

УДК 523.62-726

## СЕКТОРНЫЙ СФЕРИЧЕСКИЙ ГАРМОНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ МАГНИТНОГО ПОЛЯ СОЛНЦА

© 2013 г. А. Ф. Харшиладзе, К. Г. Иванов

ФГБУ науки Институт земного магнетизма, ионосферы и распространения радиоволн им. Н.В. Пушкова РАН, г. Троицк (Московская обл.)

e-mail: kivanov@izmiran.ru

Поступила в редакцию 28.03.2012 г.

Теория секторного гармонического анализа развита применительно к специфическим условиям магнитного поля Солнца. Разработана программа для персонального компьютера. Возможности программы иллюстрируются анализом “сингулярности” крупномасштабного открытого поля Солнца 11.08.2004 г. с использованием данных MDI-магнитометра.

DOI: 10.7868/S0016794013010100

### 1. ВВЕДЕНИЕ

С XIX века сферический гармонический анализ является основным методом аналитического представления магнитного поля Земли [Chapman and Bartels, 1940]. В 1943 г. Чепмен указал на возможность применения этого метода для изучения магнитного поля Солнца [Chapman, 1943]. Но лишь в 1969 г. сферический гармонический анализ был впервые применен к специфическим данным о магнитном поле солнечной фотосферы [Altschuler and Newkirk, 1969]. Вскоре методом наименьших квадратов были найдены коэффициенты сферического ряда для всех оборотов Солнца, начиная с августа 1959 г. по январь 1974 г. [Altschuler et al., 1975]. При этом использовались лишь наблюдения вблизи центрального меридиана Солнца, не учитывалось расхождение плоскостей эклиптики и гелиографического экватора.

В методе наименьших квадратов требуется вычисление довольно больших матриц, что накладывает определенные условия на компьютерную память и время вычисления, особенно при отыскании сферических гармоник высокого порядка. В 80-е годы с этими техническими трудностями приходилось считаться, и в этой связи был предложен другой способ отыскания сферических коэффициентов [Altschuler et al., 1977], основанный на учете ортогональности сферических функций с использованием метода наименьших квадратов. В дальнейшем появилась модификация этого метода, целиком основанная на свойстве ортогональности. Именно этим методом найдены коэффициенты сферического ряда для всех солнечных оборотов с мая 1976 г. по январь 1991 г. [Hoeksema and Scherrer, 1986; Hoeksema, 1991], и вплоть до настоящего времени формируется база данных этих коэффициентов, основанная на анализе наблюдений солнечной обсерватории им. Уилкокса

[<http://WSO.Stanford.edu/synoptic/WSO>]. В методе Rudenko [2001] также существенно используется свойство ортогональности.

Между тем из общих соображений ясно, что метод наименьших квадратов и этот последний метод, назовем его для краткости методом ортогональности, неравноценны по точности. Метод наименьших квадратов по своей сути нацелен на отыскание коэффициентов, обеспечивающих минимумы в расхождении между реальным полем и его аналитическим представлением, тогда как в методе ортогональности этот минимум может и не достигаться. В этом смысле коэффициенты, найденные методом ортогональности, представляются менее достоверными, чем коэффициенты по методу наименьших квадратов.

В этой связи в работе [Харшиладзе и Иванов, 1994] сферический анализ магнитного поля Солнца методом наименьших квадратов обобщен на произвольную сеть точек на фотосфере, и учтено при этом несовпадение плоскостей гелиоэкватора и эклиптики.

Для вычисления сферических коэффициентов методом наименьших квадратов используются данные по компоненте поля по лучу зрения в достаточно густой сетке точек на фотосфере. Характерный масштаб изменений в пространстве вычисляемого поля не должен быть меньше густоты сетки точек, в которые заданы значения компоненты поля по лучу зрения. Другими словами, максимальное значение  $N$  индексов коэффициентов сферического разложения не должно превосходить  $360^\circ/\lambda$ , где  $\lambda$  — характерное расстояние между точками сетки в градусах.

Весьма существенным ограничивающим обстоятельством является невозможность применения классического сферического анализа к части сферической поверхности Солнца: если имеются

данные по полю, на достаточно большой части поверхности Солнца, то методом наименьших квадратов получить сферические коэффициенты не удастся, так как сферический анализ применим только ко всей сфере. Можно, конечно, отсутствующие данные заполнить нулями, вычислить сферические коэффициенты для всей сферы, и синтезированное значение поля рассматривать только в интересующей нас области. Это, к сожалению, настолько неэкономно с точки зрения использования машинного времени и памяти, что делает такой путь практически нереализуемым: при увеличении числа гармоник сферического разложения размер матрицы системы метода наименьших квадратов растет, как четвертая степень  $N$ .

Аналогичная проблема возникла ранее в аналитическом представлении магнитного поля Земли и была успешно решена методом секторного сферического гармонического анализа, предложенным в работе [Haines, 1985] и применимым к любому произвольно расположенному круговому сектору.

Цель данной работы – модифицировать методику секторного сферического гармонического анализа к специфическим условиям магнитного поля Солнца. В разделе 2 указаны базис пространства гармонических функций на любом круговом секторе Солнца и следующие из него формулы для компонент магнитного поля; в разделе 3 – формулы перехода между исходной гелиографической системой координат и сферической системой любого произвольно расположенного кругового сектора; в разделе 4 – пример применения секторного сферического гармонического анализа магнитного поля Солнца к области “сингулярности” крупномасштабного открытого магнитного поля Столица, обнаруженной в работах Иванова [2010а, б].

## 2. БАЗИС ПРОСТРАНСТВА ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И СОСТАВЛЯЮЩИЕ МАГНИТНОГО ПОЛЯ КРУГОВОГО СЕКТОРА НА СОЛНЦЕ

Согласно работе [Haines, 1985] полная система базисных функций на круговом секторе  $\theta < \theta_0$  ( $\theta$  – коширота,  $\theta_0$  – полюс кругового сектора) строится следующим образом.

Рассмотрим функции Лежандра  $P_n^m(x)$  при целых значениях  $m$  и произвольных вещественных неотрицательных значениях  $n$ , при которых

$$P_n^m[\cos(\theta_0)] = 0 \quad (1)$$

или

$$\frac{\partial P_n^m}{\partial t} - [\cos(\theta_0)] = 0. \quad (2)$$

Расположим это множество значений  $n$  в порядке возрастания и пронумеруем следующим

образом:  $n_k(m)$  при  $k \geq m$  и четных  $(k-m)$  удовлетворяют равенству (2), а при нечетных  $(k-m)$  – равенству (1).

Сферические функции

$$P_{n_k}^m(\cos\theta)\cos(m\varphi) \text{ и } P_{n_k}^m(\cos\theta)\sin(m\varphi) \quad (3)$$

образуют полную ортогональную систему функций, определенных на приполярной области  $\theta < \theta_0$ .

При уменьшении кошироты границы приполярной области  $\theta_0$  значения  $n_k(m)$  возрастают и обеспечивают уменьшение характерного масштаба зависимости функций  $(\cos\theta)$  от  $\theta$ .

Любая гармоническая функция в области над сектором  $\theta < \theta_0$  может быть естественно аппроксимирована конечной суммой

$$\sum_{-k, m} \left( \frac{a}{r^{n_k(m)+2}} + br^{n_k(m)-1} \right) \times \quad (4)$$

$$\times [g_{km}\cos(m\varphi) + h_{km}\sin(m\varphi)] P_{n_k(m)}^m(\cos\theta),$$

где  $g_{km}$ ,  $h_{km}$  – сферические коэффициенты;  $a$ ,  $b$  – произвольные коэффициенты, учитывающие вклад внутренних и внешних источников поля соответственно.

Особый интерес с точки зрения приложений к магнитному полю Солнца представляет собой комбинация

$$\sum_{k, m} \left[ \left( \frac{R_0}{r} \right)^{n_k(m)+2} - \left( \frac{R_0}{R_s} \right)^{n_k(m)+2} \left( \frac{r}{R_s} \right)^{n_k(m)-1} \right] \times \quad (5)$$

$$\times [g_{km}\cos(m\varphi) + h_{km}\sin(m\varphi)] P_{n_k(m)}^m(\cos\theta),$$

где  $R_0$  – радиус Солнца,  $R_s$  – радиус поверхности источника, обеспечивающего нулевую тангенциальную компоненту магнитного поля на сферической поверхности  $R_s$ .

Описанная ортогональная система функций позволяет реализовать сферический анализ магнитного поля не на полной сфере, а на ее приполярной части. Делая замену сферической системы координат, при которой северный полюс переходит в произвольную точку на сфере, мы можем распространить этот метод на произвольную круговую область на сфере.

Сферический анализ состоит в следующем: используя результаты измерения магнитного поля в достаточно густой сетке точек в заданной круговой области применяем метод наименьших квадратов для определения конечного набора сферических коэффициентов.

Для определения синтезированного магнитного поля применяем следующие формулы:

$$\begin{aligned}
 B_r &= \sum P_{n_k(m)}^m(\cos\theta)(g_{km} \cos(m\varphi) + \\
 &+ h_{km} \sin(m\varphi)) \left( (n+1)(R_0/r)^{n_k(m)+2} + \right. \\
 &\quad \left. + \left( \left( \frac{R_0}{R_s} \right)^{n_k(m)+2} \left( \frac{r}{R_s} \right)^{n_k(m)-1} \right) \right), \\
 B_\theta &= -\sum \frac{\partial P_{n_k(m)}^m(\cos\theta)}{\partial\theta} (g_{km} \cos(m\varphi) + \\
 &+ h_{km} \sin(m\varphi)) \left( (R_0/r)^{n_k(m)+2} + (r/R_s)^{n_k(m)-1} \times \right. \\
 &\quad \left. \times (R_0/R_s)^{n_k(m)+2} \right) \\
 B_\varphi &= \frac{1}{\sin\theta} \sum P_{n_k(m)}^m(\cos\theta) \times \\
 &\times (h_{km} \cos(m\varphi) - g_{km} \sin(m\varphi)) \left( (R_0/r)^{n_k(m)+2} + \right. \\
 &\quad \left. + (r/R_s)^{n_k(m)-1} (R_0/R_s)^{n_k(m)+2} \right).
 \end{aligned} \tag{6}$$

Вся эта процедура почти точно копирует сферический анализ для полной сферы, описанный в работе [Харшиладзе и Иванов, 1994] с той лишь разницей, что вместо функций Лежандра с целыми индексами берем функции Лежандра (3).

### 3. ФОРМУЛЫ ЗАМЕНЫ СИСТЕМЫ КООРДИНАТ

Допустим, что интересующая нас круговая область на сфере имеет центр в точке со сферическими координатами  $\theta, \varphi$ . Если  $\theta_1, \varphi_1$  – сферические координаты произвольной точки в этой системе координат, то координаты этой же точки (в данном случае гелиографической) сферической системы координат вычисляются следующим образом.

С каждой из двух сферических систем координат связана декартова система координат.

Так, в интересующем нас круговом секторе имеем:

$$\begin{aligned}
 x_1 &= R \sin\theta_1 \cos\varphi_1, \\
 y_1 &= R \sin\theta_1 \sin\varphi_1, \\
 z_1 &= R \cos(\theta_1).
 \end{aligned}$$

Декартовы координаты в исходной системе  $x_0, y_0, z_0$  получаются умножением

$$\begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}, \tag{7}$$

где  $A$  – матрица вида

$$A = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Далее переходим от декартовых к сферическим координатам исходной системы по формулам:

$$\begin{aligned}
 \theta_0 &= \arccos \frac{z_0}{\sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}}, \\
 \varphi_0 &= \arctg(y_0/x_0).
 \end{aligned} \tag{9}$$

### 4. СЕКТОРНЫЙ АНАЛИЗ “СИНГУЛЯРНОСТИ”

#### КРУПНОМАСШТАБНОГО ОТКРЫТОГО МАГНИТНОГО ПОЛЯ СОЛНЦА (КОМПС)

На основании вышеизложенного была реализована компьютерная программа секторного сферического гармонического анализа магнитного поля Солнца и включена в пакет программ ISOPAK, используемый в ИЗМИРАН для моделирования магнитного поля Солнца.

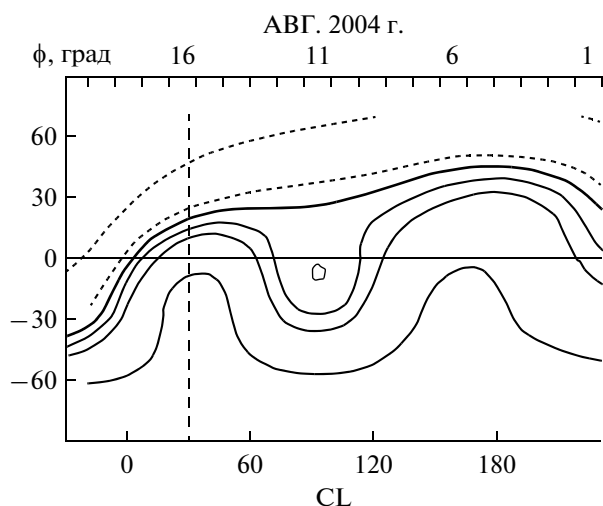
Как пример использования этой программы ниже приведены результаты секторного анализа “сингулярности” крупномасштабного открытого поля Солнца, о которой сообщается в работах Иванова [2010а, б].

В динамике КОМПС на фазе спада 23-го цикла, на одном из этапов МГД-процесса возникновения и исчезновения 4-секторной структуры обнаружены чрезвычайно быстрые изменения масштабов одного из новых секторов – от экстремально малого (“сингулярности”) до обычного, возникшего после всестороннего расширения (“взрыва”) “сингулярности”.

Внутри “сингулярности” существовала очень мощная, исчезнувшая после “взрыва” группа пятен АО 10656 с площадью до 1540 мдп с сильным дефицитом внешнего энерговыделения и абсолютно неэффективной, несмотря на близость к гелиопроекции Земли. “Взрыв” “сингулярности” 18.08.2004 г. сопровождался двумя мощными СМЕ с энергиями  $5.2 \times 10^{30}$  эрг, удивительно согласованными и симметричными по их кинематическим характеристикам, а также мощным выделением энергии в конвективной зоне Солнца [Иванов, 2010б]. Возникшая вследствие этого выделение цепочка явлений привела в конечном итоге к солнечно-земной экстратуре 3–10.11.2004 г.

Для нас одним из стимулов разработки секторного анализа было моделирование поля этой “сингулярности”.

На рисунке 1 приведена карта КОМС по результатам сферического гармонического анализа,



**Рис. 1.** Карта крупномасштабного открытого магнитного поля Солнца (КОМПС) на поверхности источника ( $2.5 R_0$  от центра Солнца, CR 2019) с “сингулярностью” КОМПС на 11.08.2004 г.; изолинии: +1, 2, 5  $\mu\text{T}$ . По результатам сферического гармонического анализа (<http://quake.Stanford.edu/~WSO>).

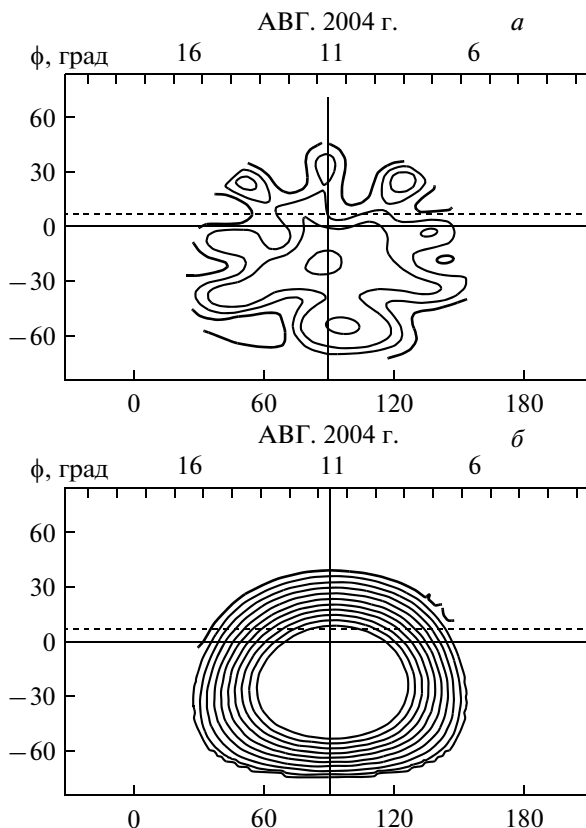
выполненного в Стэнфорде по данным <http://quake.Stanford.edu/~WSO> (каррингтоновский оборот 2019). На рисунке 2: *a* – модель поля

(10 гармоник на фотосфере  $R_s = 1R_0$  по результатам нашего секторного анализа в круге с радиусом  $60^\circ$  с полюсом в точке 12 ч 11.08.2004 г. и  $\Phi = -15^\circ$  по данным магнитометра MDI/SOHO (<http://soi.Stanford.edu/cgi-bin/mai>); *b* – модель поля по результатам секторного анализа в этом же круге, но на поверхности источника  $R_s = 2.5R_0$ .

Подробное обсуждение данного конкретного события выходит за рамки этой статьи, но хотелось бы подчеркнуть, что с помощью секторного анализа оказывается возможным моделирование очень сильных полей на поверхности источника (до 90 мкТл – рис. 2б), каким оказалось поле “сингулярности”, тогда как обычный сферический анализ допускает модели с полями интенсивностью не более 20 мкТл [Hoeksema, 1986].

Благодарим сотрудников Wilcox Solar Observatory и авторов эксперимента MDI/SOHO за данные о магнитном поле Солнца, А.И. Завойкину и Ю.А. Курицына – за помощь в подготовке статьи.

Работа частично поддержана Программой фундаментальных исследований Президиума РАН VI.15. “Плазменные процессы в солнечной системе”.



**Рис. 2.** Карты секторного анализа “сингулярности” и ее окрестностей в окружности радиуса  $60^\circ$  с полюсом  $\Phi = -15^\circ$ , 11.08.2000 г. по данным магнитометра MDI/SOHO: *a* – на фотосфере ( $1R_0$ ), изолинии 0, -10, -20, -50 Гаусс; *b* – на поверхности источника ( $2.5R_0$ ), изолинии 0, -0.1, -0.2...-1 Гаусс (0, -10, -100  $\mu\text{T}$ ).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- *Иванов К.Г.* Вытеснение крупномасштабных открытых магнитных полей Солнца из зоны открытых долгот и гелиосферная буря 3–10 ноября 2004 г.: 1. Динамика поля и солнечная активность // *Геомагнетизм и аэрономия*. Т. 50. № 3. С. 298–310. 2010а.
- *Иванов К.Г.* Вытеснение ...: 2. Взрыв “сингулярности”, динамика пятнообразования и энерговыделения // *Геомагнетизм и аэрономия*. Т. 50. № 6. С. 723–738. 2010б.
- *Харшиладзе Л.Ф., Иванов К.Г.* Сферический гармонический анализ магнитного поля Солнца // *Геомагнетизм и аэрономия*. Т. 34. № 4. С. 22–28. 1994.
- *Altschuler M.D., Newkirk G.* Magnetic fields and structure of the solar corona // *Solar Phys.* V. 9. № 1. P. 131–140. 1969.
- *Altschuler M.D., Trotter D.K., Newkirk G., Howard G.* Tabulation of the harmonic coefficients of the solar magnetic fields // *Solar Phys.* V. 41. № 1. P. 225–226. 1975.
- *Altschuler M.D., Levine R.H., Stix M., Harvey J.* High resolution mapping of the magnetic field of the solar corona // *Solar Phys.* V. 51. № 2. P. 345–375. 1977.
- *Chapman S., Bartels J.* *Geomagnetism*. Oxford: Univ. Press. 600 p. 1940.
- *Chapman S.* On magnetism in the Sun’s atmosphere // *Mon. Not. Soc.* V. 103. № 2. P. 117–130. 1943.
- *Haines G.V.* Spherical cap harmonic analysis // *J. Geophys. Res.* V. 90. № B3. P. 2583–2591. 1985.
- *Hoeksema J.T., Scherrer P.H.* Solar magnetic field 1976 through 1985. Report UAG-94. Stanford: Wilcox Observatory, 205 p. 1986.
- *Hoeksema J.T.* The solar magnetic field 1985 through 1990. Report CSSA-ASTRO-91-01. Stanford: Wilcox Observatory, 204 p. 1991.
- *Rudenko G.V.* A contracting method for selfconsistent three-dimensional solution of the magnetohydrostatic equations using full-disk magnetogram data // *Solar Phys.* V. 198. № 1. P. 5–30. 2001.