \right)_{j_1, j_2, \dots, j_n} &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial (\otimes^n \mathbf{r}^0)}{\partial \lambda} \right)_{j_1, j_2, \dots, j_n} = \\ &= \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sum_{k=1}^n r_{j_1}^0 r_{j_2}^0 \dots r_{j_{k-1}}^0 \frac{\partial r_{j_k}^0}{\partial \lambda} r_{j_{k+1}}^0 \dots r_{j_n}^0 \right) = \\ &= \sum_{k=1}^n r_{j_1}^0 r_{j_2}^0 \dots r_{j_{k-1}}^0 \frac{\partial^2 r_{j_k}^0}{\partial \lambda \partial \theta} r_{j_{k+1}}^0 \dots r_{j_n}^0 + \\ &+ \sum_{k=2m=1}^{n-k-1} \sum_{j_1, j_2}^n r_{j_1}^0 r_{j_2}^0 \dots r_{j_{m-1}}^0 \frac{\partial r_{j_m}^0}{\partial \lambda} r_{j_{m+1}}^0 \dots r_{j_{k-1}}^0 \frac{\partial r_{j_k}^0}{\partial \theta} r_{j_{k+1}}^0 \dots r_{j_n}^0 + \\ &+ \sum_{k=2m=1}^{n-k-1} \sum_{j_1, j_2}^n r_{j_1}^0 r_{j_2}^0 \dots r_{j_{m-1}}^0 \frac{\partial r_{j_m}^0}{\partial \theta} r_{j_{m+1}}^0 \dots r_{j_{k-1}}^0 \frac{\partial r_{j_k}^0}{\partial \lambda} r_{j_{k+1}}^0 \dots r_{j_n}^0. \end{aligned}$$

Полученное выражение используем для вычисления

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_0^{(n)} \underset{n}{\overset{\cdot\cdot\cdot}{\cdot}} \frac{\partial^2 (\otimes^n \mathbf{r}^0)}{\partial \lambda \partial \theta} &= \\ &= \sum_{j_1=1}^3 \sum_{j_2=1}^3 \dots \sum_{j_n=1}^3 \left( \sum_{k=1}^n (\mathbf{M}_0^{(n)})_{j_n, j_{n-1}, \dots, j_1} r_{j_1}^0 r_{j_2}^0 \dots \frac{\partial^2 r_{j_k}^0}{\partial \lambda \partial \theta} r_{j_{k+1}}^0 \dots r_{j_n}^0 + \right. \\ &+ \frac{n-1}{2} \sum_{k=2m=1}^n \sum_{j_1, j_2}^n (\mathbf{M}_0^{(n)})_{j_n, j_{n-1}, \dots, j_1} r_{j_1}^0 r_{j_2}^0 \dots \frac{\partial r_{j_m}^0}{\partial \lambda} \frac{\partial r_{j_k}^0}{\partial \theta} \dots r_{j_{n-1}}^0 r_{j_n}^0 + \\ &\left. + \frac{n-1}{2} \sum_{k=2m=1}^n \sum_{j_1, j_2}^n (\mathbf{M}_0^{(n)})_{j_n, j_{n-1}, \dots, j_1} r_{j_1}^0 r_{j_2}^0 \dots \frac{\partial r_{j_m}^0}{\partial \theta} \frac{\partial r_{j_k}^0}{\partial \lambda} \dots r_{j_{n-1}}^0 r_{j_n}^0 \right). \end{aligned}$$

Приведем подобные слагаемые с учетом симметричности тензоров  $\mathbf{M}_0^{(n)}$  по любой паре индексов аналогично (16), получим

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_0^{(n)} \underset{n}{\overset{\cdot\cdot\cdot}{\cdot}} \frac{\partial^2 (\otimes^n \mathbf{r}^0)}{\partial \lambda \partial \theta} &= \\ &= \sum_{j_1=1}^3 \sum_{j_2=1}^3 \dots \sum_{j_n=1}^3 \left[ n (\mathbf{M}_0^{(n)})_{j_n, j_{n-1}, \dots, j_1} \left( \frac{\partial^2 r_{j_1}^0}{\partial \lambda \partial \theta} r_{j_2}^0 r_{j_3}^0 \dots r_{j_n}^0 + \right. \right. \\ &+ \frac{n-1}{2} \frac{\partial r_{j_1}^0}{\partial \lambda} \frac{\partial r_{j_2}^0}{\partial \theta} r_{j_3}^0 r_{j_4}^0 \dots r_{j_n}^0 + \\ &\left. \left. + \frac{n-1}{2} \frac{\partial r_{j_1}^0}{\partial \theta} \frac{\partial r_{j_2}^0}{\partial \lambda} r_{j_3}^0 r_{j_4}^0 \dots r_{j_n}^0 \right) \right]. \end{aligned} \quad (36)$$

Учитывая что  $\left. \frac{\partial^2 \mathbf{r}^0}{\partial \lambda \partial \theta} \right|_{\substack{\lambda=u \\ \theta=0 \\ r=R}} = (0, 0, 0)^T$ , а также (17)–(19), представим равенство (36) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_0^{(n)} \underset{n}{\overset{\cdot\cdot\cdot}{\partial}} \frac{\partial^2 (\otimes^n \mathbf{r}^0)}{\partial \lambda \partial \theta} \Big|_{\substack{\lambda=u \\ \theta=0 \\ r=R}} &= \\ &= \frac{n(n-1)}{2} \mathbf{M}_0^{(n)} \underset{n}{\overset{\cdot\cdot\cdot}{\partial}} (\mathbf{T}_\lambda \otimes \mathbf{T}_\theta^{(n-1)} + \mathbf{T}_\theta \otimes \mathbf{T}_\lambda^{(n-1)}). \end{aligned}$$

Таким образом

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_n}{\partial \lambda \partial \theta} \Big|_{\substack{\lambda=u \\ \theta=0 \\ r=R}} &= R \left( \frac{R_3}{R} \right)^{n+2} \mathbf{M}_0^{(n)} \underset{n}{\overset{\cdot\cdot\cdot}{\partial}} \frac{\partial^2 (\otimes^n \mathbf{r}^0)}{\partial \lambda \partial \theta} \Big|_{\substack{\lambda=u \\ \theta=0 \\ r=R}} = \\ &= \frac{n(n-1)}{2} R \left( \frac{R_3}{R} \right)^{n+2} \mathbf{M}_0^{(n)} \underset{n}{\overset{\cdot\cdot\cdot}{\partial}} (\mathbf{T}_\lambda \otimes \mathbf{T}_\theta^{(n-1)} + \mathbf{T}_\theta \otimes \mathbf{T}_\lambda^{(n-1)}). \end{aligned} \quad (37)$$

Вычислим теперь  $\frac{\partial^2 U_n}{\partial \lambda \partial r} \Big|_{\substack{\lambda=u \\ \theta=0 \\ r=R}}$ . Для этого обратимся к формуле (11) и заметим, что в выражении  $U_n$  от переменной  $\lambda$  зависит только множитель  $(\otimes^n \mathbf{r}^0)$ , а от переменной  $r$  – только множитель  $\frac{R_3^{n+2}}{r^{n+1}}$ . Таким образом производная по переменной  $r$  считается элементарно, а производная по переменной  $\lambda$  найдена в (20). Поэтому

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_n}{\partial \lambda \partial r} \Big|_{\substack{\lambda=u \\ \theta=0 \\ r=R}} &= -(n+1) \left( \frac{R_3}{R} \right)^{n+2} \mathbf{M}_0^{(n)} \underset{n}{\overset{\cdot\cdot\cdot}{\partial}} \frac{\partial (\otimes^n \mathbf{r}^0)}{\partial \lambda} \Big|_{\substack{\lambda=u \\ \theta=0 \\ r=R}} = \\ &= -n(n+1) \left( \frac{R_3}{R} \right)^{n+2} \mathbf{M}_0^{(n)} \underset{n}{\overset{\cdot\cdot\cdot}{\partial}} \mathbf{T}_\lambda^{(n)}. \end{aligned} \quad (38)$$

Аналогично найдем  $\frac{\partial^2 U_n}{\partial \theta \partial r} \Big|_{\substack{\lambda=u \\ \theta=0 \\ r=R}}$ , с учетом равенства (21):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U_n}{\partial \theta \partial r} \Big|_{\substack{\lambda=u \\ \theta=0 \\ r=R}} &= -(n+1) \left( \frac{R_3}{R} \right)^{n+2} \mathbf{M}_0^{(n)} \underset{n}{\overset{\cdot\cdot\cdot}{\partial}} \frac{\partial (\otimes^n \mathbf{r}^0)}{\partial \theta} \Big|_{\substack{\lambda=u \\ \theta=0 \\ r=R}} = \\ &= -n(n+1) \left( \frac{R_3}{R} \right)^{n+2} \mathbf{M}_0^{(n)} \underset{n}{\overset{\cdot\cdot\cdot}{\partial}} \mathbf{T}_\theta^{(n)}. \end{aligned} \quad (39)$$

Подставив частные производные (25), (26), (27), (33), (34), (35), (37), (38), (39) в (24), получим искомые компоненты тензора  $\mathbf{D}_C^{(n)}$  в виде (28).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- *Белецкий В.В., Хентов А.А.* Вращательное движение намагниченного спутника. М.: Наука, 288 с. 1985.
- *Петров К.Г., Тихонов А.А.* Момент сил Лоренца, действующих на заряженный спутник в магнитном поле Земли. Ч. 1: Напряженность магнитного поля Земли в орбитальной системе координат // *Вестн. СПбГУ, Сер. 1.* 1999. Вып. 1 (№ 1). С. 92–100.
- *Сарычев В.А., Овчинников М.Ю.* Магнитные системы ориентации искусственных спутников Земли. “Исследование космического пространства. Т. 23 (Итоги науки и техники ВИНТИ АН СССР)” М.: 104 с. 1985.
- *Тихонов А.А.* О влиянии неоднородности геомагнитного поля на динамику экранированного спутника // *Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. 1.* Вып. 2 (№ 8). С. 67–73. 1987.
- *Тихонов А.А.* Влияние неоднородности геомагнитного поля на эволюцию ротационного движения заряженного твердого тела // *Вестн. Ленингр. ун-та. Сер. 1.* Вып. 2 (№ 8). С. 90–99. 1991.
- *Тихонов А.А.* Уточнение модели “наклонный диполь” в задаче об эволюции ротационного движения твердого тела // *Космич. исслед.* Т. 40. № 2. С. 171–177. 2002.
- *Тихонов А.А., Петров К.Г.* Мультипольные модели магнитного поля Земли // *Космич. исслед.* Т. 40. № 3. С. 219–229. 2002.
- *Яновский Б.М.* Земной магнетизм. Л.: изд. Ленингр. ун-та, 591 с. 1978.
- *Macmillan S., Maus S.* International geomagnetic reference field – the tenth generation // *Earth Planets Space.* V. 57 (№ 12). P. 1135–1140. 2005
- *Mandea M. et al.* International geomagnetic reference field – 2000 // *Physics of the Earth and planetary interiors.* V. 120. P. 39–42. 2000.