УДК 524.1:550.385:533.951

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ПЛАЗМЕННОГО СГУСТКА ВЫСОКОЙ УДЕЛЬНОЙ ЭНЕРГИИ В ВЕРХНЕЙ АТМОСФЕРЕ. 2. ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ И ФИЗИЧЕСКИЕ ОСОБЕННОСТИ КРУПНОМАСШТАБНОГО ПЛАЗМЕННОГО ТЕЧЕНИЯ НА ПОЗДНЕЙ СТАДИИ ЕГО РАЗВИТИЯ (ОБЗОР)

© 2012 г. Е. Л. Ступицкий<sup>1</sup>, А. С. Холодов<sup>2</sup>

<sup>1</sup>12 Центральный научно-исследовательский институт МО, г. Сергиев Посад (Московская обл.) <sup>2</sup> Московский физико-технический институт, г. Долгопрудный (Московская обл.) *e-mail: stup@bk.ru* Поступила в редакцию 28.12.2010 г. После доработки 21.10.2011 г.

Во второй части работы приведены результаты трехмерных расчетов течения плазмы космического ядерного взрыва, выполненных в магнитогидродинамическом приближении. Проанализированы основные закономерности и особенности в развитии крупномасштабного плазменного течения на позднее время — до сотен секунд — в зависимости от высоты и энергии плазменного сгустка.

### 1. ВВЕДЕНИЕ

По мере торможения плазмы за счет взаимодействия с магнитным полем и разреженной ионосферой ее течение приобретает пространственный характер, становится существенным азимутальное перетекание массы, значительную долю в которой начинает составлять воздух. Однако с течением времени развитие возмущенной области на больших высотах начинает существенно отличаться от ее развития в плотных слоях атмосферы, где размеры обычно меньше высоты однородной атмосферы, и мощная гидродинамическая стадия расширения ионизованного газа отделяется по времени и содержанию физических процессов от более поздней, конвективной стадии всплывания разогретой области. В разреженной атмосфере и магнитосфере масштабы разлета плазмы могут значительно превосходить высоту однородной атмосферы, и сам переход от мощной гидродинамической стадии разлета и торможения плазмы в более позднюю конвективную стадию ее движения происходит непрерывно, причем высокая скорость плазмы может сохраняться вплоть до поздних времен в десятки и сотни секунд, а пространственный характер течения плазмы начинает проявляться уже на стадии интенсивного торможения. Таким образом, представление о конвективном характере движения плазмы после ее торможения является в определенной степени условным. Но учитывая сложившуюся терминологию, будем для краткости называть развитие взрыва на время более 1-2 с поздней стадией.

Главная цель выполненных к настоящему времени исследований развития взрыва на поздней стадии заключалась в получении общей, трехмерной картины течения плазмы для взрывов в диапазоне высот 100–1000 км на время в десятки и сотни секунд и анализе основных особенностей такого течения.

### 2. РАЗВИТИЕ КРУПНОМАСШТАБНОГО ПЛАЗМЕННОГО ТЕЧЕНИЯ В ИОНОСФЕРЕ С УЧЕТОМ НЕОДНОРОДНОСТИ ГЕОМАГНИТНОГО ПОЛЯ

#### 2.1. Постановка задачи и краткое описание вычислительного алгоритма

Учитывая ограниченность в вычислительных возможностях, такие расчетные исследования можно выполнять только в МГД-приближении, вводя ряд упрощающих предположений по физике процессов, не влияющих существенно на основные закономерности поведения параметров в возмущенной области:

 – для плазмы и фона рассматривалась сплошная односкоростная плазменная среда;

— при t = 0 плазма и фон разделены не только заданием различных термодинамических характеристик, но и степенью ионизации  $\alpha = n_e/n$ , где  $n_e$ , n — концентрации электронов и тяжелых частиц;

– течение плазмы и фона предполагается замороженным, т.е. процессы ионизации и рекомбинации не учитываются и в каждой частице  $\alpha =$  = const.

С учетом сделанных предположений, система МГД-уравнений, описывающая развитие возмущенной области, начиная со стадии интенсивного торможения плазмы, имеет вид (см., например, [Куликовский и др., 2001]):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{V}) = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{V})}{\partial t} + \operatorname{div}\left[\rho \mathbf{V} \mathbf{V} + \left(p + \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi}\right) \hat{\mathbf{I}} - \frac{\mathbf{B}\mathbf{B}}{4\pi}\right] = \rho \mathbf{g}, \qquad (2)$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \operatorname{div}\left[\left(e + p + \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi}\right)\mathbf{V} - \frac{\mathbf{B}(\mathbf{VB})}{4\pi}\right] = 0, \quad (3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = D\Delta \mathbf{B} + \operatorname{rot} \left[ \mathbf{V} \times \mathbf{B} \right].$$
(4)

Здесь

$$e = \rho\left(\varepsilon + \frac{\mathbf{V}\mathbf{V}}{2}\right) + \frac{\mathbf{B}^2}{8\pi};$$

 $\mathbf{g}$  — ускорение силы тяжести;  $\mathbf{\hat{l}}$  — единичный тензор. Диффузия поля учитывалась в квазиодно-родном приближении:

$$\operatorname{rot}(D\operatorname{rot}\mathbf{B}) = -D\Delta\mathbf{B} + [\nabla D \times \mathbf{B}] \cong -D(x, y, z)\Delta\mathbf{B}$$

Так как степень ионизации в частице полагалась неизменной, то для удельной внутренней энергии є использовалось уравнение состояния идеального газа:

$$\varepsilon = \frac{1}{\gamma - 1\rho} = \frac{1}{\gamma - 1} \frac{RT}{\mu}, \quad p = \frac{\rho RT}{\mu}.$$
 (5)

Обозначения в (1)–(5) общепринятые.

Начальные параметры плазмы задавались исходя из расчетов начальной стадии [Ступицкий и др., 2004], однако сам момент t = 0 для поздней стадии варьировался в процессе численного эксперимента. Степень ионизации фоновой среды предполагалась пространственно однородной, примерно соответствующей средней степени ионизации воздуха под действием жесткого излучения плазмы, выходящего из нее в самые первые моменты времени.

Распределение плотности в атмосфере в диапазоне высот  $h \cong 100-1000$  км аппроксимировалось формулой

$$\rho(h) = \rho(0) \exp(-h/\Delta(h)),$$

где

$$\Delta(h) = 6.75 + 0.0257(h - 100) + \delta(h).$$
 (6)

С учетом

$$\delta(h) = \frac{1}{2121} (h^2 - 351h + 25377) \exp(-h/113.2),$$

ГЕОМАГНЕТИЗМ И АЭРОНОМИЯ том 52 № 5 2012

где h,  $\Delta(h)$ ,  $\delta(h)$  в км, ошибка аппроксимации взятого из эксперимента распределения плотности не превышала 17%;  $\rho(0) = 1.29 \times 10^{-3} \text{ г/см}^3$ .

Так как пространственные масштабы возмущенной области могут достигать тысячи и более километров, то, вообще говоря, необходимо учитывать неоднородность геомагнитного поля. Магнитное поле Земли в довольно хорошем приближении описывается полем диполя:

$$B_0(R,\lambda) = \sqrt{B_{0R}^2 + B_{0\lambda}^2} = \frac{P_m}{R^3} \sqrt{1 + 3\sin^2 \lambda}.$$
 (7)

Компоненты поля равны:

$$B_{0R} = -\frac{2P_m}{R^3}\sin\lambda, \quad B_{0\lambda} = \frac{P_m}{R^3}\cos\lambda.$$

Здесь  $P_m = 8 \times 10^{25}$  Гс см<sup>3</sup> — магнитный дипольный момент Земли, R — расстояние от центра Земли,  $\lambda$  — магнитная широта, причем  $\lambda = 90^{\circ}$  —  $\theta$ , где  $\theta$  — угол между местом наблюдения и магнитной осью Земли.

Особенностью рассматриваемого класса задач и существенной трудностью в их решении является наличие нескольких разномасштабных процессов: возникновение и эволюция сильных разрывов (ударных и магнитозвуковых волн, контактных разрывов и др., в том числе с перепадами в несколько порядков) на начальной стадии формирования трехмерной картины течения плазмы; сильно различающиеся доли внутренней и кинетической энергии плазмы в возмущенной области (также на порядки); большая неоднородность на рассматриваемых масштабах атмосферы Земли на этапе разлета – торможения плазмы; длительные времена подлежащих моделированию процессов эволюции образующихся на конвективной стадии плазменных сгустков под совместным действием силы тяжести и магнитного поля Земли и др. Помимо отмеченных выше факторов, необходимо учитывать большое число самых разных физических процессов, поэтому выбор физико-математической модели (достаточно адекватной реальности и в то же время не перегруженной второстепенными деталями, превращающими задачу в "нерешаемую" на данном уровне развития вычислительной техники) является определяющим.

Эти и другие факторы не позволяют воспользоваться непосредственно существующими и доступными на данный момент численными методами решения МГД-уравнений и реализующими их программными продуктами. Поэтому под данный класс пространственных задач, насыщенных физическим содержанием, потребовалась разработка специальных методов и соответствующего программного обеспечения.

Анализ показывает, что в основу вычислительной модели должны быть положены методы



Рис. 1. Геометрия задачи.

сквозного расчета разрывных течений в эйлеровых переменных, являющиеся наиболее универсальными. При этом, учитывая необходимость расчетов на большие времена, сильную пространственную неоднородность и нестационарность задач, наличие разрывов искомых параметров большой интенсивности, сложную и меняющуюся во времени структуру течения и ряд других факторов, метод должен быть:

 явной разностной схемой по недиффузионной части уравнений МГД, что позволяет легко и эффективно "распараллелить" алгоритм под современные высокопроизводительные многопроцессорные вычислительные системы и решать реальные задачи с необходимой точностью;

 иметь высокий (2–3) порядок аппроксимации, что позволяет решить проблему больших времен и сильной пространственной неоднородности течений, так как такие схемы дают более качественное решение на относительно грубых сетках (с более детальным разрешением особенностей);

— обладать свойствами монотонности на разрывах и консервативности (по крайней мере, по массе и импульсу) для сквозного расчета разрывов большой интенсивности. Более того, в качестве одного из элементов численного метода (как правило, в качестве предиктора в схемах предиктор — корректор) необходимо использовать автомодельное решение задачи о распаде произвольного разрыва для решения проблемы сверхсильных разрывов (с интенсивностью в несколько порядков).

В данной работе в качестве базового метода были выбраны последние модификации сеточнохарактеристических методов [Воробьев и Холодов, 1996], хорошо зарекомендовавших себя ранее при решении самых разных классов задач газовой динамики, механики деформируемого твердого тела, физики плазмы [Магомедов и Холодов, 1988] и другие.

Учитывая наличие в данной задаче разрывов параметров большой интенсивности, образующихся на стадии интенсивного торможения плазмы, особое внимание уделялось анализу монотонности разностных схем высокого (2–3) порядка аппроксимации и их обобщению на трехмерный нестационарный случай.

Так как сферическая симметрия задачи при  $t \ge 1$  с начинает резко нарушаться, то в расчетах использовалась декартова система координат (x, y, z), в которой задавалось направление невозмущенного геомагнитного поля  $(B_x, B_y, B_z)$  (рис. 1). Уравнения (1)–(4), взятые в консервативной форме, расписывались по универсальному векторно-матричному шаблону.

Расщепление по пространственным переменным (x, y, z) осуществлялось в соответствии с построениями [Холодов, 1978]. Подробное описание вычислительного алгоритма и анализ возникающих трудностей дан в работе [Холодов и др., 2004].

По мере расширения временного и высотного диапазона решения задачи проводилось совершенствование численного алгоритма. В частности, предложен новый подход по процедуре коррекции энтропийного следа — нефизических решений, возникающих при расчете задач газовой динамики с большими перепадами параметров. Предложена новая версия расщепления и адаптации к параметрам невозмущенной атмосферы, отлажен вопрос с перестраиванием расчетной сетки [Холодов и др., 2005].

В научном и прикладном отношении наибольший интерес представляют космические ядерные взрывы (КЯВ) в диапазоне высот 100–1000 км. Возникающие при таких взрывах геофизические плазменные эффекты являются уникальными по своим масштабам и физическому содержанию и не могут быть в полной мере смоделированы и изучены в лабораторных условиях. Хотя существующих результатов натурных испытаний далеко не достаточно для тестирования разрабатываемых физических моделей и методик расчета, однако даже фрагментарные экспериментальные данные являются чрезвычайно полезными.

Выполненные к настоящему времени физические исследования и расчеты показали, что даже при одной и той же мощности взрыва его развитие существенно зависит от высоты в рассматриваемом диапазоне высот (100–1000 км). Остановимся кратко на физическом анализе результатов расчета развития возмущенной области взрыва на различных высотах.

### 2.2. Пространственно-временная структура плазменного течения при взрывах на высотах 100–120 км

В высотном диапазоне 80-120 км происходит принципиальное изменение в характере развития основных физических процессов, связанных с динамикой высокоэнергичного плазменного сгустка в ионосфере и возникающим при этом течении в целом. На меньшей высоте испускаемые плазмой в первые моменты времени жесткое рентгеновское и ультрафиолетовое излучения поглощаются непосредственно вблизи точки взрыва. Из-за высокой плотности среды энергия взрыва очень быстро трансформируется в ионизацию, разогрев воздуха и тепловое излучение, и затем в виде тепловой ударной волны эта энергия распространяется в пространстве, образуя разогретую область взрыва. При этом разлетающееся плазменное облако быстро тормозится - плазма остается локализованной в сравнительно небольшом объеме вблизи центра взрыва и поэтому не играет существенной роли в динамике всей возмущенной области. На время более 10 с восходящее движение разогретой области, начальные размеры которой обычно меньше высоты однородной атмосферы, приводит к формированию в ней вихревой структуры. При этом ионизационно-химические процессы в тепловой области взрыва, произведенного в плотных слоях атмосферы, остаются близкими к равновесным.

На высоте более 120 км выходящее из плазмы жесткое излучение распространяется на значительные расстояние от центра взрыва: в верхней полусфере основная его доля выходит за пределы атмосферы. Та же часть, которая распространяется в нижнюю полусферу, поглощается в основном на высотах 50–70 км, куда доходит лишь сравнительно слабое газодинамическое возмущение, генерируемое последующим разлетом плазменного облака. В результате на этих высотах образуется обширная область "холодной" ионизации и люминесцентного свечения, в которой из-за низкой степени ионизации разогрева воздуха практически не происходит. Вблизи центра взрыва из-за высокой плотности потока излучения происходит полная ионизация атомов азота и кислорода, но вследствие низкой концентрации частиц на высоте более 120 км эти прилежащие к центру слои воздуха до определенных расстояний практически не оказывают влияния на динамику плазмы.

Таким образом, ясно, что развитие плазменной области взрыва на высоте 80-120 км должно иметь свои "переходные" особенности, отличные от взрыва на меньших и больших высотах. Эти особенности связаны не только с развитием газодинамического течения, но и с характером энерговыделения жесткого излучения: заметная его доля поглощается в ближней области от точки взрыва, куда затем разлетается плазменное облако. Жесткое (рентгеновское и ультрафиолетовое) излучение ионизирует воздух, вырывая электроны с внутренней (К) и внешних (L) оболочек атомов и молекул. Кроме того, происходит диссоциация молекул и возбуждение электронных уровней. При ионизации с К-оболочки кроме фотоэлектрона образуется еще один электрон в результате эффекта Оже. В результате подробного анализа этих процессов в работе [Лавриненко и др., 2007] получено аналитическое выражение для расчета относительной концентрации фотоэлектронов  $\alpha = n_{e\phi}/z_M n_A$  в воздухе после окончания импульса жесткого излучения энергией Е<sub>v</sub>:

$$\alpha(r) = 1 - \exp\left[-(1+\delta)\frac{E_{\nu}}{4\pi r^2}\frac{15}{\pi^4}\frac{\sigma_{0,4}\beta^3}{T}J(\tau_0,\beta)\right].$$

Здесь

$$J(\tau_{0},\beta) = \\ = \left[\frac{4}{5}\frac{\exp(-\beta)}{\beta} + \frac{3}{2}\frac{\sqrt{2\pi/5}(3\tau_{0}\beta^{3})^{1/8}}{1+(3\tau_{0}\beta^{3})^{1/4}}\right]\exp\left[-\frac{3}{2}(3\tau_{0}\beta^{3})^{1/4}\right]$$

есть функция, учитывающая поглощение излучения воздухом; она определяется двумя безразмерными параметрами

T

$$\beta = \frac{I}{T};$$
  
$$\tau_0 = \frac{\sigma_{0M}}{\cos \theta} \int_{h}^{H} n_M(r) dr \approx \frac{\sigma_{0M} n_M(h)}{\cos \theta} \times \Delta(h) \left\{ 1 - \exp\left[-\frac{H-h}{\Delta(h)}\right] \right\}.$$



**Рис. 2.** Зависимость относительной концентрации фотоэлектронов от горизонтального расстояния до центра взрыва, произведенного на высоте 100 км.

При этом вполне приемлемая точность расчета  $\tau_0$  обеспечивается, если в экспоненциально задаваемой атмосфере значение высоты однородной атмосферы  $\Delta$  брать по нижней точке интегрирования. Для пороговых значений сечений принято  $\sigma_{0M}n_M = 2\sigma_{0A}n_M = \sigma_{0A}n_A$ . В расчетах использованы пороговые значения сечений, рекомендуемые в работе [Ступицкий, 1983] на основе анализа многочисленных расчетных и экспериментальных исследований.

Расчеты показали (рис. 2), что на расстоянии менее 350 м жесткое излучение приводит к полной "обдирке" всех электронов ( $z = z_m$ , область *I*); затем  $\alpha(R)$  падает, и до расстояний ~1200 м все атомы воздуха однократно ионизованы (область *2*); на больших расстояниях степень ионизации быстро уменьшается и на R = 200 км не превышает 10<sup>-6</sup>. Средняя по спектру энергия фотоэлектронов также, для каждого значения  $\beta$ , зависит от расстояния [Лавриненко и др., 2007].

Состояние воздуха непосредственно после фотоионизации существенно неравновесно: кванты излучения вообще отсутствуют, фотоэлектроны имеют определенный спектр, причем на больших расстояниях максимальная доля их энергии сосредоточена в кэВ-ном диапазоне; а ионы и атомы имеют температуру невозмущенной фоновой атмосферы. В дальнейшем быстрые фотоэлектроны расходуют свою энергию на ионизацию и возбуждение атомов и молекул воздуха. Одновременно происходит обмен энергией между электронами, ведущий к установлению равновесия в электронном газе. Гораздо медленнее электроны отдают энергию ионам, разогревая воздух, еще медленнее их энергия переходит в энергию тормозного излучения. В работе [Коновалов и др., 1994] на основе численного решения нестационарного уравнения Больцмана получены подробные результаты трансформации энергии быстрых электронов по всем основным каналам неупругих процессов. В частности, получен хорошо известный из эксперимента результат, что для рождения одного теплового (с температурой окружающей среды) электрона быстрый электрон затрачивает в среднем энергию  $W_{e} \approx 33$  эВ.

Время передачи энергии от быстрых электронов ионам в сфере полной ионизации, где  $z = z_m =$ = 7.2, определяется формулой [Спитцер, 1957]

$$\tau_{ei} = \frac{9.96 \times 10^{12} \mu T_e^{3/2}}{n z^2 \Lambda}.$$

Для  $n = 2n_M = 2.26 \times 10^{13}$  см<sup>-3</sup>;  $z_m = 7.2$ ;  $\Lambda = 15$ ;  $\mu = 14.4$ ;  $T_e = 0.288$  кэВ получаем  $\tau_{ei} = 1.27 \times 10^{-3}$  с.

Так как в кинетической энергии плазмы после выхода жесткого излучения остается ~21% общей энергии [Ступицкий и др., 2004], то скорость разлета ее фронта, при начальных параметрах  $E_0 = 1.26 \times 10^{22}$  эрг,  $M = 10^6$  г, составляет в см/с

$$u_{\rm db} = \sqrt{10E_k/3M} = 9.4 \times 10^7,$$

где  $E_k = 0.21E_0$ . Таким образом, время расширения плазмы до размеров сферы полной ионизации (R = 400 м, рис. 2)  $t \approx R/u_{\phi} = 4.2 \times 10^{-4}$  с, т.е.  $t < \tau_{ei}$  ( $\tau_{ei}/t \approx 3$ ). В сфере однократной ионизации (z = 1, R = 1200 м,  $\overline{E} = 550$  эВ) это неравенство еще более сильное:  $\tau_{ei} = 9.4 \times 10^{-2}$  с,  $t = 0.13 \times 10^{-2}$  с ( $\tau_{ei}/t \approx 74$ ), также как и во всей области инерционного разлета и интенсивного торможения плазмы за счет взаимодействия с воздухом [Ступицкий, 2006], которая именно на высотах порядка 100 км, примерно равна размеру в км области поглощения основной доли жесткого излучения плазмы

$$\left(\frac{M}{4/3\pi\rho}\right)^{1/3}\approx\frac{1}{n\sigma}\sim1\,\mathrm{KM}.$$

Таким образом, важная физическая особенность развития взрыва на высотах порядка 100 км состоит в том, что расширение плазмы практически на всей стадии ее интенсивного торможения происходит в области основного энерговыделения жесткого излучения, причем тяжелые частицы в этой области практически холодные, и вся поглощенная энергия сосредоточена в фотоэлектронах. До прихода плазмы воздух остается неподвижным, и его молекулы не создают дополнительного противодавления, связанного с поглощением жесткого излучения, как это происходит при взрывах на меньших высотах. Передача энергии ионам и атомам воздуха от быстрых фотоэлектронов завершается уже после того, как он будет захвачен плазмой в область движения, что для развития возмущенной области в определенной степени эквивалентно тому, как если бы изначально значительная часть энергии жесткого



**Рис. 3.** Пространственное распределение на момент 11.2 с после взрыва на высоте 100 км (a, e, d) и на момент 8.9 с после взрыва на высоте 120 км  $(\delta, e, e)$ : безразмерной плотности  $\overline{\rho}(a, \delta)$ , концентрации плазмы  $C_{\Pi}(e, e)$ , поля вектора безразмерной скорости  $\overline{\nabla}(d, e)$ .

излучения была сосредоточена в кинетической энергии плазмы.

Вторая важная особенность в развитии взрыва на рассматриваемых высотах связанна со структурой газодинамического течения в возмущенной области. В работе [Лавриненко и др., 2007] приведены достаточно подробные расчетные результаты по развитию возмущенных областей для взрывов на высотах 100 и 120 км во временном диапазоне от долей секунды до минуты. Показано, что в приближении классической проводимости магнитное поле вытеснено из разогретой области и не оказывает заметного влияние на ее динамику. От взрыва на 100 км мощное газодинамическое возмущение достигает высот 80–85 км; от взрыва на 120 км – не ниже 105 км.

На рисунке 3 показано распределение плотности и скорости в безразмерных единицах для



**Рис. 4.** Пространственное распределение на момент 55 с после взрыва на высоте 100 км (a, e, d) и на момент 48 с после взрыва на высоте 120 км ( $\delta, e, e$ ): безразмерной плотности ( $a, \delta$ ), концентрации плазмы  $C_{\Pi}(e, e)$ , поля вектора безразмерной скорости  $\overline{\nabla}(d, e)$ .

двух взрывов на близкие моменты времени (порядка 10 с) на стадии развития конвективного движения. Для взрыва на 100 км ( $\rho_0 = 2.4 \times 10^{-10}$  г/см<sup>3</sup>) наблюдается более мощное вертикальное движение, чем для взрыва на 120 км ( $\rho_0 = 3.4 \times 10^{-11}$  г/см<sup>3</sup>), что прежде всего связано с распределением плотности на этих высотах: на  $h \le 110$  км высота однородной атмосферы  $\Delta(h)$  мало меняется и составляет  $\Delta \approx 7$  км; на h > 110 км  $\Delta(h)$  быстро возрастает. То есть с самого начала взрыв на 120 км происходит в более однородной среде, чем взрыв на 100 км, для которого наблюдается определенное отражение течения от более плотных слоев атмосферы на h = 80-85 км и более быстрое формирование восходящего течения разогретого газа.

Для взрыва на 120 км значительное уменьшение вертикальной составляющей скорости обусловлено центральной областью, занятой плазмой продуктов взрыва, где формируется максимальное значение плотности. В дальнейшем это приводит к существенному различию как в локализации самой плазмы продуктов взрыва, так и в структуре всей возмущенной области в целом. На время 30-50 с для взрыва на 100 км область максимальных значений в центре развивается — формируется течение вертикально вверх, область плазмы приобретает излом, его вершина достигает высоты порядка 300 км, горизонтальный размер до 400 км. Для взрыва на 120 км похожая область максимальных значений в центре возмущения начинает развиваться позже только к 40-й секунде и на время ~50 с область плазмы имеет горизонтальный размер 300—350 км, не поднимается выше высоты 170 км, имея при этом вертикальный размер всего 20-30 км (рис. 4).

Переходный характер газодинамического течения при взрывах в диапазоне высот 100–120 км прежде всего связан с развитием центральной области восходящего течения, где для взрыва на 100 км оно близко к струе (рис. 4). Однако, эта

центральная струя не вырождается в струйное течение всей возмущенной области, как это происходит на больших высотах, и, вместе с тем, несмотря на определенный разворот вектора скорости, движение в целом не переходит В крупномасштабный вихрь, что характерно для взрывов на меньших высотах. Первое не происходит, потому что плотность воздуха еще высока и не достаточно энергии на формирование полностью восходящего струйного течения; второе не происходит, потому что плотность уже настолько мала, что вертикальные масштабы течения намного превосходят высоту однородной атмосферы, а малая плотность в верхней части возмущенной области не способна полностью развернуть восходящее течение в центральной струе.

# 2.3. Структура плазменных течений при взрывах в верхней ионосфере на h = 120-300 км

Главная особенность рассматриваемого диапазона высот состоит в возрастании влияния геомагнитного поля и его неоднородности на формирование плазменного течения. Влияние воздуха остается определяющим в нижней части указанного диапазона, где на время до нескольких секунд разлетающаяся плазма формирует ионизующую ударную волну. С ростом высоты взрыва уже на ранней стадии расширения плазмы в частично ионизированный воздух в нем формируется магнитозвуковая волна, распространяющаяся с альфвеновской скоростью на расстояние до 1000 км и более.

Расчеты, выполненные с использованием классического выражения для проводимости, показали, что магнитное поле вытеснено из центральной части возмущенной области (ВО) на ранние моменты времени как для взрыва на 150 км, так и на 250 км (рис. 5*a*, *в*). Наибольшую скорость расширения газ достигает в верхней части возмущенной области ~ $2.7 \times 10^7$  см/с (рис. 56, г), причем на 150 км ВО более вытянутая по вертикали чем на 250 км по сравнению с горизонтальными размерами. Это связано с тем, что аппроксимационный параметр  $\Delta$  (аналог высоты однородной атмосферы) на 150 км (~7.4 км) значительно меньше, чем на 250 км (~10.6 км), где атмосфера более однородна по высоте. На это раннее время во всем рассматриваемом диапазоне высот течение газа близко к осесимметричному двумерному.

Однако уже на время  $t \approx 5$  с характер течения существенно меняется. На 150 км (рис. 6) начинает заметно влиять геомагнитное поле, формируется близкая к сферической, отошедшая магнитозвуковая волна, течение приобретает преимущественное направление вдоль магнитного поля. Однако в целом область еще имеет форму не сильно отличающуюся от сферической. На 250 км

(рис. 7) к этому времени уже происходит преимущественное распределение массы плазмы в плоскости магнитного меридиана и начинает формироваться восходящая плазменная струя, наклон которой под действием разреженной ионосферы и поля постепенно меняется.

На время  $t \approx 14$  с вертикальные масштабы течения достигают тысяч километров (~1000 км при H = 150 км и ~2000 км при H = 250 км). Образуется восходящий плазменный поток в виде гигантской струи с преимущественным распределением плазмы в плоскости магнитного меридиана. Наклон струи в мердианальной плоскости в сторону силовых линий поля для H = 150 км взрыва значительно меньше, чем при взрыве на 250 км, что определяется разницей в градиентах давления воздуха на этих высотах (рисунки 8–10). На большее время темпы развития пространственной картины течения и возникают нерегулярности в его структуре (рис. 11).

# 2.4. Структура плазменного течения при магнитосферных взрывах

По существующим представлениям область высот  $h \ge 400$  км относится к магнитосфере. Большие масштабы возмущенной области взрыва (тысячи километров) и соответственно большой перепад параметров (5-7 порядков величины) приводят к значительным вычислительным трудностям, что требовало постоянной модификации самого алгоритма при расчете магнитосферных взрывов. Были выполнены достаточно подробные по времени трехмерные расчеты вплоть до  $t \approx 50$  с для взрывов мощностью 300 кт ( $E = 1.26 \times 10^{22}$  эрг) на высотах 400, 700 и 1000 км. Предполагалось, что начальная энергия разлетающейся плазмы  $E_0 =$  $= 1.7 \times 10^{21}$  эрг, т.е. 14% от энергии взрыва. Для сравнения были выполнены также 2D расчеты в плоскости (ХОZ) с несколькими узлами по оси Оу. Такие 2D расчеты требовали значительно меньше временных затрат, поэтому они охватывали временной диапазон развития взрыва до 500-600 с и давали качественное представление о возможных глобальных эффектах в поведении плазменного течения.

Как показывают теоретический анализ и результаты расчета, характер развития плазменного течения в околоземное космическое пространство (ОКП) определяется энерговыделением, плотностью окружающей ионосферы, значением и направлением геомагнитного поля ( $E_0$ , H,  $\varphi$ ). С геофизической точки зрения наиболее важное значение имело исследование тех изменений в плазменном течении, которые связаны с изменением высоты взрыва в рассматриваемом достаточно широком диапазоне 100–1000 км. Поэтому, для простоты сравнительного анализа, большин-



**Рис. 5.** Распределение вектора магнитного поля (a, b) и модуля проекции вектора скорости (b, c) на плоскость магнитного меридиана на ранние моменты времени.

H = 150 км, t = 0.3 с,  $E_0 = 10^{22}$  эрг. ( $a, \delta$ )

H = 250 км, t = 0.25 с,  $E_0 = 10^{22}$  эрг. (в, г).

ство приведенных результатов относятся к мощности взрыва 300 кт (1 кт =  $4.2 \times 10^{19}$  эрг) и широты точки взрыва  $\phi = 45^{\circ}$ .

На рисунке 12 показаны профили основных параметров для взрыва q = 300 кт, H = 400 км,  $\varphi = 45^{\circ}$ , t = 0.8 с в меридиональной и широтной плоскостях. Пространственный характер течения плазмы начинает формироваться уже на t < 1 с и к концу первой секунды все распределения становятся существенно пространственными. По мере торможения плазмы в нижней полусфере вблизи ее фронта в воздухе формируется ударно-волновая структура, где воздух поджат и сильно разогрет. Поэтому поперечные масштабы течения по внутренней энергии, плотности и скорости несколько больше масштабов самого плазменного потока (рис. 13, t = 3.03 с).

После отрыва от плазмы магнитозвуковая волна является сравнительно слабой, причем в "южной" ее ветви течение заметно интенсивнее, чем в "северной", что связано с восходящим характером движения "южной" ветви волны. Течение плазмы за фронтом магнитозвуковой волны, в область ее разделения на северную и южные ветви быстро приобретает характер струи, движение которой в начале близко к вертикальному, т.е. суще-

ствует поперечная составляющая скорости относительно поля. Затем, по мере уменьшения направленной скорости, струя приобретает наклон в сторону направления силовых линий поля. Так как кинетика внутри плазмы предполагалась "замороженной" со степенью ионизации  $\alpha = 1$ , то магнитное поле слабо проникало в плазму.

На большие времена (t = 40-100 с, рис. 14) продольные размеры плазменной струи достигают тысяч километров при относительной толщине 15-20%. Образующаяся струя, в частности, ее передняя часть, состоящая в основном из плазмы взрыва, является более горячей по сравнению с окружающей атмосферной плазмой, а направление движения головной части струи близко к направлению магнитных силовых линий. Сравнение при  $t \sim 50$  с расчетов на разных сетках не дали каких-либо принципиальных различий в развитии течения и поведении его основных параметров. Продолжение расчетов до t = 117 с дает достаточно регулярную картину поведения плазмы вдоль силовых линий геомагнитного поля. Однако скорость, внутренняя энергия и плотность внутри всей возмущенной области вблизи земной поверхности приобретают нерегулярный характер. Это говорит о необходимости корректного учета в вычислительном процессе на большое время влияния земной поверхности, когда возмущение приобретает глобальный характер. Расчеты, выполненные для H = 150 км, H = 250 км и H = 400 км показали, что, несмотря на сильное разрежение, ионосферный воздух продолжает оказывать существенное влияние на формирование течения плазмы, заканчивающееся при умеренном энерговыделении, образованием крупномасштабной плазменной струи.

Как следует из уравнений динамики плазмы и анализа результатов расчета, начальное направление ее движения определяется, прежде всего, направлением градиента давления. Из рисунка 15 видно, что два направления определяют движение крупномасштабного плазменного течения в виде восходящей струи: по вектору *dl*, соответствующему направлению по силовой линии поля, и по *dr*, соответствующему движению вертикально вверх.

Движение по *dr* определяется радиальным градиентом давления  $\varphi$ -ой составляющей магнитного поля, которая в приближении магнитного диполя равна  $B_{\varphi} = P_m \cos \varphi / r^3$ , где  $P_m = 8 \times 10^{25}$  Гс см<sup>3</sup> – магнитный момент Земли. Для градиента *B* вдоль силой линии поля легко получить

$$\frac{dB}{dl} = \frac{P_m}{r^4} \frac{3\sin\varphi \left(3 + 5\sin^2\varphi\right)}{1 + 3\sin^2\varphi}.$$

ГЕОМАГНЕТИЗМ И АЭРОНОМИЯ том 52 № 5 2012



**Рис. 6.** Распределение скорости и магнитного поля в плоскости магнитного меридиана и перпендикулярной ей.

С учетом давления атмосферы *Р* отношение градиентов давления будет

$$\delta = \frac{\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{B_{\varphi}^2}{8\pi} + P \right)}{\frac{\partial}{\partial l} \left( \frac{B^2}{8\pi} + P \right)}.$$
(8)



**Рис.** 7. Пространственное распределение плотности  $\overline{\rho}$  ("обезразмеренной" на плотность невозмущенной атмосферы на данной высоте) (*a*); концентрации плазмы  $C_{\Pi}(\delta)$ ; модуля проекции векторов скорости (*s*); векторов магнитного поля (*e*); в плоскости (*XOZ*); концентрации плазмы  $C_{\Pi}(\partial, e) - в$  плоскости (*YOZ*). Вертикальные и горизонтальные оси в километрах, H = 250 км, t = 5.4 с.

Ho 
$$\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{B_{\phi}^2}{8\pi} + P \right) / \frac{\partial P}{\partial r} \ge 1$$
 примерно при  $h \ge 300$  км.

Именно поэтому, несмотря на существенное отклонение геомагнитного поля от вертикали, в представленных расчетах на 150 км распростра-



**Рис. 8.** Распределение безразмерных параметров в плоскости срединного меридиана (y = 0) в момент времени t = 14.6 с: *Ro*(x, z)/*Ron*(x, z) – отношение плотности к плотности невозмущенной атмосферы;  $E_V(x, z)$  – отношение удельной внутренней энергии к ее величине в точке взрыва невозмущенной атмосферы; Vxz – проекция вектора скорости на плоскость меридиана; Bxz – проекция вектора напряженности магнитного поля на плоскость меридиана. Все шкалы линейные.

нение струи близко к вертикальному и определяется главным образом градиентом давления воздуха. Для h > 300 км вторым слагаемым в выражении (8) для  $\delta$  можно пренебречь, в результате получаем

$$\delta = \frac{B_{\varphi} \frac{\partial B_{\varphi}}{\partial r}}{B \frac{\partial B}{\partial l}} = \frac{\cos^2 \varphi \sqrt{1 + 3\sin^2 \varphi}}{\sin^2 \varphi (3 + 5\sin^2 \varphi)},$$

При  $\phi \to \frac{\pi}{2} \delta \to 0$ , так как в приполярных областях отсутствует поперечная составляющая магнитного давления, и струя будет распространяться вертикально вверх. При  $\phi \to 0 \delta \to \infty$ , так

ГЕОМАГНЕТИЗМ И АЭРОНОМИЯ том 52 № 5 2012

как отсутствует градиент давления вдоль силовых линий поля.

Можно приближенно полагать, что если  $\delta > 1$ , то значительная часть массы плазмы при достаточной начальной энергии будет иметь составляющую скорости поперек магнитного поля, и при  $\delta < 1$  (большие широты) ее движение будет близко к направлению силовых линий поля. При  $\phi \approx 17^{\circ}$  $\delta = 1$ , т.е. на этой широте струя будет двигаться примерно по биссектрисе угла  $\alpha$ . Следует отметить, что это согласуется качественно как с выполненными расчетами, так и с экспериментом "Морская звезда", который проводился примерно на той же широте.

На рисунке 16 для качественного сравнения показано картина локализации плазмы после торможения, полученная в расчетах, эксперименте "Морская звезда" и по приближенной ме-



**Рис. 9.** Распределение безразмерных параметров в плоскости (x = 0) в момент времени t = 14.6 с.

тодике, изложенной в работе [Ступицкий, 2006]. В целом форма и размеры плазменной области согласуются между собой. Однако значительно большее энерговыделение в эксперименте и свечение атмосферы, вызванное жестким излучением, не дает возможности для более детального сопоставления расчетных и экспериментальных данных.

С ростом высоты в магнитосфере, по мере уменьшения влияния воздуха, все более существенным становится влияние широты точки взрыва на развитие плазменного течения. Взрыв на H = 700 км рассчитывался для  $\phi = 0^{\circ}$ ; 15°; 45°. Для  $\phi = 0^{\circ}$  течение симметрично относительно магнитного экватора. В нижней полусфере плазма достигает высот 450-500 км; в верхней полусфере формируется отошедшая магнитозвуковая волна. В результате более интенсивного растекания вещества и энергии вдоль силовых линий поля симметрично экватору при  $\phi = 0^{\circ}$  верхняя граница возмущенной области достигает сравнительно небольших высот (~1000 км), и мощной восходящей плоской струи не образуется (рис. 17). При  $\phi = 15^{\circ}$  течение в целом носит характер, аналогичный  $\phi = 0^{\circ}$  с небольшой асимметрией в направлении геомагнитного поля.

Для  $\phi = 45^{\circ}$  течение, по общей структуре, аналогично взрыву на 400 км. Так как плотность воздуха мала, то восходящая плазменная струя формируется сразу по направлению поля в плоскости магнитного меридиана, и на время ~40–50 с ее верхняя граница достигает значительно большей высоты (~4000 км, рис. 18), чем при взрыве на 400 км (~2500 км).

Для взрыва на H = 1000 км расчеты были выполнены для  $\varphi = 0^{\circ}$ ; 45°; 90°. При  $\varphi = 0^{\circ}$  на  $t \sim 6$ – 9 с становится заметным преимущественное распределение плазмы в плоскости магнитного меридиана. При  $\varphi = 45^{\circ}$  формирующаяся в плоскости магнитного меридиана наклонная по полю плазменная струя на  $t \approx 47$  с достигает высоты h == 6000 км. Так как плотность энергии окружающей среды очень мала ( $\sim 2 \times 10^{-4}$  эрг/см<sup>3</sup>), то и поперечные размеры общей возмущенной области на это время становится сравнимыми с вертикальными (рис. 19). Возмущение в сильно разреженном ионизованном воздухе связанно с формированием в нем уже на ранней стадии магнито-



**Рис. 10.** Пространственное распределение плотности  $\overline{\rho}$  (обезразмеренной на пллотность невозмущенной атмосферы на данной высоте) (*a*), концентрации плазмы (*б*), модуля проекции векторов скорости (*в*), векторов магнитного поля (*г*), поля скоростей (*d*) – в плоскости (*XOZ*), концентрации плазмы  $C_n(e)$  – в плоскости (*YOZ*). Вертикальные и горизонтальные оси в километрах, H = 250 км, t = 13.5 с.

звуковой волны поперек поля (рис. 20). Для  $\phi = 0^{\circ}$  расчеты были выполнены до  $t \approx 5.2$  с. На рисунке 21 наблюдается формирование строго вертикального течения.

## 3. ДИНАМИКА ПЛАЗМЫ ПРИ БОЛЬШОЙ МОЩНОСТИ ВЗРЫВА

При достаточно высоком энерговыделении движение плазмы поперек геомагнитного поля



**Рис. 11.** То же, что и на рис. 10, но для *H* = 250 км, *t* = 50.2 с.

может приводить к его прорыву и выносу высокоэнергитичной части плазмы поперек магнитного поля за пределы магнитосферы Земли. Ясно, что о прорыве можно говорить, если радиус торможения плазмы полем больше масштаба неоднородности поля



**Рис. 12.** То же, что и на рис. 7, но для *H* = 400 км, *t* = 0.8 с.

$$R_B \ge |(1/B)(\partial B/\partial r)|^{-1} = r/3, \qquad (9)$$

где r — геоцентрическое расстояние, через которое выражается геомагнитное поле в дипольном приближении

$$B(r, \varphi) = P_m (1 + 3\sin^2 \varphi)^{1/2} / r^3,$$

3 ГЕОМАГНЕТИЗМ И АЭРОНОМИЯ том 52 № 5 2012

где ф — магнитная широта. Из выражения (9) получаем оценку энергии плазмы, необходимую для прорыва,

$$E > P_m^2 / (162r^3).$$

Такую же по порядку величины энергию получаем из приближенного рассмотрения динамики плазмы на больших высотах, когда можно прене-



**Рис. 13.** То же, что и на рис. 7, но для *H* = 400 км, *t* = 3.03 с.

бречь воздухом. В экваториальной области  $\phi = 0$ , и приближенно динамику плазмы можно описать уравнением

$$M_0\frac{du}{dt}=-\frac{B^2}{8\pi}4\pi R^2,$$

где dR/dt = u,  $B(R) = P_m/(r+R)^3$ , r – геоцентрическое расстояние до центра взрыва. Из его решения

$$u^{2} = u_{0}^{2} - \frac{P_{m}^{2}}{30M_{0}r^{3}} \times \left[1 - \frac{10}{(1+R/r)^{3}} + \frac{15}{(1+R/r)^{4}} - \frac{6}{(1+R/r)^{5}}\right]$$

следует, что при  $R \to \infty u^2 > 0$ , если  $u_0^2 \ge P_m^2/30M_0r^3$ . То есть прорыв возможен, если

$$E = \frac{M_0 u_0^2}{2} > E^{*=} \frac{P_m^2}{60r^3}.$$

При h = 10000 км получаем  $E > 2.4 \times 10^{22}$  эрг, при h = 1000 км  $E > 2.7 \times 10^{23}$  эрг, а при h = 400 км  $E > 3.4 \times 10^{23}$  эрг.

Расчеты полностью подтверждают принципиальные изменения в характере движения плазмы при высоком начальном энерговыделении. На рисунках 22, 23 показаны результаты 3D и 2D расчетов для высокого начального энерговыделения ( $E_0 = 8.4 \times 10^{23}$  эрг) на высоте 400 км. На раннее время характер течения плазмы в меридиональ-



**Рис. 14.** То же, что и на рис. 7, но для *H* = 400 км, *t* = 56 с.

ной и широтной плоскостях подобны (t = 0.65 с), т.е. геомагнитное поле не оказывает существенного влияния на течение плазмы, и с течением времени (рис. 23, t = 21 с) наблюдается ламинарный прорыв плазмы через геомагнитное поле. Последующее образование струйного течения если и происходит, то на очень поздних временах, имеет существенно меньшую протяженность и невысокую интенсивность, так как давление внутри области из-за сильного расширения уже



Рис. 15. Схема направлений градиентов давлений.

очень мало. Магнитозвуковая волна существенно интенсивнее на всем протяжении ее фронта, который вблизи поверхности Земли расположен практически по нормали к ней. На малых высотах плотная атмосфера и практически нулевая проводимость на  $h \le 50$  км "не пропускают" возмущения к поверхности Земли и происходит их распространение преимущественно вдоль этой границы атмосферы, которая повышается над полярными областями. Сопоставление 3D и 2D расчетов на ранние моменты времени для данного варианта показали, что в обоих случаях процессы формирования и эволюции возмущений, оставаясь одинаковыми качественно, количественно отличаются достаточно сильно (например, с запаздыванием для 3D расчетов в 1.5-2 раза по времени выхода на одинаковые размеры возмущенной области). Как показано ранее, с ростом высоты требуется меньшая энергия плазмы для прорыва геомагнитного поля. Расчеты в целом подтверждают этот вывод. На рисунке 24 показано поведение основных параметров возмущенной области для  $E_0 = 3.2 \times 10^{21}$  эрг на высоте 650 км на t = 5.3 с. Течение носит характер прорыва, возбуждая в окружающей среде достаточно интенсивную МГД-волну. Таков же общий характер движения плазмы при взрыве на 1000 км.

Общей характерной чертой рассматриваемых вариантов расчета является распространение возмущений (в том числе струйного течения) на значительные расстояния от точки взрыва. При  $t/t_x \sim 15-50$  возмущения достигают экваториальной (в том же по долготе и полушарии, что и место взрыва) и южной полярной областей, при  $t/t_x \sim 50-100$  про-

ходят через эти области, приподнимаясь над южной полярной областью, при  $t/t_x \sim 100-200$  достигают северных умеренных широт и южных умеренных широт в противоположном полушарии по долготе и при  $t/t_x \sim 400$  выходят к северной полярной и противоположной по долготе экваториальной областям. Наиболее быстрое распространение возмущений (при  $t/t_x \sim 18$  до экваториальной области) наблюдалось для варианта ( $H_0 = 400$  км,  $E_0 = = 8.4 \times 10^{23}$  эрг).

Таким образом, в результате выполненных исследований достаточно подробно выяснена физическая картина развития возмущенной области и плазмы взрыва для умеренных и больших значений начального энерговыделения  $E_0$  и для широкого диапазона высот. Для умеренных  $E_0$  реализуется восходящее течение в виде гигантской струи. Для больших широт  $\varphi$  струя будет направлена вертикально по полю. По мере разворота силовых линий наиболее скоростная часть плазменной массы начинает их пересекать, продолжая двигаться на более высокие *L*-оболочки магнитосферы, так как скорость этой части плазмы направлена под достаточно острым углом  $\alpha$  к силовой ли-

нии, и магнитное давление  $\sim B^2 \sin^2 \alpha$  не в состоянии остановить это движение поперек поля. Это происходит до тех пор, пока поперечная составляющая скорости не уменьшится, и плазма начнет растекаться вдоль по силовым линиям, лежащим гораздо выше тех, которые проходят через центральную область взрыва. Движение плазмы в нижнюю полусферу быстро тормозится воздухом и частично геомагнитным полем. Для средних широт картина в целом остается той же. Формируется крупномасштабная плазменная струя под углом к силовым линиям поля, которая затем разворачивается, и происходит широтное растекание плазмы по полю. Детали поведения такой гигантской плазменной струи зависят от  $E_0, h, \phi,$  где ф – геомагнитная широта. При умеренных энерговыделениях, хотя плазменная струя и может подниматься на большие высоты, но в целом ее движение направляется геомагнитным полем. В связи с этим укажем аналогичное явление, возникающее при разлете высокоионизированной лазерной плазмы в магнитное поле [Брюнеткин и др., 1993], где также наблюдалось формирование струи и разогрев ее передних слоев. При большом энерговыделении поле не оказывает определяющего влияния на формирование течения, и наблюдается прорыв всего плазменного течения поперек поля, в верхние слои магнитосферы. При малых энерговыделениях и больших широтах поведение плазмы будет таким же, как и при умеренных  $E_0$ , так как будет определятся почти вертикальным геомагнитным полем и близким по направлению градиентом давления воздуха в



**Рис. 16.** a – результаты численного моделирования разлета плазмы взрыва (H = 400 км, t = 9 с),  $\delta$  – Фотография взрыва "Морская звезда" с о-ва Рождества (H = 400 км t = 10 с), s – пространственные границы разлета плазмы для взрыва на H = 400 км в координатах  $\theta$ , R в меридиональной плоскости (расчеты по инженерной методике).

ионосфере. Однако в экваториальной области при небольших  $\varphi$  характер движения может существенно меняться в зависимости от  $E_0$ . Если  $E_0$ мало, то энергии плазмы не хватит для формирования крупномасштабной струи поперек поля, и после торможения плазмы образующееся плазменное облако (ПО), являясь диамагнетиком, выталкивается магнитным полем в сторону его ослабления как целое. Характерное ускорение такого движения пропорционально неоднородности магнитного поля. Оценить динамику такого движения можно из уравнения

$$M_0 \frac{dv}{dt} = -\frac{\partial P}{\partial r} R_B \pi R_B^2$$

где  $P = B^2/8\pi = P_m^2/8\pi r^6$ ,  $R_B = \sqrt[3]{6E/B^2}$ , получаем  $v dv/dr = 9E/(2M_0 r)$ .

Пусть при  $r = r_0 v = 0$ , тогда получаем  $v = u_0 \sqrt{9/2 \ln (r/r_0)}$ . Когда масштабы смещения становятся сравнимыми с размером облака, т.е.  $r = r_0 + R_B$ , а  $R_B \ll r_0$ , то  $\ln(r/r_0) \cong R_B/r_0$ , и получаем оценку для скорости всплывания

$$v = u_0 \sqrt{9/2 R_B/r_0},$$

где  $u_0$  – начальная скорость расширения плазмы, определяющая ее кинетическую энергию  $E = M_0 u_0^2/2$ . При  $u_0 = 5 \times 10^7$  см/с,  $R_B \cong 300$  км и при  $r_0 = 7000$  км получаем  $v = 2 \times 10^7$  см/с. Отметим,



**Рис. 17.** Пространственное распределение концентрации плазмы:  $a - t = 1 \text{ c}; \delta - 5 \text{ c}; e - 25 \text{ c}; e - 55 \text{ c}$  (в плоскости *XOZ*); d - 5 c; e - 25 c (в плоскости *YOZ*).  $H = 700 \text{ км}, \phi = 0^{\circ}$ , вертикальные и горизонтальные оси в километрах.



**Рис. 18.** Пространственное распределение концентрации плазмы: a - t = 5 с; b - 15 с; b - 25 с; e - 40 с (в плоскости *XOZ*);  $\partial - 5$  с; e - 15 с; w - 25 с; 3 - 40 с (в плоскости *YOZ*), H = 700 км,  $\varphi = 45^{\circ}$ , вертикальные и горизонтальные оси в километрах.

что полученная оценка дает значительно большую скорость, чем приведенная в работе [Метелкин, 1989], где методом возмущений оценивается отклонение формы облака от сферического в процессе торможения в неоднородном поле. Это отклонение эквивалентно перемещению центра облака в сторону отрицательного градиента поля, которое, по оценке автора, происходит со скоростью



**Рис. 19.** Пространственное распределение безразмерных значений плотности  $\overline{\rho}$  (*a*); концентрации плазмы  $C_n$ , (*b*); модуля проекции векторов скорости (*s*); векторов магнитного поля (*c*); поля векторов скорости (*d*) – в плоскости (*XOZ*); концентрации плазмы  $C_n$  (*e*) – в плоскости (*YOZ*). Вертикальные и горизонтальные оси в километрах. H = 1000 км, t == 39.3 с. ( $\varphi = 45^\circ$ ,  $R_0 = 190$  км.  $\rho_0 = 3.6 \times 10^{-17}$  г/см<sup>3</sup>,  $T_x = 953^\circ$ K.  $E_{V4} = 1.46 \times 10^{10}$  эрг/г,  $V_x = 1.2 \times 10^5$  см/с.  $P_x = 5.8 \times$  $\times 10^{-8}$  дин/см<sup>2</sup>,  $B_x = 2.4 \times 10^{-4}$  Гс,  $t_x = 0.83$  с).

![](_page_23_Figure_1.jpeg)

**Рис. 20.** Пространственное распределение безразмерных значений плотности  $\overline{\rho}$  (*a*); концентрации плазмы  $C_n$ , (*b*); модуля проекции векторов скорости (*b*); векторов магнитного поля (*c*); поля векторов скорости (*d*). поля векторов магнитного поля – в плоскости (*XOZ*). Вертикальные и горизонтальные оси в километрах, H = 1000 км. t = 1.5 с. ( $\varphi = 45^\circ$ ,  $R_0 = 190$  км,  $\rho_0 = 3.6 \times 10^{-17}$  г/см<sup>3</sup>,  $T_x = 953^\circ$ K.  $E_{V4} = 1.46 \times 10^{10}$  эрг/г,  $V_x = 1.2 \times 10^5$  см/с.  $P_x = 5.8 \times 10^{-8}$  дин/см<sup>2</sup>,  $B_x = 2.4 \times 10^{-4}$  Гс,  $t_x = 0.83$  с).

![](_page_24_Figure_2.jpeg)

**Рис. 21.** Пространственное распределение безразмерных значений плотности  $\overline{\rho}$  (*a*); концентрации плазмы  $C_n$ , (*b*); модуля проекции векторов скорости (*b*); векторов магнитного поля (*c*); поля векторов скорости (*d*) – в плоскости (*XOZ*), концентрации плазмы  $C_n$  (*e*) – в плоскости (*YOZ*). Вертикальные и горизонтальные оси в километрах. H = 1000 км, t = 5.17 с. ( $\varphi = 90^\circ$ ,  $R_0 = 71$  км,  $\rho_0 = 7 \times 10^{-16}$  г/см<sup>3</sup>,  $T_x = 953^\circ$ К.  $E_{V4} = 1.46 \times 10^{10}$  эрг/г,  $V_x = 1.2 \times 10^5$  см/с. см/с.  $P_x = 5.8 \times 10^{-8}$  дин/см<sup>2</sup>,  $B_x = 2.4 \times 10^{-4}$  Гс,  $t_x = 0.83$  с).

 $\sim u_0 R_B / r_B$ , то есть процесс всплывания здесь имеет несколько другую природу — он связан с деформацией формы ПО. Кроме того, в качестве малого параметра автор использует отношение величины энергии вытесненного магнитного поля к кинетической энергии плазмы, которое на стадии интенсивного торможения уже не является достаточно малым. Вместе с тем физически ясно, что в процессе торможения и деформации ПО сравнительно малая вначале скорость ( $\sim u_0 R_B/r_B \simeq 0.04u_0$ ) затем будет возрастать в результате ускорения ПО как целого в неоднородном поле до  $\sim u_0 \sqrt{9R_B/2r_0} \simeq 0.4u_0$ .

#### МОДЕЛИРОВАНИЕ ДИНАМИКИ ПЛАЗМЕННОГО СГУСТКА

![](_page_25_Figure_1.jpeg)

**Рис.** 22. a - 3D-задача,  $H_0 = 400$  км. Распределения параметров в меридиональной плоскости y = 0 в момент времени t = 0.65 с: концентрации продуктов взрыва (слева, внизу); концентрации атмосферного воздуха (справа, внизу); проекции скорости на меридиональную плоскость  $y = 0 - Vxz/V^*$  (слева, вверху); проекции магнитного поля на меридиональную плоскость  $y = 0 - Bxz/B^*$  (справа, вверху); плотности (отнесена к ее невозмущенному значению, слева, в середине); удельной внутренней энергии  $Ev/Ev^*$  (справа, в середине). Начальная энергия  $E_0 = 8.4 \times 10^{23}$  эрг.  $\delta - 3D$ -задача,  $H_0 = 400$  км. Распределения параметров в широтной плоскости x = 0 и в момент времени t = 0.65 с.

По мере перемещения ПО поперек поля плазма будет растекаться вдоль поля и поперечное движение постепенно прекращается. Однако если энергии плазмы достаточно, то прежде, чем произойдет ее растекание вдоль силовых линий поля, на границе плазмы и поля может развиться желобковая неустойчивость, приводящая к образованию многоструйного течения, которое затем также переходит в единую восходящую струю.

### 4. О ВОЗМОЖНОСТИ РАЗВИТИЯ ЖЕЛОБКОВОЙ НЕУСТОЙЧИВОСТИ НА ФРОНТЕ РАСШИРЯЮЩЕГОСЯ ПЛАЗМЕННОГО ОБЛАКА

Известно, что расширение плазменного облака в магнитном поле может приводить к формированию неоднородного течения в виде струи в результате развития желобковой неустойчивости на фронте плазмы. Тогда не применимы описанные выше физические представления и оценки, сделанные для ламинарного торможения, прорыва или всплывания плазмы. Ясно, что численное трехмерное моделирование такого струйного течения должно основываться на достаточно проработанных физических представлениях о развитии такой крупномасштабной неустойчивости. В настоящее время в связи с резко возросшими вычислительными возможностями интерес к исследованию нестойчивости рэлей-тейлоровского типа (РТН) сильно возрос. Это относится, прежде всего, к задачам атмосферной крупномасштабной газодинамики.

Применительно к плазме в магнитном поле РТН или желобковая неустойчивость описана в классических работах Кадомцема и Лонгмайра [Лонгмайр, 1966; Кадомцев, 1963] для равновесной покоящейся границы между диамагнитной плазмой и полем. На макроуровне неустойчивость границы плазмы по отношению к желобкам, вытянутым вдоль поля, связана с уменьшением поля на вершине возмущения и увеличением во впадине. На микроуровне происходит поляризация зарядов на гребне возмущения, что приводит к электрическому дрейфу плазмы

![](_page_26_Figure_1.jpeg)

**Рис. 23.** 2D-задача,  $H_0 = 400$  км. Распределения параметров в плоскости меридиана в момент времени t = 21 с. Концентрации продуктов взрыва (слева, вверху); концентрации атмосферного воздуха (справа, вверху); проекции скорости на меридиональную плоскость  $y = 0 - Vxz/V^*$  (слева, в середине), проекции магнитного поля на меридиональную плоскость  $y = 0 - Bxz/B^*$  (справа, в середине); плотности (отнесена к ее невозмущенному значению, слева, внизу); удельной внутренней энергии  $E_V/E_V^*$  (справа, внизу).

в  $[\mathbf{E} \times \mathbf{B}]$  направлении, т.е. к дальнейшему росту гребня.

Наиболее существенную роль в формировании плазменного течения желобковая неустойчивость может играть при взрывах небольшой энергии в приэкваториальных широтах ( $\phi \le 15^{\circ}$ ). В этих областях вертикальная составляющая поля мала, и энергии плазмы может не хватить не только для прорыва, но и для формирования течения в виде ламинарной струи, которую формирует поле и градиент плотности воздуха при взрывах на средних и больших широтах [Холодов и др., 2005]. Поэтому, если полагать, что неустойчивость не развивается, то плазменное облако после торможения, являясь диамагнетиком, будет выталкиваться магнитным полем в сторону его ослабле-

ния как целое, постепенно растекаясь вдоль направления силовых линий. Неустойчивость же может совершенно изменить всю картину течения в приэкваториальной области, приводя к формированию струйного течения поперек поля, аналогично тому, как это наблюдается на средних и бо́льших широтах, где поле имеет вертикальную составляющую. Для анализа развития возмущений в начальной стадии в публикации [Ступицкий, 2006] получена приближенная система уравнений, основанная на секторной модели для двух соседних секторов: впадины и гребня. Модель учитывает перетекание массы между секторами, и в определенной степени аналогична модели Ферми [Ферми, 1972; Ферми и Нейман, 1972]. Для ограничения спектра возмущений со стороны вы-

![](_page_27_Figure_1.jpeg)

**Рис. 24.** 2D-задача,  $H_0 = 650$  км. Распределения параметров в плоскости меридиана в времени t = 5.3 с: плотности (отнесена к ее невозмущенному значению, слева, вверху); удельной внутренней энергии  $E_V/E_V^*$  (справа, вверху); проекции скорости на меридиональную плоскость  $y = 0 - Vxz/V^*$  (слева, в середине); проекции магнитного поля на меридиональную плоскость  $y = 0 - Bxz/B^*$  (справа, в середине); газодинамического давления Pp/Pn (отнесено к его невозмущенному значению, слева, внизу); полного (с магнитным) давления Pp/Pn (отнесено к его невозмущенному значению, справа, внизу);

соких частот учитывалось взаимодействие между секторами за счет сил вязкости. На основе этой модели было показано, что для плазмы массой  $m = 10^6$  г, расширяющейся в геомагнитном поле с B = 0.5 Гс со скоростью  $5 \times 10^7$  см/с (q = 300 кт) наиболее быстро растут возмущения с волновым числом k = 6 с характерным временем нарастания ~0.5 с.

В реальной верхней атмосфере воздух препятствует развитию желобковых возмущений. При h = 400 км радиусы торможения плазмы воздухом  $R_g \sqrt{M_0 u_0/(4/3\pi\rho_0 c)}$ , где  $c = \sqrt{P_0/\rho_0} \cong 1.2 \times 10^5$  см/с, и полем  $R_B$  примерно равны ( $R_g = R_B$ ), следовательно, на меньших высотах, где  $R_g < R_B$ , воздух будет тормозить развитие желобковых возмущений, обусловленных прежде всего геомагнитным полем. Но вместе с тем сама геометрия неоднородного геомагнитного поля, падение его напря-

давления внутри плазменной боласти может также замедлить рост желобковых возмущений [Кестенбойм и др., 1989]. Учитывая, что при взрывах на  $h \sim 400-700$  км воздух слабо влияет на динамику и развитие желобковых возмущений той части плазмы, которая распространяется в верхнюю полусферу, но существенно тормозит ее движение в нижнюю полусферу, препятствуя быстрому падению давления внутри ПО, можно

женности и плотности воздуха с высотой должны

приводить уже при взрывах на высотах  $h \sim 120-$ 

400 км на времена  $t \ge 10$  с к формированию достаточно ламинарного течения с преимуществен-

ным растеканием плазмы в меридиональной

плоскости и движением вверх, что и наблюдалось

![](_page_28_Figure_1.jpeg)

Рис. 25. Пространственное распределение плотности на моменты времени: t = 2.8 c - (a): t = 4.8 c - (b).  $(H_0 = 450 \text{ км}, \text{ сетка } 300 \times 300. R_0 = 12 \text{ км}, V_0 = 50 \text{ км/c})$ .

полагать, что именно этот высотный диапазон взрывов наиболее благоприятен для формирования струйного течения в результате развития желобковой неустойчивости.

Развитие желобковой неустойчивости становится возможным, когда внешнее магнитное давление становится сравнимым с внутриплазменным давлением, т.е. когда радиус разлета плазмы становится сравним с радиусом ее торможения магнитным полем, который составляет сотни километров. Начальные поперечные масштабы струи  $\sim \lambda/2 = \pi R/k$ , т.е. при больших *k* могут быть значительно меньше размеров ПО.

Таким образом, все указанные трудности приводят к необходимости использования достаточно подробной расчетной сетки, что пока не дало возможности использовать трехмерную программу для исследования струйного течения, и выполненные к настоящему времени исследования основаны на 2D-коде. На рисунке 25 показано формирование возмущений на фронте плазмы, связанных с влиянием границ расчетной области. Расчеты выполнены на грубой расчетной сетке, начальные возмущения фронта никак не задавались, поле перпендикулярно рисунку, поведение внутренней энергии аналогично поведению плотности [Ступицкий и др., 2006].

Отметим что рассматриваемая постановка задачи на основе 2D-кода вполне удовлетворительно соответствует развитию возмущения при малом энерговыделении ( $\leq 4.2 \times 10^{19}$  эрг) в экваториальной области. Расчеты показывают, что в нижней полусфере возмущения не развиваются из-за влияния окружающего воздуха. Весьма сложная структура течения на t > 10 с в верхней полусфере в дальнейшем, по-видимому, будет "сглаживаться" под действием диссипативных процессов.

Анализ существующего фотоматериала по эксперименту "Морская звезда" [Zinn et al., 1966] показал, что на время ~100 с течение представляет собой восходящую плоскую струю с растеканием массы преимущественно в меридиональном направлении. Струя была наклонена к западу на угол ~10–12° по отношению к вертикальной меридиональной плоскости. Наклон струи легко определяется не только по фотографии с о-ва Рождества (вдоль магнитного меридиана), но и по смещению максимума электронной концентрации в приполярной области, куда распространялись бета-электроны плазмы взрыва (рис. 26).

Наклон струи, связанный с кориолисовой силой можно оценить как

$$\operatorname{tg}\alpha \cong \frac{a_k t}{u} = \frac{2u\omega\cos\varphi t}{u},$$

где  $\phi \cong 17^{\circ}$  — широта места взрыва,  $\omega = 7.27 \times 10^{-5}$  рад/с — угловая скорость вращения Земли. Для t = 100 с получаем  $\alpha \cong 0.8^{\circ}$ , т.е. на порядок меньше экспериментального значения. Однако отметим, что более убедительный вывод о кориолисовом отклонении можно будет сделать лишь после трехмерного численного моделирования всей динамики струи. В представленных расчетах кориолисова сила не учитывалась.

Для выяснения причин такого поведения плазмы были выполнены лабораторные исследования разлета лазерной плазмы в поперечном магнитном поле [Ананьин и др., 1983]. Условия эксперимента были подобраны таким образом, чтобы волновое число k, т.е. количество желобков, также равнялось шести (на рис. 27 в линейном угле  $\pi$  реализуется три желобка при достаточно большом магнитном поле).

![](_page_29_Figure_1.jpeg)

**Рис. 26.** Геофизическая схема зон возмущения в операции "Морская Звезда" (*a*). Фотография взрыва "Морская Звезда", сделанная с о-ва Рождества на время 60 с (*б*). Фотография взрыва "Морская Звезда", сделанная с о-ва Кантон на время 60 с (*в*).

Результаты эксперимента дали общую картину движения лазерной плазмы в поперечном магнитном поле, аналогичную движению плазмы взрыва в геофизическом эксперименте "Морская звезда": наблюдалось образование желобковых возмущений, формирование плазменной струи поперек магнитного поля и ее отклонения от оси симметрии, перпендикулярной мишени.

С учетом общей симметрии экспериментальных условий как с лазерной плазмой, так и при взрыве, а также устойчивого характера эффекта наклона главной струи лазерной плазмы, становится очевидным, что этот эффект может быть связан только с отсутствием общей цилиндрической симметрией явления. В лазерной плазме такую асимметрию вносит мишень и подстилающие слои плазмы, прилежащие к мишени, а при космическом взрыве – ионизованные рентгеновским излучением более низкие слои воздуха (60– 120 км) и земная поверхность. Под действием магнитного поля на гребнях возмущения происходит разделение зарядов, а образующееся электрическое поле совместно с перпендикулярным ему магнитным полем заставляет плазму двигаться в направлении [ $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ ]. Приближенно каждый гребень возмущения можно рассматривать как отдельный диполь. Каждый заряд такого диполя

![](_page_29_Figure_6.jpeg)

**Рис. 27.** Угловое распределение разлетающейся лазерной плазмы (Та) на расстоянии R = 6 см от мишени.

индуцирует в проводящей подстилающей поверхности заряд противоположного знака, образуя, таким образом, электрическое поле поляризации, обуславливающее взаимодействие зарядов внутри самого диполя с проводящей подстилающей поверхностью (кулоновская сила взаимодействия зарядов внутри самого диполя компенсируется лоренцевской силой со стороны магнитного поля). Возникающие силы притягивают диполь к поверхности и создают вращающий момент. Так как подвижность электронов мала, то именно они разворачивают вектор дипольного момента, т.е. направление Е внутри диполя, таким образом, чтобы действие поля поляризации на электроны диполя со стороны подстилающей поверхности было минимальным.

В работе [Ананьин и др., 1983] показано, что результирующая сила притяжения электронов подстилающей поверхностью будет равна нулю если

$$\mathrm{tg}\varphi = \frac{\left(1+a^2\right)^{3/4}-1}{a},$$

где  $a = d/2R = \pi/2k$ . Подставляя k = 6, получаем φ ≈ 11°. Для *k* =5, φ ≈ 13°, для *k* = 7, φ ≈ 9.5. Таким образом, желобковые возмущения распространяющиеся под углом  $\phi \approx 11^\circ$ , испытывают наименьшее разрушающее действие индуцированного электрического поля и, следовательно, являются наиболее устойчивыми. Отметим, что для симметричного относительного вертикали возмущения ( $\phi \approx -11^{\circ}$ ), так же как и для возмущений под другими углами, полученное условие для электронов не выполняется, поэтому образующиеся в начале торможения возмущения под другими углами, в дальнейшем тормозятся и разрушаются полем. Остается одно главное возмущение, переходящее в плоскую струю, распространяющуюся примерно под углом 11° к плоскости магнитного меридиана, проходящего через точку взрыва. Следует отметить, что полученное выражение для оценки угла наклона струи, дает не только согласующиеся с экспериментом значения ф, но и объясняет отсутствие прямой зависимости этого угла от компонентного состава плазмы и напряженности магнитного поля. Для более легких элементов формирования разлета плазмы под углом  $\phi \approx 11^\circ$ происходит при тех же полях на меньших радиусах. Изменение направления поля на обратное приводило к отклонению струи на тот же угол в противоположную от вертикали сторону.

Таким образом, использование лазерной плазмы для физического моделирования весьма сложного течения плазмы магнитосферного взрыва позволило объяснить несимметричное поведение плазменной струи по отношению к меридианальной плоскости. Однако в целом проблема МГДнеустойчивости и ее влияния на крупномасштабное поведение плазмы космического взрыва, как геофизического явления, еще требует подробных теоретических и численных исследований.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В обзоре приведены и проанализированы результаты расчетно-теоретических работ по исследованию развития плазменного возмущения, создаваемого взрывом в ОКП на h = 100-1000 км. Основные количественные результаты получены в последние годы в результате мощного расширения вычислительных возможностей. В результате этих исследований выяснены масштабы, основные закономерности и общая картина развития мощного космического взрыва. Получили объяснение целый ряд физических эффектов и особенностей в развитии взрыва и его воздействии на верхнюю ионосферу и магнитосферу, что представляет, кроме прикладного, существенный общенаучный интерес.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- Ананьин О.Б., Быковский Ю.А., Пекленков В.Д., Ступицкий Е.Л., Пространственно-временные характеристики лазерной плазмы в поперечном магнитном поле // Материалы конференции по ФНТП. Л: Наука, 210 с. 1983.
- Брюнеткин Б.А., Репин А.Ю., Ступицкий Е.Л., Фаснов А.Я. Структура разлета лазерной плазмы различных элементов в магнитном поле // Квантовая электрон. № 2. 1993.
- Воробьев О.В., Холодов Я.А. Об одном методе численного интегрирования одномерных задач газовой динамики // Мат. моделирование. Т. 8. № 1. С. 77–92. 1996.
- Кадомцев Б.Б. Гидродинамическая неустойчивость плазмы // Вопр. теории плазмы. № 2. 293 с. 1963.
- Кестенбойм Х.С., Метелкин Е.В., Федорович Г.В., Фролов А.Г. О желобковой неустойчивости плазменного облака, разлетающегося в однородном магнитном поле //М.: Препр. № 371. ИПМех. 35 с. 1989.
- Коновалов В.П., Репин А.Ю., Ступицкий Е.Л. Возбуждение и ионизация разреженного воздуха быстрыми электронами // Геомагнетизм и аэрономия. Т. 34. № 6. С. 128–143. 1994.
- Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю. Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений. М.: Физматлит, 607 с. 2001.
- Лавриненко Н.Е., Репин А.Ю., Ступицкий Е.Л., Холодов А.С. Особенности поведения плазменной области, образуемой взрывом в верхней атмосфере на высотах 100–120 км // Мат. моделирование. Т. 19. № 5. С. 59–71. 2007.
- Логмайр К. Физика плазмы. М.: Атомиздат, 342 с. 1966.

- Магомедов К.М., Холодов А.С. Сеточно-характеристические численные методы. М.: Наука, 287 с. 1988.
- Метелкин Е.В. О поляризации плазменного облака, расширяющегося в неоднородном магнитном поле // ПМТФ. № 3. С. 12–18. 1989.
- Спитцер Л. Физика полностью ионизованного газа.
   М.: ИЛ. 172 с. 1957.
- Ступицкий Е.Л. Воздействие лазерного импульса на мишень.
   Фотоионизация фоновой среды // Квантовая электрон.
   Т. 10. № 3. С. 534–540.
- Ступицкий Е.Л. Особенности плазменных течений взрывного типа в околоземном космическом пространстве // Геомагнетизм и аэрономия. Т. 46. № 1. С. 26–43. 2006.
- Ступицкий Е.Л., Репин А.Ю., Холодов А.С., Холодов Я.А. Поведение высокоэнергетического плазменного сгустка в верхней ионосфере. Ч.1. Начальная стадия разлета и торможения плазменного сгустка // Мат. моделирование. Т. 16. № 7. С. 43–58. 2004.
- Ступицкий Е.Л., Васильев М.О., Репин А.Ю., Холодов А.С., Холодов Я.А. Формирование крупномасштабного струйного течения в результате развития желобковой неустойчивости // Мат. моделирование. Т. 18. № 1. С. 17–28. 2006.

- Холодов А.С. О построении разностных схем с положительной аппроксимацией для уравнений гиперболического типа // ЖВММФ. Т. 18. № 6. С. 1476– 1492. 1978.
- Холодов А.С., Холодов Я.А., Ступицкий Е.Л., Репин А.Ю. Численные исследования поведения высокоэнергетического плазменного сгустка в верхней ионосфере. Ч.2. Разработка трехмерной модели // Мат. моделирование. Т. 16. № 8. С. 3–23. 2004.
- Холодов Я.А., Холодов А.С., Ступицкий Е.Л., Репин А.Ю. Численные исследования поведения плазменного облака в верхней ионосфере // Мат. моделирование. Т. 17. № 11. С. 43–62. 2005.
- Ферми Э. Тейлоровская неустойчивость несжимаемой жидкости // Научн. труды. Т. 2. М.: Наука, С. 493–497. 1972.
- Ферми Э., Нейман Дж. Тейлоровская неустойчивость на границе двух несжимаемых жидкостей // Научн. труды. Т. 2. М.: Наука, С. 498–502. 1972.
- Zinn J., Hoerlin H., Petchek A.G. / Radiation trapped in the Earth's magnetic field. Ed. B.M. McCormac. Holland. Dordrecht: Reidel Publ. Co. P. 1966.