

МОДЕЛИРОВАНИЕ ЭКОСИСТЕМ ПРЕСНОВОДНЫХ ОЗЕР (ОБЗОР) 1. ГИДРОДИНАМИКА ОЗЕР

© 2013 г. В. В. Меншуткин*, Л. А. Руховец*, Н. Н. Филатов**

*Санкт-Петербургский экономико-математический институт РАН
191187 Санкт-Петербург, ул. Чайковского, 1
E-mail: leor@emi.nw.ru

**Институт водных проблем Севера КарНЦ РАН
185030 Петрозаводск, просп. Александра Невского, 50
E-mail: nfilatov@nwpi.krc.karelia.ru

Поступила в редакцию 13.07.2012 г.

Рассмотрены создание и использование моделей экосистем озер как неотъемлемой части комплексного исследования озерной экологической системы, процессов эвтрофирования, переноса и трансформации вещества для решения задач рационального использования природных ресурсов водоема, сохранения высокого качества воды, построения прогнозов дальнейшего развития экосистем озер под влиянием антропогенных и климатических факторов. Описаны модели, формулируемые в виде краевых задач для систем одно-, двух- и трехмерных дифференциальных уравнений переноса как консервативных, так и неконсервативных примесей в водной среде. Эти уравнения включают в себя нелинейные операторы, описывающие трансформацию живого и мертвого органического вещества (фитопланктона, зоопланктона, бактериопланктона, бентоса, детрита) и растворенных в воде биогенов (углерода, азота, фосфора и кремния). Рассмотрены возможности построения моделей с включением рыб, макрофитов, растворенного в воде кислорода и его обмен с атмосферой через поверхность воды. Для реализации моделей, сформулированных в виде систем дифференциальных уравнений, применяются современные численные методы. Показана необходимость введения стохастичности. Наряду с перечисленными выше описаны модели, для формулировки и реализации которых используются методы нечетких множеств, искусственного интеллекта, а также логико-лингвистические и когнитивные модели.

Ключевые слова: модели водных экосистем, гидротермодинамика озер, климат, загрязнение.

DOI: 10.7868/S0321059613060096

Традиционный путь построения математических моделей процессов и явлений в неживой природе, как правило, состоит в формулировании в виде систем дифференциальных уравнений физических законов, составляющих основу изучаемых процессов и явлений. В полной мере это относится к математическим моделям геофизической гидротермодинамики.

Совсем иначе обстоит дело с моделями многих процессов и явлений живой природы, хотя и в этих моделях языком описания часто служат дифференциальные уравнения. Уравнения этих моделей основаны не на физических законах (в частности, касающейся трансформации субстанций) и не на уравнениях химических реакций, поскольку основа трансформаций, рассматриваемых на макроуровне, не описывается законами физики и не может быть воспроизведена точно на языке большого числа химических реакций. Эти транс-

формации (практически все) весьма сложны, и многие из них до сих пор не до конца изучены [18]. Основу уравнений экологических моделей составляют различные эмпирические закономерности, установленные в процессе изучения и обработки результатов наблюдений, и содержат в изобилии эмпирические зависимости и параметры. Так, общеприняты в конструкциях моделей водных экосистем – закон лимитирования Либиха [79] и уравнение Михаэлиса–Ментен [101]. Для водных экологических систем многие экологические закономерности, полученные в работах Г.Г. Винберга [5], А.Ф. Алимова [1, 2], С.Е. Йоргенсена [69, 70–74] и др., носят как теоретический, так и эмпирический характер. В этой связи, как отмечается в [18], попытки придать, например, уравнениям Лотки–Вольтерра [35], трактуемым как модели конкуренции за общие ресурсы или модели отношений хищник–жертва, такую

же силу, как уравнениям механики сплошной среды, на практике не оправдывают себя. При использовании этих уравнений приходится делать многочисленные предположения и допущения, лишаящие эти уравнения конкретного биологического смысла [18].

Как правило, математические модели экосистем водоемов, если учитывать только процессы биохимической трансформации, представляют собой балансовые соотношения, записанные в виде дифференциальных уравнений. Фундаментальной и бесспорной основой этих уравнений служат законы сохранения (изменения) массы вещества, в данном случае — биогенов. Здесь уместно заметить, что, вероятно, первой моделью, которая основывалась на балансе общего фосфора в озерном водоеме, была установленная Р.А. Волленвейдером [102] связь между поступлением фосфора в водоем и его трофическим статусом.

Математические модели экосистем формулируются иногда в виде не систем дифференциальных уравнений, а их дискретных аналогов — систем разностных уравнений. Впрочем, при реализации моделей на компьютерах реально используются именно системы разностных уравнений — дискретные аналоги систем дифференциальных уравнений.

Одна из первых работ по компьютерному моделированию озерных экосистем — исследование Г.Г. Винберга и С.И. Анисимова [6], в котором за основу моделей были приняты весьма реалистичные трофические и энергетические соотношения, полученные при изучении озер Белоруссии. В работе [6], в отличие от американских работ [60, 90, 91], в основу были положены не математические зависимости, взятые из химической кинетики, а эмпирические и теоретические данные продукционной гидробиологии [5]. Это направление было развито путем введения в модель биогеохимических циклов биогенов — азота и фосфора [20].

Развитие работ по моделированию озерных экосистем (С.Е. Йоргенсен [71–74]; Ди Торо [56]; Ди Торо, Конолли [57]) многие годы было связано с распространением процесса антропогенного эвтрофирования на большинство озер мира. Обзору работ по математическому моделированию пресноводных экосистем посвящена работа [37]. В настоящее время интерес к моделированию экосистем озер сохраняется [19, 28, 44, 74, 86, 96, 104]. Широко представлены публикации по этой тематике в российских и зарубежных журналах. Кроме того, моделированию посвящено много монографий, например [36, 19, 95]. Представляет интерес монография [39], посвященная критическому

анализу возможностей моделей экосистем, в частности моделей водных экосистем.

По образному замечанию участников конференции по моделированию (Новая Зеландия, 2010), модели озерных экосистем подразделяются на традиционные (“re inventing the wheel”) и новаторские (“having tunnel vision”) [86]. В настоящем обзоре авторы придерживаются такого же разделения моделей, признавая его условность. Традиционные модели также полезно подразделить на модели экосистем малых, средних и больших озер — как стратифицированных, так и нестратифицированных. При общности подхода к моделированию экосистем этих озер модели существенным образом зависят от абиотических факторов водной среды, которые необходимо учитывать и которые имеют существенные различия. Краткий обзор моделей гидротермодинамики озер, непосредственно использующихся для обеспечения моделей экосистем информацией об абиотических факторах водной среды, рассмотрен в части I обзора. Приводятся критерии, по которым целесообразно, следуя геофизической гидродинамике, подразделять озера на малые, средние и большие.

Авторами настоящего обзора учитывались ранее опубликованные обзоры по математическому моделированию пресноводных экосистем [37, 42, 70, 86].

Ниже следует ряд очевидных и весьма полезных соображений, связанных с созданием и использованием моделей пресноводных экосистем, из работ С.Е. Йоргенсена, В.В. Меншуткина и др. [3, 18, 28, 69].

1. Модель позволяет представить всю проблему в целом, а также рассмотреть широкий круг сопутствующих проблем.

2. С помощью модели можно определять реакцию экосистемы на изменения внешних воздействий и проверять различные гипотезы, связанные с изменениями представлений о структуре и механизмах функционирования экосистемы.

3. Модель — универсальный инструмент для исследований, с ее помощью можно обнаруживать пробелы в знаниях об экосистеме и восполнять их.

4. Модель — один из инструментов управления водопользованием и даже — инструментов управления озерной экосистемой, с помощью которого решаются и экономические задачи. При помощи модели можно выделить наиболее важный компонент экосистемы с точки зрения динамики ее управления.

5. При создании математической модели обычно используются данные и знания о моделируемых объектах, процессах или явлениях, имеющиеся на момент создания модели (из прошлого и настоящего), что, несомненно, следует учитывать при прогнозировании. То, что связано с изменениями внешних воздействий и что не меняет структуру модели, зачастую воспроизводится и прогнозируется адекватно. Однако изменения в структуре модели или возникновение взаимодействий, неизвестных при ее создании, могут приводить как к неадекватности результатов моделирования реальности, так и к необоснованным прогнозам.

6. При обсуждении результатов моделирования или самих моделей очень часто создателям моделей предъявляются претензии по поводу того, что в конкретной модели не учтены те или иные аспекты процессов или явлений. Представляется, что наиболее значимый аргумент против претензий — это суждение о том, что модель непременно должна быть существенно проще изучаемого процесса или явления, иначе возникает сопоставимая по сложности задача исследования самой модели. Очевидно, что успехи моделирования существенно зависят от способностей создателей модели понять и оценить самые главные черты и характеристики экосистемы, которые следует учитывать в рамках модели.

7. Желательно, чтобы модель по своей сложности и структуре соответствовала объему имеющихся данных о моделируемом водоеме.

8. Большое число и разнообразие моделей экосистем озер объясняется тем, что даже при сходстве абиотических условий и общности основных механизмов функционирования экосистем озер приоритет механизмов зачастую различен и потому создание универсальных моделей представляется проблематичным.

Многие из приведенных здесь соображений относятся к моделированию не только водных экосистем, но и объектов и явлений из других областей исследований.

МОДЕЛИ ГИДРОТЕРМОДИНАМИКИ ОЗЕР

В обзоре рассматриваются те из известных моделей термогидродинамики, которые могут быть использованы при моделировании экосистем озер. Ниже приводятся требования к информации об абиотических факторах водной среды, которая может быть использована для обеспечения адекватности моделей экосистем реальности.

Во-первых, требования зависят от задач моделирования экосистемы.

Во-вторых, сами факторы зависят от особенностей водоема: его физических размеров (площади зеркала, глубины), его географической широты, высоты над уровнем моря, физико-географических и геологических особенностей территории водосбора и дна, времени условного водообмена (соотношения объема водного тела озера и водного притока), внешних воздействий (потока тепла через поверхность, ветрового воздействия, осадков и испарения, состава и качества воды притока, в том числе из донных отложений (ДО)).

В-третьих, для многих озер следует учитывать следующие особенности лимнологических процессов: наличие термоклина в период развитой стратификации, влияющего на перенос вещества между эпилимнионом и гипolimнионом; термобар в периоды весеннего нагревания и осеннего охлаждения; силу Кориолиса (учет или неучет — в зависимости от размеров водоема); кислородный обмен через поверхность, а также поток кислорода на границе вода—дно; поток вещества из ДО; поступление вещества из рассредоточенных и точечных источников (диффузионный приток с берега, речной приток и с осадками); особенности перемешивания. Практика показала, что для калибровки и верификации моделей важно создание таблиц феноменологии процессов и явлений в озере (время начала и окончания термобара, время становления и разрушения ледяного покрова, его толщина и др.), построенных по данным многолетних наблюдений (таблица).

Следует отметить, что в самых первых нульмерных моделях водных экосистем (модель Фолленвейдера [102]) информация об абиотических условиях водного тела озера не использовалась.

Далее рассмотрены модели, которые, по мнению авторов обзора, представляют интерес с точки зрения развития моделирования экосистем озер с учетом различных антропогенных и климатических факторов. В основном это модели стратифицированных, периодически покрывающихся льдом крупных озер. При определенных упрощениях они могут быть применены и для небольших озер и водохранилищ.

Приведем критерии, по которым водоем может быть отнесен к определенному классу по размерам. В [87] утверждается: "... не существует четкой классификации озер по размерам (большое, среднее, малое)" и предлагается для решения практических задач считать, что озера с площадью поверхности $\sim 100 \text{ км}^2$ — пограничные между средними и крупными, а озера с площадью по-

Некоторые характеристики изменения температурного и ледового режима Онежского оз. (по [31])

Наблюдаемые явления	По данным наблюдений [48]	Результаты моделирования [61]
Исчезновение ледового покрова	18 мая	25 мая
Появление на поверхности изотермы 4°С	10—25 мая	18 мая
Конец гидрологической весны	20—25 июня	13 июня
Толщина верхнего перемешанного слоя поздним летом	20—25 м	25—50 м
Появление на поверхности изотермы 4°С	Конец октября—начало ноября	Середина ноября
Исчезновение на поверхности изотермы 4°С	Середина декабря	12 декабря
Установление полного ледового покрова	18 января	28 января

верхности более 1000 км² относятся к очень большим. Однако с точки зрения геофизической гидродинамики, имеются четкие критерии отнесения озера к крупному, среднему или малому с помощью параметра Бургера (Burger) S . Это число, равное отношению внутреннего (бароклинного) радиуса деформации Россби $R_R = c/f$ к характерному горизонтальному масштабу озера L , определяется следующим соотношением [25]:

$$S = g \frac{\Delta\rho \sqrt{D}}{\rho Lf} = \frac{c}{Lf},$$

где D — характерная глубина, L — горизонтальные размеры стратифицированного водоема, c — фазовая скорость баротропных или бароклинных волн, f — параметр Кориолиса.

Для очень крупных (великих) озер, таких как Байкал, Мичиган, Верхнее, Онтарио, Гурон, Эри, Ладожское и Онежское, имеющих горизонтальные размеры — сотни километров, а глубины — десятки и сотни метров, R_R составляет несколько километров, S_j мало и в период летней стратификации составляет 0.03—0.05, в то время как в относительно небольших (длиной — десятки, а шириной — несколько километров) стратифицированных озерах Лох-Несс, Констанс (Европа), Бабин, Сенека (Северная Америка) S_j на порядок больше — 0.3—0.5. В таких озерах влияние эффекта вращения Земли на гидродинамику незначительно. В них спектр термогидродинамических процессов и явлений существенно проще, чем в крупных озерах мира, так как в малых — отсутствуют бароклинные волны Кельвина и Пуанкаре (рисунок). Озеро, в котором R_R сопоставим с L , S_j составляет 0.1—0.5 и эффекты вращения Земли становятся заметными в формировании динамики вод (примеры — озера Женевское, Венерн и Веттерн (Европа), Телецкое, Бива, Киннерет (Азия), которые можно отнести к озерам средних размеров). На рисунке показаны основные движения, которые

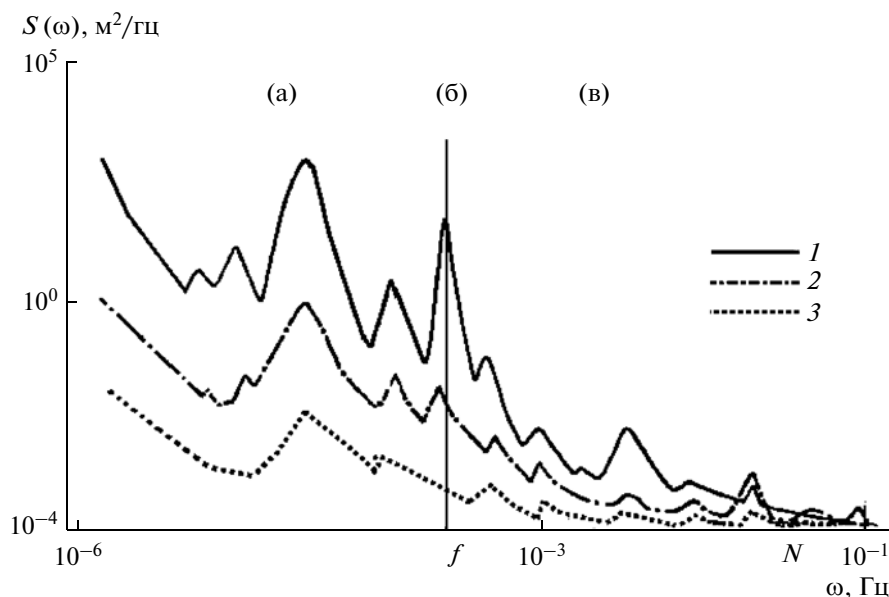
отмечаются в спектрах течений, температуры воды для крупных (1), средних (2) и малых (3) стратифицированных озер.

В озерах наблюдаются не только баротропные и бароклинные волны, но и вихри пространственных масштабов, сравнимых с размерами бассейна или его частей, моно- и диполи или грибовидные образования, меандры (особенно на фронте — термобаре), струйные течения, шлейфы и факелы вод разнообразного происхождения (в том числе образованные речными потоками).

Результаты исследований широкого спектра процессов и явлений гидротермодинамики озер требуют сложных теоретических разработок и математических моделей, реализованных на мощных суперкомпьютерных системах, и на сегодняшний день не полностью используются. Однако эти исследования должны продолжаться, и с развитием знаний об экосистемах они, несомненно, будут востребованы.

ОДНОМЕРНЫЕ МОДЕЛИ

Развитие моделей экосистем озер началось с учета вертикальной стратификации в озерах, где она может формироваться [18], — так называемые одномерные модели, одни из ключевых моментов создания которых — воспроизведение температурного режима и положения слоя температурного скачка (термоклина) и оценка вертикального коэффициента турбулентной диффузии, необходимого для определения потоков биогенов и растворенного в воде кислорода. С другой стороны, учет наличия вертикальной структуры озерной экологической системы существенен для описания в моделях процесса седиментации субстанций, в частности детрита. Одномерные модели создавались и создаются для озер, для состояния водного тела которых можно пренебречь горизонтальными изменениями важнейших абиотических характеристик. Эти модели используются



Основные энергонесущие зоны в осредненных по ансамблю спектрах температуры воды (смещения изотерм) для крупных (1), средних (2) и малых (3) стратифицированных озер, соответствующих бароклинным волнам Кельвина, синоптическим явлениям (или общеозерным крупномасштабным движениям) (а), внутренним волнам Пуанкаре, инерционным колебаниям, бароклинным и баротропным сейшам (б), высокочастотным внутренним, в том числе нелинейным, волнам (в) [40, 41].

для средних и малых, а не крупнейших озер мира. В этом случае в качестве гидротермодинамических моделей используются параметризованные модели сезонной эволюции теплового режима и режима перемешивания (например, модель в [9], с. 87–105).

Для моделирования сезонных изменений термического режима в озерах создано много моделей (Т.Р. Сундарам, Р.Г. Рехм [99]; О.Ф. Васильев, В.И. Квон [4]). Широкое распространение получила модель DYRESM (Dynamic Reservoir Simulation Model) [99], созданная в Центре водных исследований CWR (Centre of Water Research) Университета Западной Австралии. DYRESM — одномерная гидродинамическая модель для прогнозирования вертикального распределения температуры, солености и плотности в озерах, водохранилищах и эстуариях [44]. Предполагается, что в водоеме в одномерном приближении дестабилизирующие факторы (ветер, поверхностное охлаждение) не действуют в течение длительного периода времени. DYRESM была использована в моделях для периодов от нескольких недель до десятков лет. Таким образом, модель — средство прогнозирования сезонной и межгодовой изменчивости в озерах и водохранилищах, а также средство тестирования на чувствительность к долгосрочным изменениям экологических факторов или внешних физических воздействий. DYRESM можно также использовать совместно с моделью

CAEDYM (Computational Aquatic Ecosystem Dynamics Model) [64], также созданной в Университете Западной Австралии для воспроизведения биохимических процессов в водоемах. В настоящее время DYRESM и CAEDYM используются в 59 странах мира.

Универсальная математическая модель гидротермодинамики озер — Flake, в которой реализованы последние мировые достижения в области физической лимнологии, создана сотрудниками Института озераводства РАН, Института водных проблем Севера Карельского НЦ РАН, Института водной экологии и внутреннего рыбоводства Германии и Службы погоды Германии (DWD) [61, 85, 100]. Она применяется для уточнения прогноза погоды, решения широкого круга лимнологических задач, служит блоком термогидродинамики в моделях водных экосистем и моделях формирования качества воды в естественных и искусственных водоемах. Согласно [61], в условиях горизонтальной однородности поля температуры уравнение переноса тепла имеет вид:

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial Q}{\partial z},$$

где t — время; z — глубина, отсчитываемая вниз от свободной поверхности водоема; T — средняя по площади водоема температура воды; Q — вертикальный турбулентный поток тепла, нормиро-

ванных на плотность воды и ее удельную теплоемкость.

В модели вертикальное распределение температуры в водоеме представлено следующим образом [13]:

$$T(z, t) = \begin{cases} T_S & \text{при } 0 \leq z \leq h \\ T_S - (T_S - T_D)\theta(\zeta) & \text{при } h \leq z \leq D, \end{cases}$$

где h — толщина верхнего перемешанного слоя, в пределах которого температура воды T_S постоянна; D — глубина водоема, T_D — температура воды в придонной области; $\theta(\zeta)$ — функция безразмерной глубины $\zeta = (z-h)/(D-h)$, удовлетворяющая граничным условиям $\theta(0) = 0$ и $\theta(1) = 1$. Вид функции $\theta(\zeta)$ впервые был установлен С.А. Китайгородским и Ю.З. Миропольским [13] по данным наблюдений в океане. Впоследствии гипотеза об автомодельности профиля температуры в термоклине подтвердилась наблюдениями в лабораторных условиях [76, 101] и с большим разбросом — наблюдениями в природе [21, 27]. Таким образом, профиль температуры воды в этой модели определяется тремя параметрами, меняющимися во времени: T_S , h и T_D . Для их нахождения необходимо иметь систему уравнений, описывающую эволюцию этих величин. В рамках модели Flake в [100] учитывается теплообмен с ДО и моделируются подледный температурный и кислородный режимы. Результаты моделирования Вендюрского оз. (Карелия) — одного из наиболее изученных в мире [15] — показали, что модель с достаточной точностью воспроизводит реальность.

В работе [7] построена гидрологическая модель водосбора реки, на котором имеются мелкие озера.

ДВУХМЕРНЫЕ МОДЕЛИ

Для озер с малой глубиной и большой площадью зеркала, равной сотням и тысячам квадратных километров, в которых практически можно пренебречь наличием сезонных короткопериодных и локальных стратификаций, разнообразие абиотических условий с достаточной достоверностью описывается двухмерными моделями гидротермодинамики. Естественно, что для экосистем таких озер строятся именно двухмерные модели. Математическая формулировка двухмерных моделей гидротермодинамики — как правило, осредненная по глубине система примитивных уравнений гидротермодинамики океана (без учета солености), а иногда это просто система уравнений мелкой воды. Соответствующие модели хорошо известны исследователям и широко применяются [8].

Уместно отметить, что для рассматриваемых озер время реакции скоростей течений и поля температуры на изменение внешних воздействий в среднем соответствует синоптическому временному масштабу, что позволяет снизить требования к проблеме согласованности компьютерных моделей гидродинамики и двухмерных компьютерных моделей экосистем рассматриваемых озер. Эта возможность снижения требований связана с тем, что, как правило, с помощью этих моделей проводятся сценарные расчеты на физическое время синоптического масштаба и поэтому накапливаемые погрешности расчетов оказываются в допустимых пределах. Среди озер, к которым применим данный подход, можно указать такие, как Чудско-Псковское и Балатон. В настоящее время для таких озер иногда используются также трехмерные модели [15].

Отметим работу [52], посвященную построению средних многолетних циркуляций в Великих озерах Мичиган, Эри, Онтарио, Гурон и Верхнее на основе двадцатилетних (с 1960 по 1980 г.) данных наблюдений за циркуляцией в них. Средняя многолетняя циркуляция определяется такими факторами, как ветровая нагрузка и поток тепла, а также морфометрией. Для исследования роли этих факторов в [52] предложена концептуальная модель. Информация о средней многолетней циркуляции используется при построении моделей экосистем в задачах управления водопользованием.

ТРЕХМЕРНЫЕ ГИДРОТЕРМОДИНАМИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ

Вводные замечания

Моделирование экосистем больших стратифицированных озер требует применения трехмерных гидротермодинамических моделей в силу целого ряда причин, связанных именно с большими размерами водоемов. Здесь под большими озерами имеются в виду озера с площадью зеркала порядка тысяч квадратных километров и средними глубинами более 15–20 м. Как уже отмечалось, параметр Бургера S в период летней стратификации для таких озер составляет 0.03–0.05.

Моделирование течений и термического режима водоема всегда, явно или неявно, предполагает, что исследователи ставят перед собой задачу воспроизведения явлений того или иного пространственного и временного масштабов. Выбор масштабов зависит от целей исследований, уровня знаний об интересующих проблемах на момент проведения исследований и от того, какими

вычислительными возможностями обладают исследователи.

Как указывалось ранее, нет необходимости моделировать весь широкий спектр термогидродинамических процессов и явлений в озерах для использования результатов моделирования в моделях экосистем озер для временных масштабов от климатического до синоптического. Для явлений, которые необходимо параметризовать (термобар, циркуляции Ленгмюра, волны Пуанкаре, апвеллинги, локальная зависимость потоков тепла и влаги на границе вода—атмосфера от глубин водоема, грибовидные вихревые структуры и др.), разработаны соответствующие модели (В.Н. Зырянов [11], С.С. Зилитинкевич и др. [10, 105], Г.Н. Панин [24, 89], А.Ю. Тержевик и др. [100], С.В. Рянжин [33] и др.). Уместно упомянуть, что в нескольких работах [67, 68, 103] достаточно подробно описаны особенности термогидродинамических процессов и явлений в озерах.

Далее в обзоре рассматриваются модели гидротермодинамики с точки зрения обеспечения экологических моделей информацией об абиотических факторах водной среды, определяющих в весьма высокой степени функционирование экосистем водоемов.

Для больших стратифицированных озер гидrofизические условия особенно разнообразны в вегетационный период. Это выражается в наличии в данный период как развитой вертикальной стратификации, так и горизонтальных температурных неоднородностей. Так, например, в Ладожском оз. амплитуда горизонтальных изменений температуры может достигать 15°C между мелководьем на юге и глубоководной зоной на северо-западе озера [38]. При наличии развитой вертикальной стратификации летом амплитуда вертикальных изменений температуры также достигает 15°C [38]. Это определяет, в частности, необходимость применения трехмерных математических моделей.

Предложенная А.С. Мониным [22] классификация движений Мирового океана характеризует крупномасштабную циркуляцию как статистический ансамбль движений таких образований в океане, которым можно дать индивидуальное описание. Принятие такой точки зрения при численном моделировании приводит к зависимости понятия “крупномасштабная циркуляция” от возможностей вычислительной системы, с помощью которой такое описание строится. По аналогии с этим подходом для большого стратифицированного озера под крупномасштабной циркуляцией будем также подразумевать динамику

таких образований в озере, размеры которых сопоставимы с шагами пространственной сетки в дискретных моделях. Так, при протяженности озера по горизонтали порядка 10^5 м и глубине порядка 10^2 м возможные при реализации дискретных моделей шаги сетки по горизонтали составляют величину порядка 10^3 м при примерно 30 слоях по вертикали. Таким образом, индивидуальное описание может быть дано лишь для “глобальных” элементов динамики озера [3].

При моделировании крупномасштабной циркуляции больших озер в качестве временного масштаба естественно выбрать характерное время эволюции элементов глобальной динамики озера. В качестве такого временного масштаба разумно взять синоптический масштаб, т.е. временной интервал, равный 5–7 сут. Трехмерные модели гидротермодинамики озер используются для воспроизведения либо циркуляции и температурного режима озера для краткосрочных временных периодов (например, сезонной циркуляции), либо круглогодичной циркуляции и годового температурного режима озера. Первую из этих задач можно интерпретировать как задачу воспроизведения реальности, а вторую — как воспроизведение климатической циркуляции озера, которую следовало бы получать путем осреднения циркуляций озера за определенное достаточно большое количество лет.

Поясним, что здесь имеется в виду под климатической циркуляцией. Для расчетов с помощью математических моделей круглогодичного функционирования экосистем озер, для прогнозирования на сроки 10–15 лет реакции экосистем озер на изменение антропогенной нагрузки естественно принять, что циркуляция озера соответствует некоторым средним климатическим условиям. К этим воздействиям относятся: ветер, поток тепла через поверхность, речной приток и сток, осадки и испарение. Циркуляцию озера, соответствующую средним многолетним среднемесячным значениям внешних воздействий на водоем, будем называть климатической циркуляцией. Строго говоря, это определение не соответствует понятию климата. Под климатической циркуляцией озера понимается осреднение множества различных реализаций динамики вод для представительного набора внешних воздействий на водоем, совокупность которых, в свою очередь, после осреднения представляет собой, по определению, климат на территории водосбора озера. Успешное решение задачи калибровки и верификации модели зависит от четкости постановки задачи, ясного определения того, что именно данная мо-

дель описывает, и от того, что получается в ходе натуральных экспериментов при разных комплексах условий, разных масштабах осреднения, разных методах фильтрации данных и др.

Н.Н. Филатов в [40, 41] приводит классификацию течений в озерах, согласно которой можно принять, что климатическая циркуляция для крупных озер складывается из общей крупномасштабной циркуляции, повторяющейся из года в год и охватывающей основную часть водной массы озера течениями циклонического характера, а также сопутствующих антициклонических циркуляций и локальных течений, сформированных экмановскими апвеллингами в прибрежной зоне, ширина которой определяется радиусом деформации Россби R_R , который составляет несколько километров и зависит от наклона дна и характера стратификации.

Остановимся на двух особенностях моделирования гидротермодинамики озер.

1. Если речь идет о воспроизведении сезонной циркуляции, то возникает проблема выбора начальных данных для проведения расчетов. Один из возможных вариантов – использование данных наблюдений и проведение диагностических расчетов: по полю температуры из данных наблюдений и при внешних воздействиях в момент начала счета проводится расчет циркуляции (например, путем “стабилизации”). Полученные в результате таких расчетов поля температуры и скоростей течений могут быть приняты за начальные данные для дальнейших прогностических расчетов [34].

2. Для воспроизведения климатической циркуляции расчеты сводятся к построению периодического решения, для чего требуется проводить вычисления на значительные периоды физического времени, кратные времени условного водообмена озера. Так, для Ладожского и Онежского озер эти периоды равны приблизительно 12–14 годам [23, 31]. Счет следует вести до тех пор, пока озеро “не забудет” начальные условия и его циркуляция и температурный режим станут определяться текущими внешними воздействиями [3].

Математическая формулировка трехмерных моделей

Для описания крупномасштабной циркуляции и термического режима больших стратифицированных озер, расположенных вне экваториальной зоны в северном полушарии, используют записанные в декартовой системе координат трехмерные математические модели геофизической

гидротермодинамики океана. Декартову систему координат здесь можно использовать потому, что, как правило, протяженность пресноводных озер позволяет пренебречь кривизной Земли и считать невозмущенную поверхность водоема плоской. При этом, как и для океана, принимается следующее: приближение Буссинеска, приближение гидростатики, представление параметра Кориолиса, не меняющегося с широтой места, уравнение переноса энтропии приближенно записывается в форме уравнения переноса тепла для движущейся среды. В качестве уравнения состояния пресной воды используется нелинейное эмпирическое уравнение.

Чтобы выписать уравнения модели, введем ряд обозначений. Пусть плоскость xOy декартовой системы координат совпадает с невозмущенной поверхностью жидкости, а ось z направлена вертикально вверх.

Пусть S_0 – двумерная область, соответствующая невозмущенной поверхности водоема. Трехмерную область, занимаемую водоемом, обозначим через Ω , вертикальную боковую границу водоема – через S_1 , дно водоема (поверхность $z = -H(x, y)$) – через S_2 . Пусть $\partial\Omega = S_0 \cup S_1 \cup S_2$ – граница Ω . Обозначим через n вектор внешней нормали к $\partial\Omega$.

Будем всегда предполагать, что $H(x, y) \geq H_0 > 0$, где H_0 – заданная величина.

Запишем уравнения модели [16, 17]:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} - l v = -\frac{1}{\rho_w} \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial u}{\partial y} \right), \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} + l u = -\frac{1}{\rho_w} \frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial v}{\partial y} \right), \tag{2}$$

$$\frac{\partial P}{\partial z} = -\rho g, \tag{3}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{4}$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \left(v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(v_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v_y \frac{\partial T}{\partial y} \right), \tag{5}$$

$$\rho = \rho(T, P). \tag{6}$$

Здесь $\vec{v} = (u(x, y, z, t), v(x, y, z, t), w(x, y, z, t))$ – вектор скорости течения воды; l – параметр Кориолиса;

$P(x, y, z, t)$ – давление; $T(x, y, z, t)$ – температура воды; ρ – плотность пресной воды; ρ_w – средняя плотность пресной воды; g – ускорение свободного падения; $k_x(x, y, z, t)$, $k_y(x, y, z, t)$, $k_z(x, y, z, t)$ – коэффициенты турбулентной вязкости; $v_x(x, y, z, t)$, $v_y(x, y, z, t)$, $v_z(x, y, z, t)$ – коэффициенты турбулентной диффузии.

В систему уравнений (1) – (5) при условии, что плотность ρ задана согласно (6), входит пять неизвестных функций: проекции вектора скорости u , v , w , гидродинамическое давление P и температура T .

Равенство (6) называют уравнением состояния. Следует отметить, что для пресноводных водоемов неприемлемо использование линейного уравнения состояния ввиду того, что пресная вода имеет максимальную плотность при $T = 3.98^\circ\text{C}$, что приводит к формированию своеобразного термогидродинамического режима озер.

При постановке граничных условий следует учитывать, что для формирования водного баланса, теплового режима и качества воды многих крупных озер речной приток и сток играют важную роль. Для озер важно также учитывать осадки и испарение.

Свободная поверхность водоема задается функцией $\xi(x, y, t)$, т.е. выражается уравнением $z = \xi(x, y, t)$. Учитывая при моделировании гидротермодинамики водоема воспроизведение крупномасштабной климатической циркуляции, для больших глубоких озер можно считать величину $\xi(x, y, t)$ малой по сравнению с глубиной водоема, и поэтому граничные условия, которые ставятся на поверхности водоема, можно задавать на невозмущенной поверхности водоема при $z = 0$ [12, 25]. Такое предположение вполне оправдано, если речь не идет о воспроизведении штормов. Это относится как к кинематическим, так и к динамическим краевым условиям. Обычно пренебрегают горизонтальным градиентом атмосферного давления на поверхности озер, таких как Ладожское [3], и считают, что $P(x, y, z, t)$ в уравнениях (1)–(3) – отклонение гидростатического давления от атмосферного.

Запишем граничные условия на поверхности при $z = 0$:

$$k_z \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\tau_x}{\rho_w}, \quad k_z \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\tau_y}{\rho_w}. \quad (7)$$

Здесь τ_x , τ_y – напряжения трения ветра. Для w на поверхности при $z = 0$ ставится граничное условие

$$w = \alpha \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad \alpha = 0, 1. \quad (8)$$

При $\alpha = 0$ – это условие “твердой крышки” [12, 25], при $\alpha = 1$ – линейное приближение условия

$$w = \frac{\partial \xi}{\partial t} + u \frac{\partial \xi}{\partial x} + v \frac{\partial \xi}{\partial y}$$

на свободной поверхности. Это нелинейное краевое условие используется в некоторых моделях, например в созданной в Принстоне А. Бламбергом, Г. Меллором [53].

На дне водоема при $z = -H(x, y)$ для u , v , w задаются либо условия прилипания:

$$u = v = w = 0, \quad (9)$$

либо:

$$\frac{\partial u}{\partial N} = \frac{\tau_x^H}{\rho_w}, \quad \frac{\partial v}{\partial N} = \frac{\tau_y^H}{\rho_w}, \quad (10)$$

$$w = -u \frac{\partial H}{\partial x} - v \frac{\partial H}{\partial y}, \quad (11)$$

где τ_x^H , τ_y^H – напряжения трения воды о дно, и

$$\frac{\partial \Phi}{\partial N} \equiv k_x \frac{\partial \Phi}{\partial x} \cos(n, x) + k_y \frac{\partial \Phi}{\partial y} \cos(n, y) + k_z \frac{\partial \Phi}{\partial z} \cos(n, z)$$

– производная по конормали.

На вертикальной боковой границе водоема граничные условия ставятся следующим образом. На твердой части границы

$$u = v = 0, \quad (12)$$

в створах втекающих и вытекающих рек

$$u = u_r, \quad v = v_r, \quad (13)$$

где u_r , v_r – заданные функции координат и времени.

Для температуры граничные условия имеют вид:

при $z = 0$

$$v_z \frac{\partial T}{\partial z} \Big|_{s_0} = \frac{1}{c_p \rho_w} Q, \quad (14)$$

где Q – поток тепла через поверхность водоема, или

$$T|_S = T_S, \quad (15)$$

где T_S – температура поверхности.

На дне и твердых боковых границах задается условие теплоизоляции:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial N} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial N} \equiv v_x \frac{\partial T}{\partial x} \cos(n, x) + \\ + v_y \frac{\partial T}{\partial y} \cos(n, y) + v_z \frac{\partial T}{\partial z} \cos(n, z). \end{aligned} \quad (16)$$

В створах втекающих рек ставится условие

$$\frac{\partial T}{\partial N} - \vec{v}_n(T - T_r) = 0, \quad (17)$$

где \vec{v}_n — проекция вектора скорости течения на внешнюю нормаль к “живому” сечению реки, T_r — заданная температура воды в реке; либо условие

$$T|_r = T_r.$$

В створах вытекающих рек ставится условие (16).

Помимо граничных условий, еще должны быть заданы начальные условия при $t = 0$:

$$\begin{aligned} u(x, y, z, 0) &= u_0(x, y, z), \quad v(x, y, z, 0) = v_0(x, y, z), \\ T(x, y, z, 0) &= T_0(x, y, z). \end{aligned} \quad (18)$$

Трехмерные модели и их применение

Примеров реализации приведенной здесь математической модели (или близких к ней) для воспроизведения динамики океана имеется уже немало. В настоящее время одна из наиболее распространенных численных моделей — упомянутая трехмерная Принстонская модель POM (Princeton Ocean Model) [53, 82]. Одна из ее последних ревизий была проведена в 1996 г. [82]. Эта модель основана на примитивных уравнениях (1)–(6), она широко используется для воспроизведения гидротермодинамики больших стратифицированных озер.

В модели POM используется прием “спрямления дна”, т.е. система координат, в которой вместо вертикальной координаты z используется переменная σ :

$$\sigma = (z - \xi)/(H + \xi),$$

где ξ — отклонение уровня озера от его невозмущенного положения при $z = 0$. В результате $\sigma = 0$ на свободной поверхности водоема при $z = \xi$, $\sigma = -1$ на дне при $z = -H(x, y)$. POM широко использовалась в Лаборатории исследования Великих озер в США. Эта модель адаптировалась для решения разных задач: воспроизведения сезонных циркуляций и термического режима озер на сетках разной подробности, исследования межгодовой изменчивости сезонных циркуляций. Подобным исследованиям посвящены работы [48–51], в которых представлены результаты моделирования оз. Мичиган. Приведены результаты расчетов на сетках с шагами по горизонтали 5 км и 2 км, тестирование модели и сравнение результатов расчетов с данными наблюдений. В [48–52, 54, 77, 78, 106] представлены результаты моделирования гидротермодинамики не только оз. Мичиган, но и других американских озер: Гурон, Онтарио, Эри. В [30, 50] решались задачи переноса и седи-

ментации примесей, оценивалось влияние изменений климата на циркуляцию и температурный режим. В [51] построена климатическая циркуляция оз. Мичиган на базе результатов непрерывного моделирования циркуляции озера в 1998–2007 гг., в котором использовались данные метеонаблюдений для задания внешних воздействий на водоем. Представляет интерес работа [106], относящаяся к тематике усвоения данных наблюдений, где описана двухмерная модель циркуляции оз. Мичиган, в ней определения поверхностных течений используется функция тока, а также данные измерений течений.

В [92] для исследования небольшого стратифицированного оз. Онондага (Onondaga) используется модель ECOM, фактически основанная на модели POM. В отличие от POM, в ECOM используется не прием спрямления дна, а неявная разностная схема.

Наряду с моделью POM, значительное распространение получила 3D-модель ELCOM (Estuary and Lake Computer Model), созданная в Центре водных исследований (Center for Water Research) Университета Западной Австралии [45, 65, 66, 75] Б. Ходжесом. Математическая формулировка ELCOM практически та же, что и POM. Эта модель имеет несколько близких по сути реализаций. С ее помощью проводились исследования гидротермодинамики таких озер, как Онтарио (Канада–США), Киннерет (Израиль) [75], Боденское (Констанс) (Европа) [45], Беррагоранг (Австралия) [66]. В этих работах определенное внимание уделялось не только воспроизведению температурного режима водоемов, полей скоростей течений, развитию стратификации, но и исследованию влияния внутренних волн на процессы переноса вещества и энергии [65]. В [88] представлены результаты исследований зимней циркуляции и образования льда в оз. Онтарио с помощью модели ELCOM, содержащей соответствующий блок формирования льда. В [88] приводится также математическая модель процесса ледообразования.

В [55] предложена модель гидротермодинамики, состоящая из двух подмоделей: двухмерной модели приповерхностного слоя озера (эпилимниона) и 3D-модели, трехмерная сетка которой служит основой двухмерной сетки. Двухмерная модель — это осредненная по толщине приповерхностного слоя исходная 3D-модель ELCOM, а для остальной части водного тела используется собственно 3D-модель ELCOM. Высокое приповерхностное разрешение по горизонтали позволяет более детально описать деятельный приповерхностный слой водоема в предположении, что сам

приповерхностный слой вертикально однороден. К сожалению, из текста [55] не удается узнать, каким образом обеспечивается выполнение закона сохранения (изменения) массы воды (выполнение уравнения неразрывности).

Помимо широко распространенных 3D-моделей POM и ELCOM, также широко распространена модель EFDC (The Environmental Fluid Dynamics Code), предназначенная для моделирования одно-, двух- и трехмерных водных систем. Эта компьютерная система создана в Институте морских исследований США (Virginia Institute of Marine Sciences) и развивается уже на протяжении двух десятилетий, являясь одной из самых современных и используемых в мире. Система использует как σ -координату (прием “спрямления дна”), так и декартову систему координат и криволинейные ортогональные координаты для представления физических характеристик водоема. С точки зрения воспроизведения физических процессов в водоеме EFDC во многих аспектах эквивалентна POM. EFDC включает в себя генератор построения криволинейных сеток, что позволяет с достаточной точностью аппроксимировать границы водоема [62, 63].

В POM, ECOM, ELCOM и EFDC для моделирования турбулентности используется модель замыкания Меллора и Ямады [83].

Достаточно широкое распространение получила гидротермодинамическая модель океана NEMO (Nucleus for European Modelling of the Ocean), последняя версия которой опубликована в 2012 г. [81]. Математическая формулировка NEMO основана на примитивных уравнениях, в которых приняты следующие приближения: гидростатики, несжимаемости и Буссинеска. В рамках этой модели, как и в EFDC, используются несколько систем координат: сферическая, декартова и криволинейная. Использование различных систем координат позволяет строить глобальные и региональные реализации NEMO, а также модели, в которых используются криволинейные сетки, позволяющие обеспечить удовлетворительное разрешение приповерхностных и придонных погранслоев. В модели предусмотрен интерфейс для подключения модели воспроизведения ледового режима и модели биохимических трансформаций для оценки качества воды. Кроме того, предусмотрена возможность подключения глобальных моделей циркуляции атмосферы для задания внешних воздействий.

Модель NEMO была адаптирована для применения в исследованиях американских Великих озер на сетках высокого разрешения, на сетках с

шагами по горизонтали 2 км при 35 уровнях по вертикали, причем размер по вертикали каждого из первых десяти слоев равен 1 м. В [58] приведено сравнение моделей NEMO, POM [84] и CANDIA [98]. CANDIA представляет собой канадскую версию модели DIECAST, созданной Д. Дитрихом (Университет Миссисипи, США). В этой модели, в отличие от POM и NEMO, используется приближение “жесткой крышки” [12, 25]. Для воспроизведения циркуляции и температурного режима озер Эри и Онтарио были проведены расчеты по этим трем моделям для однолетнего периода, для которого имелись данные наблюдений за озером и внешними воздействиями. Сопоставление результатов моделирования по всем трем моделям с данными наблюдений показало, что отклонения (погрешности) температуры поверхности озер, средней температуры приповерхностного слоя глубиной 50 м от данных наблюдений и отклонения значений скоростей на выбранном наборе станций наблюдений наименьшие — для NEMO. Одновременно отмечается, что результаты воспроизведения термоклина в более мелководном оз. Эри — слабое место модели.

При моделировании гидротермодинамического режима озер, особенно если воспроизводится текущая динамика водоема, весьма важно располагать данными о внешних воздействиях на водоем. В этой ситуации представляется перспективным использовать для задания атмосферных внешних воздействий региональные климатические модели. Один из таких подходов представлен в работе [77], посвященной моделированию гидродинамики Большого Невольничьего оз. (Great Slave Lake) на северо-западе Канады, входящего в число великих озер мира. Это озеро, десятое по величине в мире, имеет площадь зеркала 28400 км², объем — 2090 км³, максимальную глубину — 614, среднюю — 73 м. Озеро покрыто льдом почти 8 мес. в году. В [77] использовалась модель ELCOM, а задание внешних атмосферных воздействий осуществлялось с помощью Канадской региональной климатической модели (CRCM).

Модель крупнейшего озера мира — Байкала, созданная Е.А. Цветовой [43], — одна из достаточно давно созданных 3D-моделей. В ней учтена особенность формы Байкала: использована система координат (r , φ , z). В уравнении состояния учтена зависимость плотности от давления. В модели использован вычислительный алгоритм, созданный В.В. Пененко [26].

Все рассмотренные модели применялись для исследования димиктических озер. В [93, 94] ис-

следовано полимиктическое оз. Клеа (Clear Lake) в Калифорнии, загрязненное ртутью. Для воспроизведения циркуляции озера использовалась модель SI3D-L, созданная в Университете Калифорнии. Эта 3D-модель имеет такую же математическую формулировку, что и POM и ELCOM. Отличия связаны, в основном, с используемым вычислительным алгоритмом.

Многие 3D-модели, не упомянутые в настоящем обзоре, отличаются от упомянутых зачастую только вычислительными алгоритмами, но при этом имеют другое название, что делает затруднительным полный обзор моделей.

Трехмерные модели с упрощениями

Рассмотренные модели и программные комплексы в большинстве своем основаны на примитивных уравнениях в формулировке, приведенной в данном обзоре. Однако для решения некоторых задач вполне приемлемыми оказываются модели, в которых приняты некоторые упрощения, облегчающие получение численных решений. Так, для воспроизведения так называемой климатической циркуляции больших стратифицированных озер вполне приемлемыми оказались модели типа приведенной в монографиях Г.И. Марчука с соавторами [16, 17] модели климатической циркуляции океана.

Приведем математическую формулировку такой модели для стратифицированного пресноводного озера. Уравнения движения и неразрывности, в которых отклонение давления от атмосферного получено из уравнения гидростатики (3) следующим образом:

$$P = g\rho_w \xi + g \int_z^0 \rho dz',$$

имеют вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} - l v = \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial u}{\partial z} \right) - g \frac{\partial \xi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} f, \tag{19}$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + l u = \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial v}{\partial z} \right) - g \frac{\partial \xi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y} f, \tag{20}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \tag{21}$$

$$f \equiv \frac{g}{\rho_w} \int_z^0 \rho dz'.$$

Подчеркнем, что, в отличие от (1) и (2), в уравнениях (19), (20) отброшены инерционные члены и члены, определяющие горизонтальный турбу-

лентный обмен. Параметр Кориолиса l ради простоты (расчетов) считается постоянным.

В качестве уравнения состояния принимается одна из эмпирических зависимостей вида $\rho = \rho(T)$, в которой не учитывается зависимость плотности от давления. Для Ладожского оз., глубина которого не превосходит 230 м, это оправдано. В моделях при относительно небольших глубинах часто используется следующее уравнение состояния пресной воды [97]:

$$\rho(T) = \rho_w [1 - 6.8 \times 10^{-6} (T - 4)^2], \quad [T] = ^\circ\text{C}. \tag{22}$$

Уравнение переноса тепла в модели климатической циркуляции озер совпадает с уравнением (5):

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = \\ = \frac{\partial}{\partial x} \left(v_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(v_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(v_z \frac{\partial T}{\partial z} \right). \end{aligned} \tag{23}$$

Коэффициенты v_x, v_y, v_z, k_z в (19), (20) и (23), как и в уравнениях (1), (2) и (5), считаются функциями переменных x, y, z и t .

Для проекций вектора скорости граничные условия на поверхности при $z=0$ имеют следующий вид:

$$k_z \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{S_0} = \frac{\tau_x}{\rho_w}, \quad k_z \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{S_0} = \frac{\tau_y}{\rho_w}, \tag{24}$$

$$w \Big|_{S_0} = \alpha \frac{\partial \xi}{\partial t}, \quad \alpha = 0, 1, \tag{25}$$

где τ_x, τ_y – касательные напряжения трения ветра; на дне при $z = -H(x, y)$

$$k_z \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{S_2} = k_2 U \sqrt{U^2 + V^2}, \quad k_z \frac{\partial v}{\partial z} \Big|_{S_2} = k_2 V \sqrt{U^2 + V^2}, \tag{26}$$

$$w \Big|_{S_2} = -u \frac{\partial H}{\partial x} - v \frac{\partial H}{\partial y}, \tag{27}$$

где $\vec{V} = (U, V)$ – вектор средних по глубине скоростей

$$U = \frac{1}{H} \int_{-H}^0 u(x, y, z, t) dz, \quad V = \frac{1}{H} \int_{-H}^0 v(x, y, z, t) dz;$$

на вертикальной боковой поверхности

$$\overline{v_n} \Big|_{S_1} = v_0, \tag{28}$$

где $\overline{v_n}$ – проекция вектора скорости на внешнюю нормаль к боковой поверхности, причем v_0 – или равно нулю в точках твердой границы (условие непротекания), или составляет заданное значение в створах втекающих и вытекающих рек.

Граничные условия для $T(x, y, z, t)$ здесь ставятся так же, как и для уравнения (5), — это условия (14)–(17). Аналогичным образом задаются начальные условия — это условия (18).

В работе [3] представлена реализация сформулированной модели, ее назначение — обеспечение моделей экосистемы информацией об абиотических факторах водной среды. Эту модель назовем КГТДМ (Климатическая гидротермодинамическая модель), или СНТДМ (Climatic Hydro Dynamic Model). Она создана в Санкт-Петербургском экономико-математическом институте РАН [3]. С ее помощью воспроизведены климатические циркуляции Ладожского и Онежского озер [95]. Получены оценки возможных изменений гидротермодинамики озер под влиянием изменений климата [29, 95]. Модель позволяет проводить расчеты распространения пассивных и неконсервативных примесей. В [30] представлены результаты расчетов распространения загрязнений в Онежском оз.

Представляют определенный интерес вычислительные эксперименты с помощью модели КТГМ по воспроизведению суточного хода гидротермодинамики Ладожского оз. для составления краткосрочных прогнозов. В этих экспериментах для задания внешних атмосферных воздействий использовалась региональная мезомасштабная модель ММ5 (разработана в Университете штата Пенсильвания, США), используемая в Гидрометцентре России [32]. Для проведения расчетов в модели КТГМ был осуществлен переход на более подробную сетку с шагами по горизонтали 1.25 км и с большим разрешением в эпилимнионе. Важной особенностью этих экспериментов было задание теплового потока по метеоданным, рассчитанным по модели ММ5, с помощью уравнения теплового баланса поверхности озера.

Несколько замечаний о построении дискретных моделей

Проблема создания дискретных моделей, аппроксимирующих системы нелинейных дифференциальных уравнений гидротермодинамики, и вычислительных алгоритмов для реализации этих моделей на компьютерах достаточно сложна, хотя в настоящее время она хорошо проработана [3, 17, 46, 47, 59]. Для больших стратифицированных озер, в отличие от небольших и средних озер, для воспроизведения круглогодичных циркуляции и эволюции поля температуры водоема требуется проводить расчеты на значительные периоды физического времени, поскольку время реакции озера на внешние воздействия, как уже

упоминалось, измеряется десятилетиями, а иногда и столетиями (например, для оз. Байкал). В этой связи алгоритмы реализации должны обеспечивать возможность проводить расчеты на сравнимые по продолжительности периоды. При использовании дискретных моделей для правильного воспроизведения основных качественных и количественных свойств моделей важен выбор разрешения сетки для проведения расчетов и, соответственно, мощность вычислительной системы.

Создание дискретных моделей обычно начинается с декомпозиции математической модели на отдельные блоки, например уравнения движения, уравнение распространения тепла и др. Поэтому, как отмечалось в [3, 14, 17], желателен добиваться того, чтобы между блоками дискретной модели выполнялись те же основные соотношения, что и между блоками математической модели. Не менее важно, чтобы для дискретной модели выполнялись законы сохранения (изменения), являющиеся дискретными аналогами законов сохранения для математической модели, причем они должны выполняться точно, а не с точностью до аппроксимации [3].

Здесь уместно отметить, что дискретные модели экосистем больших стратифицированных озер обязательно должны быть согласованы с дискретными моделями гидротермодинамики озер в том смысле, что конструкции моделей экосистем должны обеспечивать выполнение законов сохранения вещества, если нет источников и стоков, и законов изменения, если есть обмен веществом на границах водоема [80].

Примером согласованных моделей гидротермодинамики и экосистемы может служить КГТМ и Комплекс моделей экосистемы Ладожского оз. (КМЭЛО), или DEMLL (Dynamic Ecosystem Models of Lake Ladoga), и Модель экосистемы Онежского озера (МЭОО), или DEMLO (Dynamic Ecosystem Model of Lake Onego) [23, 95]. Выполнение в этих моделях законов сохранения обеспечено технологией построения дискретных моделей [3, 17, 46].

ВЫВОДЫ

Представлены одно-, двух- и трехмерные математические модели термогидродинамики пресноводных водоемов (озер и водохранилищ), которые применялись и применяются для обеспечения моделей водных экосистем информацией об абиотических факторах водной среды при разнообразных антропогенных и климатических воздействиях.

Вторая часть обзора будет посвящена моделям экосистем озер, многие из которых включают в себя модели термогидродинамики для комплексного исследования озерной экологической системы.

Кроме моделей, сформулированных в виде систем дифференциальных уравнений, для реализации которых используются современные численные методы, представлены модели, для формулировки и реализации которых используются методы нечетких множеств, искусственного интеллекта, а также логико-лингвистические и когнитивные модели.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алимов А.Ф.* Введение в продукционную гидробиологию. Л.: Гидрометеиздат, 1989. 152 с.
2. *Алимов А.Ф.* Элементы теории функционирования водных экосистем. СПб.: Наука, 2000. 147 с.
3. *Астраханцев Г.П., Менишуткин В.В., Петрова Н.А., Руховец Л.А.* Моделирование экосистем больших стратифицированных озер. СПб.: Наука, 2003. 363 с.
4. *Васильев О.Ф., Квон В.И.* О теоретическом описании гидротермических полей в водоемах-охладителях // Проблемы теплофизики и физической гидродинамики. Новосибирск: Наука, 1974. С. 100–111.
5. *Винберг Г.Г.* Первичная продукция водоемов. Минск, 1960. 329 с.
6. *Винберг Г.Г., Анисимов С.И.* Математическая модель водной экологической системы // Фотосинтетические системы высокой продуктивности. М.: Наука, 1966. С. 213–223.
7. *Воинов А., Костанца Р., Фитц К., Максвелл Т.* Ландшафтная модель водосбора р. Патуксент // Вод. ресурсы. 2007. Т. 34. № 2–3. С. 161–184.
8. *Вольцингер Н.Е., Пясковский Р.В.* Теория мелкой воды. Л.: Гидрометеиздат, 1977. 207 с.
9. Гидротермодинамическое взаимодействие озера с атмосферой / Под. ред. Трешникова А.Ф., Зилинkevича С.С. Л.: Наука, 1990. 140 с.
10. *Зилинkevич С.С., Терзевик А.Ю.* Термический бар // Океанология. Т. 27. № 5. 1987.
11. *Зырянов В.Н.* Распределение энергии турбулентности в слое Стокса // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2006. № 6. С. 61–73.
12. *Каменкович В.М.* Основы динамики океана. Л.: Гидрометеиздат, 1973. 240 с.
13. *Китайгородский С.А., Миркольский Ю.З.* К теории деятельного слоя открытого океана // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1970. Т. 6. № 2. С. 177–188.
14. *Клейнер Г.Б.* Производственные функции. М., 1986. 239 с.
15. *Кондратьев С.А., Голосов С.Д., Зверев И.С. и др.* Моделирование абиотических процессов в системе водосбор–водоем (на примере Чудско-Псковского озера). СПб.: Нестор-История, 2010. 104 с.
16. Математические модели циркуляции в океане / Под ред. Марчука Г.И., Саркисяна А.С. Новосибирск, 1980. 341 с.
17. *Марчук Г.И., Дымников В.П., Залесный В.Б. и др.* Математическое моделирование общей циркуляции атмосферы и океана. Л.: Гидрометеиздат, 1984. 320 с.
18. *Менишуткин В.В.* Имитационное моделирование водных экологических систем. СПб.: Наука, 1993. 160 с.
19. *Менишуткин В.В.* Искусство моделирования (экология, физиология, эволюция). Петрозаводск: СПб., 2010. 419 с.
20. *Менишуткин В.В., Умнов А.А.* Математическая модель простейшей водной экологической системы // Гидробиол. журн. 1970. Т. 6. № 2. С. 28–36.
21. *Миропольский Ю.З., Филюшкин Б.Н., Чернышков П.П.* О параметрическом описании профилей температуры в деятельном слое океана // Океанология. 1970. Т. 10. № 6. С. 1101–1106.
22. *Монин А.С.* Введение в теорию климата. Л.: Гидрометеиздат, 1982. 166 с.
23. Онежское озеро. Экологические проблемы / Под ред. Филатова Н.Н. Петрозаводск: КарНЦ РАН, 1999. 293 с.
24. *Панин Г.Н., Насонов А.Е., Фокен Т.* Испарение и теплообмен водоема с атмосферой при наличии мелководий // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2006. Т. 42. № 3. С. 1–17.
25. *Педлоски Дж.* Геофизическая гидродинамика. М.: Мир, 1984. Т. 1. 398 с.
26. *Пененко В.В.* Модели численного моделирования атмосферных процессов. Л.: Гидрометеиздат, 1981. 351 с.
27. *Решетова О.В., Чаликов Д.В.* Об универсальной структуре деятельного слоя океана // Океанология. 1977. Т. 17. № 5. С. 754–778.
28. *Руховец Л.А., Петрова Н.А., Менишуткин В.В. и др.* Исследование реакции экосистемы Ладожского озера на снижение фосфорной нагрузки // Вод. ресурсы. 2011. Т. 38. № 6. С. 740–752.
29. *Руховец Л.А., Астраханцев Г.П., Минина Т.Р. и др.* Оценка возможных изменений в экосистеме Ладожского озера в 21 веке под влиянием антропогенных и климатических факторов // Вод. ресурсы. 2006. Т. 33. № 3. С. 367–382.
30. *Руховец Л.А., Филатов Н.Н.* Использование математических моделей для решения задач сохранения водных ресурсов Онежского озера // Тр. КарНЦ РАН. 2011. № 4. С. 77–87.
31. *Руховец Л.А., Астраханцев Г.П., Мальгин А.Н. и др.* Моделирование климатической циркуляции Онеж-

- ского озера // Вод. ресурсы. Т. 33. № 5. 2006. С. 555–566.
32. *Рябченко В.А., Либерман Ю.М., Руховец Л.А. и др.* Прогноз погоды и состояние водных объектов Северо-Западного региона России на базе комплекса гидродинамических моделей. СПб.: Нестор-История, 2008. 60 с.
 33. *Рянжин С.В.* Об энергии и глубине проникновения циркуляции Ленгмюра // Изв. Всесоюз. Географического об-ва. 1980. Т. 112. Вып. 1. С. 46–54.
 34. *Саркисян А.С., Демин Ю.Л., Бреховских А.Л. и др.* Методы и результаты расчета циркуляции вод Мирового океана. Л.: Гидрометеиздат, 1986. 152 с.
 35. *Свирижев Ю.Е., Елизаров Е.Я.* Математическое моделирование биологических систем // Проблемы космической биологии. Т. 20. 1972. С. 1–158.
 36. *Сердюцкая Л.Ф.* Системный анализ и математическое моделирование экологических процессов в водных экосистемах // М.: Либроком, 2009. 144 с.
 37. *Страшкраба М., Гнаук А.* Пресноводные экосистемы (математическое моделирование). М.: Мир, 1989. 374 с.
 38. *Тихомиров А.И.* Термика крупных озер. Л.: Наука, 1982. 232 с.
 39. *Тутубалин В.Н., Барбашева Ю.М., Григорян А.А., Девятков Г.И.* Математическое моделирование в экологии: историко-методический анализ // Языки русской культуры. 1999. 208 с.
 40. *Филатов Н.Н.* Гидродинамика озер. СПб.: Наука, 1991. 191 с.
 41. *Филатов Н.Н.* Динамика озер. Л.: Гидрометеиздат, 1983. 165 с.
 42. *Фурсова П.В., Левич А.П.* Математическое моделирование экологических сообществ (обзор литературы) // Проблемы окружающей среды. Обзорная информация ВИНТИ. М.: ВИНТИ, 2002. № 9. С. 1–15.
 43. *Цветова Е.А.* Математическое моделирование циркуляции вод озера. Течения в Байкале. Новосибирск: Наука, 1977. С. 63–81.
 44. *Antenucci J.P., Imarito A.* The CWR Dynamic Reservoir Simulation Model DYRESM. Pert: Science Manual Center for Water Research University of Western Australia, 2000.
 45. *Appt J., Imberger J., Kobus H.* Basin-scale motion in stratified Upper Lake Constance // Limnol. Oceanogr. 2004. V. 49. № 4. P. 919–933.
 46. *Astrakhantsev G.P., Rukhovets L.A.* On the improvement of the approximation order for discrete model of circulation in the deep lake // Jyvaskyla–St. Petersburg Seminar on Partial Differential Equations and Numerical Methods. Proc. Jyvaskyla Univ. Math. Inst. 1993. V. 56. P. 5–24.
 47. *Astrakhantsev G.P., Rukhovets L.A.* A three-dimensional model of transformation of biogenes and organic matter in lakes // Russian J. Numerical Analysis and Mathem. Modelling. 1994. V. 9. P. 1–12.
 48. *Beletsky D., Schwab D., McCormick M.* Modeling the 1998–2003 summer circulation and thermal structure in Lake Michigan // J. Geophys. Research. 2006. V. 111. P. 1–8.
 49. *Beletsky D., Schwab D.J.* Modeling circulation and thermal structure in Lake Michigan: Annual cycle and interannual variability // J. Geophys. Research. 2001. V. 106. № 19. P. 745–771.
 50. *Beletsky D., Schwab D.J.* Modeling circulation and thermal structure in Lake Michigan: Annual cycle and interannual variability // J. Geophys. Research. 2001. V. 106. № 9. P. 19745–19771. <http://www.glerl.noaa.gov/pubs/fulltext.2001.20010008.pdf>
 51. *Beletsky D., Schwab D.J.* Climatol. circulation in Lake Michigan // Geophys. Research Letters. 2008. V. 35. P. 1–5. L21604, doi:10.1029/2008GL035773
 52. *Beletsky D., Saylor S.H., Schwab D.J.* Mean circulation in the Great Lakes // J. Great Lakes Research 1999. V. 25. № 1. P. 78–93. <http://www.glerl.noaa.gov/pubs/fulltext/1999/19990004.pdf>
 53. *Blumberg A.F., Mellor G.L.* A description of a three-dimensional coastal ocean circulation model // Three-dimensional Coastal Ocean Models. J. Coastal Estuarine Sci. / Ed. Heaps N.S. 1987. V. 4. 208 p.
 54. *Boegman L., Rao Y.R.* Process oriented modeling of Lake Ontario Hydrodynamics // Proc. 6th Intern. Sympos. Environ. Hydraulics. Athens, 2005. 6 p.
 55. *Dallimore C., Hodges B.R., Imberger J.* Coupling an Underflow Model to a Three-Dimensional Hydrodynamic Model // J. Hydraulic Engineering. 2003. October. P. 748–757.
 56. *Di Toro D.M.* Combining chemical equilibrium and phytoplankton models – a general methodology // Modelling biochemical processes in aquatic ecosystems. Michigan: Science, 1976. P. 233–256.
 57. *Di Toro D.M., Connoy J.P.* Mathematical models of water quality in large lakes. Lake Erie Eutrophication of Waters // Monitoring, Assessment and Control. Paris: OESD, 1982. 154 p.
 58. *Dupont F., Padala C., Anning H. et al.* A NEMO-based modelling system for the Great Lakes // 15th Workshop on Physical Processes in Natural Waters. Burlington, 2011. P. 46–52.
 59. *Fletcher C.A.J.* Computational Techniques for Fluid Dynamics. Springer-Verlag; Berlin; Heidelberg, 1991. 410 p.
 60. *Garfinkel D.* Digital computer simulation of ecological systems // Nature. V. 194 (4831). 1962.
 61. *Golosov S., Terzhevik A., Zverev I. et al.* Climate change impact on thermal and oxygen regime of Shallow lakes // Tellus. 2012. V. 64. P. 1–11.
 62. *Hamrick J.M.* A three-dimensional environmental fluid dynamics computer code: Theoretical and computational aspects. Athens: GA and U.S. EPA, 1992. Special Rep. 317. 63 p.

63. *Hamrick J. M.* Users manual for the environmental fluid dynamic computer code. Athens: GA and U.S. EPA, 1996. Special Rep. 328. 224 p.
64. *Hipsey M.R., Hamilton D.P.* Computational Aquatic Ecosystem Dynamic Model: CAEDYM // Science Manual. Centre for Water Research Report of University of Western Australia. 2008. V. 3.
65. *Hodges B.R., Imberger J., Saggio A., Winter K.B.* Modelling basin-scale internal waves in a stratified lake // *Limnol. Oceanogr.* 2000. V. 45. № 7. P. 1603–1620.
66. *Hodges B.R., Imberger J., Zaval B., Appt J.* Modelling Hydrodynamics of Stratified Lake // Hydroinformatics 2000 Conference. Iowa, USA: Iowa Institute of Hydraulic Research, 2000. P. 3.
67. *Hutter K., Wang Y., Chubarenko I.* Physics of Lakes, Vol. 1: Foundation of the Mathematical and Physical Background. Springer-Verlag; Berlin; Heidelberg, 2011. 434 p.
68. *Hutter K., Wang Y., Chubarenko I.* Physics of Lakes. Springer-Verlag; Berlin; Heidelberg, 2011. V. 2. 646 p.
69. *Jorgensen S.E.* Fundamentals of Ecological Modelling. Amsterdam: Elsevier, 1994. P. 450.
70. *Jorgensen S.E.* A review of recent developments in lake modeling // *Ecol. Modelling.* 1994. V. 221. P. 689–692.
71. *Jorgensen S.E.* A eutrophication model for lake // *Ecol. Modelling.* 1976. V. 2. № 1. P. 147–165.
72. *Jorgensen S.E.* Ecological modeling of lakes // *Mathematical Modelling of Water Quality: Streams, Lakes and Reservoirs* / Ed. Orlob G.T. Chichester: Wiley, 1983. Ch. 9. P. 518.
73. *Jorgensen S.E., Bendoricchio G.* Fundamentals of Ecol. Modelling. Elsevier; Amsterdam, 2002. 544 p.
74. *Jørgensen S.E.* Overview of the model types available for development of ecological models // *Ecol. Modelling.* 2008. V. 215. P. 3–9.
75. *Laval B., Imberger J., Hodges B.R., Stocker R.* Modelling circulation in lakes: spatial and temporal variations // *Limnol. and Oceanogr.* 2003. V. 48. № 3. P. 983–994.
76. *Linden P.F.* The deepening of mixed layer in a stratified fluid // *J. Fluid Mech.* 1975. V. 71. P. 385–405.
77. *Leon L.F., Lam D.C., Schertzer W.M. et al.* Towards coupling a 3D hydrodynamic lake model with Canadian Regional Climate Model: Simulation on Great Slave Lake // *J. Environ. Modelling and Software.* 2007. V. 22. Is. 6. P. 787–796.
78. *Leon L.F., Smith R.E.H., Hipsey M.R. et al.* Application of a 3D hydrodynamicbiological model for seasonal and spatial dynamics of water quality and phytoplankton in Lake Erie // *J. Great Lakes Research.* 2011. V. 37. № 1. P. 41–53.
79. *Liebig J.* *Naturwissensch.* Briefe über moderne Landwirtschaft. Leipzig, 1859.
80. *Loucks D.P.* Modeling and managing the interaction between hydrology, ecology and economy // *J. Hydrology.* 2006. V. 328. № 3–4. P. 408–416.
81. *Madec G.* NEMO ocean engine. Note du P^ole de modélisation. IPSL (France). 2012. № 27. ISSN No. 1288–1619. Version 3.4.
82. *Mellor G.L.* User's guide for a three-dimensional, primitive equation, numerical ocean model. Princeton, USA: Princeton University, 1996. 39 p.
83. *Mellor G.L., Yamada T.* Development of turbulence closure model for geophysical fluid problems // *Rev. Geophys. And Space Phys.* 1982. V. 20. № 4. P. 851–875.
84. *Mellor G.L., Blumbrg A.F.* Modeling vertical and horizontal diffusivities with the sigma coordinate system // *Mon. Wea. Rev.* 1985. V. 113. P. 1380–1383.
85. *Mironov D., Heise E., Kourzeneva E. et al.* Implementation of the lakeparametrisation scheme Flake into numerical weather prediction model COSMO // *Boreal Environ. Research.* 2010. V. 15. P. 218–230.
86. *Mooij W.M., Trolle D., Jeppesen E. et al.* Challenges and opportunities for integrating lake ecosystem modeling approach // *Aquatic Ecology.* 2010. V. 44. № 3. P. 633–667.
87. *Noges P., Kangur K., Noges T. et al.* Highlights of large lake research and management in Europe // *European Large Lakes: Ecosystem Changes and Their Ecological and socioeconomic impact. Developments in Hydrobiology.* Dordrecht: Springer, 2008. P. 259–276.
88. *Oveisy A., Boegman L., Imberger J.* Three-dimensional simulation of lake and ice dynamics during winter // *Limnol. Oceanography.* 2012. V. 57. № 1. P. 43–57.
89. *Panin G.N.* Some experimental results from studies of air-sea interaction // *J. Boundary – Layer Meteorol.* 1990. V. 50. № 1/2. P. 147–152.
90. *Patten B.C.* Mathematical Models of Plankton Production // *Int. Rev. der gesamten Hydrobiol.* 1968. V. 53. № 2. P. 357–408.
91. *Parker R.A.* Simulation of aquatic ecosystem // *Bio-metrics.* 1968. V. 24. № 2. P. 803–821.
92. *Quamrul Ahsan A.K.M., Blumberg A.F.* Three-dimensional Hydrothermal Model of Onondaga Lake // *J. Hydraulic Engineering.* 1999. September. P. 912–923.
93. *Rueda F., Shladow S.G., Monismith S.G., Stacey M.T.* Dynamics of Large Polymictic Lake. I. Field Observations // *J. Hydraulic Engineering.* 2003. V. 129. № 2. P. 82–91.
94. *Rueda J., Schladow S.G.* The Internal Dynamics of a Large Polymictic Lake. II. Three-dimensional Numerical Simulations // *J. Hydraulic Engineering* 2003. V. 129. № 2. P. 92–101.
95. *Rukhovets L., Filatov N.* Ladoga and Onego – Great European Lakes. Observation and Modelling. Chichester, UK: Springer- Praxis, 2010. 302 p.
96. *Schauser I., Strube T.* Perspectives of lake modelling towards predicting reaction to trophic change // *Kompetenzzentrum. Wasser.* Berlin: Berlin Publication Series, 2007. V. 9. P. 3.

97. *Simons T.S.* Verification of numerical models of Lake Ontario. III. Long-term heat transports // *J. Phys. Oceanogr.* 1976. V. 6. P. 372–378.
98. *Sheng J., Wright D., Greatbatch R., Dietrich D.* CANDIE: A new version of the DieCAST Ocean Circulation Model // *J. Atm. and Oceanic Tech.* 1998. V. 15. P. 1414–1432.
99. *Sundaram T.R., Rehm R.G.* The seasonal thermal structure of deep temperature lakes // *Tellus.* 1973. V. 25. P. 157–167.
100. *Terzhevik A., Golosov S., Panshin N. et al.* Some features of the thermal and dissolved oxygen structure in boreal, shallow ice-covered Lake Vendyurskoe, Russia // *Aqua Ecol.* 2009. V. 43. P. 617–627.
101. *Turner J.S.* The temperature profile below the surface mixed layer // *Ocean. Model.* 1978. № 11. P. 6–8.
102. *Vollenweider R.A.* Water management research // Mimeographed. Paris, 1868. 15 p.
103. *Wüest A., Lorke A.* Small-scale hydrodynamics in lakes // *Ann. Rev. Fluid Mech.* 2003. V. 35. P. 373–412.
104. *Zhang H., Culver D., Boegman L.* A two-dimensional ecological model of Lake Erie: Application to estimate dreissnind impacts on large lake plankton population // *Ecol. Modelling.* 2008. V. 214. № 4. P. 219–241.
105. *Zilitinkevich S.S., Kreiman K.D., Terzhevik A.Yu.* The thermal bar // *J. Fluid Mech.* 1992. V. 236. P. 27–42.
106. *Zhang Z., Beletsky D., Schwab D.I., Stein M.L.* Assimilation of current measurements into a circulation model of Lake Michigan // *Water Res. Research.* 2007. 43 (W11407). P. 11. <http://www.glerl.noaa.gov/pubs/fulltext/2007/20070046.pdf>