

НЕЛИНЕЙНЫЙ ПАМПИНГ-ЭФФЕКТ  
В КОЛЕБАТЕЛЬНЫХ ПРОЦЕССАХ В ГЕОФИЗИКЕ

© 2013 г. В. Н. Зырянов

Институт водных проблем РАН

119333 Москва, ул. Губкина, 3

E-mail: zyryanov@aquas.laser.ru

Поступила в редакцию 07.03.2012 г.

Дано описание нелинейного эффекта повышения или понижения на бесконечности среднего значения физической характеристики среды в колебательных процессах, описываемых нелинейным параболическим уравнением типа уравнения теплопроводности. Коэффициент диффузии является функцией от искомой характеристики. Показано, что чисто гармоническое колебание характеристики среды на границе приводит к увеличению или уменьшению ее значения в глубине области относительно ее среднего значения на границе (пампинг-эффект). Показано, что этот эффект имеет место и для уравнения Бюргера, хотя нелинейность в уравнении Бюргера связана с адвекцией, а не с диффузией. Рассматриваются возможные приложения пампинг-эффекта в геофизических процессах — передача тепла в глубинные слои океанов и озер, распространение приливных волн на мелководье, безнапорная фильтрация грунтовых вод, интрузия морских вод в устья приливных рек и подземные горизонты, распределение температуры во льдах и многолетней мерзлоте.

*Ключевые слова:* нелинейные параболические уравнения, теплообмен с глубинными слоями морей и озер, фильтрация в грунтах, приливы на мелководье, температура во льдах

DOI: 10.7868/S0321059613030097

Многие физические процессы в природе описываются нелинейными параболическими уравнениями типа уравнения теплопроводности с коэффициентом теплопроводности, являющимся функцией искомой характеристики среды. Хотя этот класс уравнений называется уравнением теплопроводности, он встречается при описании совершенно разных процессов. Общая форма этих уравнений имеет вид

$$\frac{\partial T}{\partial t} = b \operatorname{div}[F(T)\operatorname{grad} T], \quad (1)$$

где  $b$  — некоторая константа, а функция среды  $F(T)$  имеет различные зависимости для разного класса задач. Наиболее часто  $F(T)$  описывается степенной функцией  $F(T) = T^n$ . Например, при  $n = 1$  уравнение (1) описывает динамику безнапорной фильтрации в пористых средах [14],  $T$  в этом случае является уровнем грунтовых вод; при  $n \geq 1$  — фильтрацию политропного газа в пористых средах [4, 10, 21], давление  $P$  и плотность  $\rho$  которого связаны уравнением  $P = \operatorname{const} \rho^n$  ( $n$  — показатель политропы), в этом случае  $T$  является плотностью газа  $\rho$ ; при  $n = 3$  — динамику тонкого слоя жидкости, стекающего под действием силы тяжести [15], растекание магматической лавы по

горизонтальной плоскости, эволюцию длинных гравитационных волн типа приливных на мелководье [6, 7, 19]; при  $n = 6$  — радиационное рассеяние волн Маршака [4, 18].

Много статей посвящено изучению автомодельных и инвариантно-групповых решений уравнения (1). В частности, Г.И. Баренблатт [1] получил автомодельные решения первого и второго рода (неполная автомодельность, по терминологии Баренблатта) для (1). Однако автомодельные решения относятся к задачам Коши с начальными условиями или к краевым задачам, но со специфическими граничными условиями. В данной статье описан эффект, возникающий в периодической краевой задаче для параболического уравнения нелинейной теплопроводности (1).

## ТЕОРИЯ ПАМПИНГ-ЭФФЕКТА

Будем рассматривать одномерный аналог уравнения (1). Именно для одномерного уравнения удастся найти один важный инвариант. Рассмотрим периодическую задачу для одномерного

уравнения (1) на полупрямой  $x > 0$  с граничными условиями

$$T|_{x=0} = f(t), \quad T|_{x \rightarrow \infty} < C < \infty, \quad (2)$$

где  $f(t)$  – периодическая функция с периодом  $\tau$  или с частотой  $\omega = 2\pi/\tau$ . Обычно  $f(t)$  имеет вид  $f(t) = T_0 + T_1 \cos \omega t$ . Очевидно, что в отсутствие колебаний на границе ( $T_1 = 0$ ) функция  $T = T_0$  будет решением уравнения (1).

Введем оператор осреднения по периоду

$$\langle T \rangle = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} T dt. \quad (3)$$

Пусть  $\Psi(T)$  – первообразная функция от  $F(T)$ , т.е.

$$\Psi(T) = \int F(T) dT. \quad (4)$$

Будем предполагать, что  $\Psi(T)$  – однозначная функция. Обозначим обратную к  $\Psi$  функцию как  $\Psi^{(-1)}$ . Тогда справедлива основная теорема [8]:

*Периодическое решение уравнения (1) с граничными условиями (2) стремится при  $x \rightarrow +\infty$  к константе  $T^{(\infty)}$ :*

$$T^{(\infty)} = \Psi^{(-1)}[\langle \Psi(f(t)) \rangle], \quad (5)$$

вообще говоря, не совпадающей с  $T_0$ .

Действительно, если принять во внимание (4), то уравнение (1) можно переписать в виде

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{d\Psi}{dT} \frac{\partial T}{\partial x} \right] \equiv \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}. \quad (6)$$

Осредним левую и правую части (6) по периоду  $\tau$ . В результате получим

$$\frac{\partial^2 \langle \Psi \rangle}{\partial x^2} = 0, \quad (7)$$

следовательно,  $\langle \Psi \rangle = C_1 x + C_2$ . Так как  $\langle \Psi \rangle$  означает не что иное, как поток, осредненный за период, то  $\langle \Psi \rangle$  не может расти до бесконечности при  $x \rightarrow +\infty$ , следовательно,  $C_1 = 0$ . Отсюда следует, что  $\langle \Psi \rangle = C_2$  и  $\langle \Psi \rangle$  является инвариантом, который сохраняется при всех  $x$ . В результате получим

$$\langle \Psi \rangle|_{x=0} = \langle \Psi \rangle|_{x \rightarrow +\infty}. \quad (8)$$

При  $x \rightarrow +\infty$  колебания затухают, на бесконечности получим

$$\langle \Psi \rangle|_{x \rightarrow +\infty} = \Psi(T^{(\infty)}). \quad (9)$$

Принимая во внимание, что

$$\langle \Psi \rangle|_{x=0} = \langle \Psi(f(t)) \rangle, \quad (10)$$

и используя обратную функцию  $\Psi^{(-1)}$  к  $\Psi$  в (9), получим формулу (5) из (8) и (10).

Итак, чисто гармоническое колебание характеристики среды  $T$  на границе области приводит к увеличению или уменьшению ее значения внутри области относительно ее среднего значения на границе. Следовательно, имеем эффект либо накачки, либо, наоборот, откачки субстанции на бесконечности гармоническими колебаниями на границе. Этот эффект в [8] получил название пампинг-эффекта. Разность  $T^{(\pm)} = T^{(\infty)} - T_0$  дает величину пампинг-эффекта. Знак  $\pm$  означает, что эта величина может быть как положительной, так и отрицательной. В линейном случае при  $F(T) = \text{const}$  очевидно, что  $T^{(\infty)} = T_0$  и никакого пампинг-эффекта не возникает.

При выводе уравнения (7) было предположено, что решение уравнения (1) с граничными условиями (2) может содержать только кратные  $\omega$  частоты. Справедливость этого предположения может быть обоснована аналитически для случая малых значений отношения  $\varepsilon = T_1/T_0$  в выражении для  $f(t)$ , т.е. при  $\varepsilon \ll 1$ . Предположим, что  $\Psi(T)$  – аналитическая функция, и разложим ее в ряд Тейлора в окрестности  $T_0$ . Тогда уравнение (1) можно записать в виде

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( F(T_0) + \frac{dF(T_0)}{dT} \varepsilon T + \frac{1}{2} \frac{d^2 F(T_0)}{dT^2} \varepsilon^2 T^2 + \dots \right) \frac{\partial T}{\partial x} \right]. \quad (11)$$

Будем искать решение уравнения (11) в виде асимптотического ряда по  $\varepsilon$ :

$$T = T^{(0)} + \varepsilon T^{(1)} + \varepsilon^2 T^{(2)} + \dots \quad (12)$$

Подставляя (12) в (11) и группируя члены нулевого, первого и т.д. порядков по  $\varepsilon$ , получим систему редуцированных линейных неоднородных уравнений теплопроводности, которые будут одержать только кратные  $\omega$  частоты.

Легко найти значение инварианта  $\langle \Psi \rangle$  на бесконечности, так как колебания там затухают и справедливо соотношение (9). Но на практике такая задача чаще формулируется для ограниченных областей  $0 \leq x \leq L$  и процедура нахождения значения инварианта, описанная выше, не проходит для отрезка. В общем случае решение уравнения (1) на сегменте может быть найдено только численно. Если отношение  $\varepsilon = T_1/T_0$  в выражении для  $f(t)$  – малая величина, т.е.  $\varepsilon \ll 1$ , тогда можно найти аналитическое выражение для пампинг-эффекта на конце отрезка  $x = L$ . Рассмотрим

уравнение (11) и ограничимся в  $F(T)$  только членами не выше первого порядка по  $\varepsilon$ :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left[ (\alpha + \beta \varepsilon T + O(\varepsilon)) \frac{\partial T}{\partial x} \right], \quad (13)$$

где  $\alpha = F(T_0)$ ,  $\beta = \frac{dF(T_0)}{dT}$ . На правом конце отрезка поставим условие второго рода

$$\left. \frac{dT}{dx} \right|_{x=L} = 0, \quad (14)$$

которое физически означает отсутствие потока субстанции через границу. Будем искать решение уравнения (13) с граничными условиями (2), (14) в виде асимптотического ряда (12) с граничными условиями

$$\begin{aligned} T^{(0)} \Big|_{x=0} &= A \cos \omega t, \quad \left. \frac{\partial T^{(0)}}{\partial x} \right|_{x=L} = 0, \\ T^{(1)} \Big|_{x=0} &= 0, \quad \left. \frac{\partial T^{(1)}}{\partial x} \right|_{x=L} = 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Решение для первого приближения  $T^{(0)}$  ищем в виде

$$T^{(0)} = \operatorname{Re} \left[ Q(x) e^{i\omega t} \right] = \frac{Q(x) e^{i\omega t} + Q^*(x) e^{-i\omega t}}{2}, \quad (16)$$

где  $\operatorname{Re}$  означает действительную часть выражения в скобках, а звездочка – комплексно сопряженную функцию. Подставляя (16) в первое приближение уравнения (13), получим выражение для  $Q(x)$ :

$$Q(x) = T_1 \frac{\operatorname{ch}[\lambda(L-x)]}{\operatorname{ch}(\lambda L)}, \quad (17)$$

где  $\lambda = (1+i)\sqrt{\omega/(2\alpha)}$ . Подставляя (17) в (16) и затем – во второе приближение уравнения (13) относительно  $\varepsilon$ , получим решение для  $T^{(1)}$ , содержащее периодическую часть и не зависящее от времени слагаемое. Это слагаемое и описывает пампинг-эффект:

$$T^{(\pm)}(x) = -\frac{\beta}{4\alpha} [Q(x)Q^*(x) - Q(0)Q^*(0)]. \quad (18)$$

Выражение (18) дает количественное значение величины пампинг-эффекта в любой точке  $x$  отрезка. На конце отрезка при  $x = L$  величина пампинг-эффекта:

$$T^{(\pm)}(L) = -\frac{\beta T_1^2}{4\alpha} \left[ \frac{1}{\operatorname{ch}(\lambda L) \operatorname{ch}(\lambda^* L)} - 1 \right]. \quad (19)$$

При  $L \rightarrow \infty$  получим

$$T^{(\pm)}(\infty) = \frac{\beta T_1^2}{4\alpha}. \quad (20)$$

Из (20) видно, что знак пампинг-эффекта зависит от знака  $\beta/\alpha$ .

Соотношение (18) позволяет оценить расстояние  $L_{(+)}$ , на котором среднее значение субстанции выходит на асимптотическое решение (19):

$$L_{(+)} = \frac{1}{\lambda + \lambda^*} = [2 \operatorname{Re}(\lambda)]^{-1} = \left( \frac{\alpha}{2\omega} \right)^{1/2} = \left[ \frac{F(T_0)}{2\omega} \right]^{1/2}. \quad (21)$$

Итак, если функция среды  $F(T)$  в (1) есть линейная функция  $F(T) = \alpha + \beta T$  (как, например, в задачах распространения температурных волн в воде, льдах, грунтах), то будем иметь выражение для пампинг-эффекта на бесконечности

$$T^{(\pm)} = -b \pm \sqrt{b^2 + T_1^2/2}, \quad \text{где } b = \frac{\alpha}{\beta} + T_0. \quad (22)$$

Если  $b < 0$ , то необходимо брать минус в (22). Если  $b > 0$  – знак плюс. При  $T_1/b \ll 1$  и  $\alpha/\beta \gg T_0$  соотношение (22) упрощается и сводится к (20).

Отметим, что начало исследования остаточных нелинейных эффектов в периодических задачах для параболических уравнений было положено в работе Дж. Филипа [22].

### ПАМПИНГ-ЭФФЕКТ В УРАВНЕНИИ БЮРГЕРСА

Известно, что движения грунтовых вод в тонких насыщенных слоях с приточностью жидкости сверху и снизу, так же как течения в перфорированных трубах с боковым притоком или оттоком, описываются уравнением Бюргерса [14]. Здесь нелинейность входит не через диффузию, а через адвекцию. Покажем, что для этого уравнения также имеет место пампинг-эффект. Рассмотрим периодическую задачу для уравнения Бюргерса на полупрямой

$$\zeta_t + (\zeta_x)^2 = \nu \zeta_{xx} \quad (23)$$

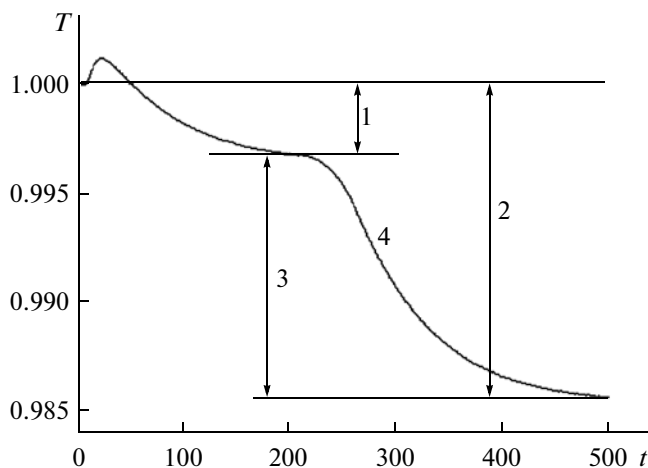
с граничными условиями

$$\zeta|_{x=0} = \zeta^{(0)} \sin \omega t, \quad \zeta|_{x \rightarrow \infty} < C < \infty. \quad (24)$$

Уравнение (23) написано в безразмерном виде,  $\nu$  – безразмерный коэффициент вязкости. Заменой Хопфа–Коула  $\zeta = 2\nu \ln(\varphi)$  уравнение (23) сводится к линейному уравнению теплопроводности относительно новой функции  $\varphi$ , решение которого с граничными условиями (24) будет иметь вид

$$\varphi(x, t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \exp \left\{ -\xi^2 - \frac{\zeta^{(0)}}{2\nu} \sin \left[ \omega \left( t - \frac{x^2}{4\nu\xi} \right) \right] \right\} d\xi. \quad (25)$$

Воспользуемся производящей функцией для функций Бесселя первого рода, чтобы вычислить интеграл (25). Тогда можно написать



**Рис. 1.** Поведение температуры  $T$  во времени в придонной области модельного бассейна после увеличения амплитуды колебания температуры на поверхности водоема в два раза (модельный численный расчет, все величины безразмерные). Объяснения обозначений 1–4 даны в тексте.

$$\varphi(x, t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{2 \exp(in\omega t)}{\sqrt{\pi}} J_n \left( -\frac{\zeta^{(0)}}{2\nu i} \right) \times \int_0^{\infty} \exp \left[ -\xi^2 - \frac{i n \omega x^2}{4\nu \xi^2} \right] d\xi, \quad (26)$$

Чтобы найти предел функции  $\varphi(x, t)$  в (26) при  $x \rightarrow +\infty$ , воспользуемся леммой Римана–Лебега об интегралах от осциллирующих функций [12]. В результате получим

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x, t) = \frac{2}{\pi} J_0 \left( -\frac{\xi^{(0)}}{2\nu i} \right) \times \int_0^{\infty} \exp(-\xi^2) d\xi = J_0 \left( -\frac{\xi^{(0)}}{2\nu i} \right) = I_0 \left( \frac{\xi^{(0)}}{2\nu} \right), \quad (27)$$

где  $I_0$  – функция Бесселя нулевого порядка от мнимого аргумента. Возвращаясь к исходной функции  $\zeta(x, t)$ , получим выражение для пампинг-эффекта для уравнения Бюргерса (23):

$$\zeta^{(+)} = 2\nu \ln \left[ I_0 \left( \frac{\zeta^{(0)}}{2\nu} \right) \right]. \quad (28)$$

Так как  $I_0 \geq 1$ , то пампинг-эффект для уравнения Бюргерса всегда положителен. При условии малости аргумента функции  $I_0$  выражение (28) упрощается:

$$\zeta^{(+)} \approx \frac{(\zeta^{(0)})^2}{16\nu}. \quad (29)$$

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ПАМПИНГ-ЭФФЕКТА

На рис. 1 приведены результаты численного решения уравнения (1) с безразмерной функцией  $F(T)$  в виде

$$F(T) = ca/(b + rT), \quad (30)$$

где  $c = 10$ ,  $a = 2.25$ ,  $b = 1$ ,  $r = 0.596$ . Задание функции  $F(T)$  в виде (30) связано с приложением пампинг-эффекта к океанам и озерам, которое будет изложено ниже. На границе при  $x = 0$  ставится периодическое условие  $T = 1 + q(t) \sin t$ , на конце отрезка  $x = 5$  задается отсутствие потока через границу. Функция  $q(t)$  задается следующим образом: она равняется 0.2 при  $0 < t < 200$  (первый режим), затем линейно меняется от 0.2 до 0.4 при  $200 < t < 250$  и далее остается равной 0.4 при  $250 < t < 500$  (второй режим). Таким поведением функции  $q(t)$  моделировалась такая ситуация в океане, когда амплитуда колебания температуры поверхности океана или озера вначале некоторое время держится на одном значении, а затем линейно переходит на другое значение, в данном случае – в два раза большее предыдущего. Как видно из результатов численного расчета, температура в глубинных слоях сначала выходит на один асимптотический уровень (кривая 4 на рис. 1), соответствующий первому режиму (уровень 1), а затем, когда амплитуда колебания температуры на поверхности океана ( $x = 0$ ) увеличивается вдвое, переходит на второй асимптотический уровень, соответствующий второму режиму (уровень 2). Потеря тепла будет определяться разностью между уровнями 1 и 2 (интервал 3). В данном случае пампинг-эффект отрицательный.

Нетрудно сделать общий вывод из физики процесса: пампинг-эффект будет положительным, если  $F(T)$  в (1) – возрастающая функция, и отрицательным, если она – убывающая, как, например, (30). Действительно, выражение в скобках в уравнении (1) есть поток тепла. Для возрастающей функции  $F(T)$  на фазе верхней части синусоиды хода температуры поток тепла вовнутрь области будет больше, нежели на фазе нижней части синусоиды хода температуры. В результате возникает остаточный поток тепла, который будет ненулевым и направленным внутрь области. В этом случае возникает положительный пампинг-эффект. Аналогичные физические рассуждения для случая убывающей функции  $F(T)$  приводят к отрицательному пампинг-эффекту.

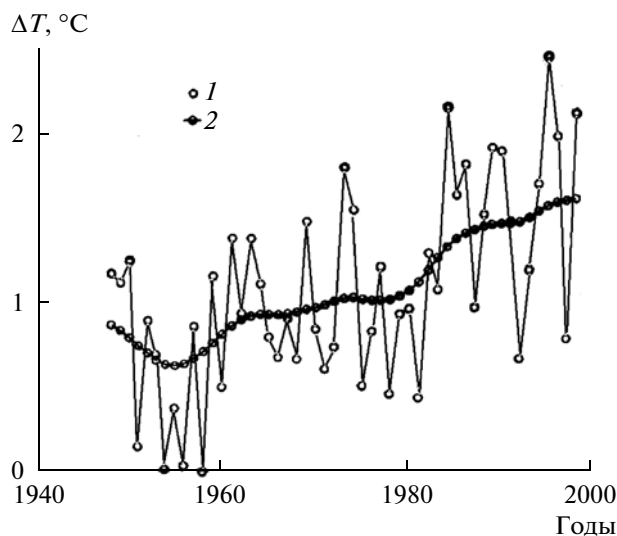
ПРИЛОЖЕНИЯ ПАМПИНГ-ЭФФЕКТА  
К ГЕОФИЗИЧЕСКИМ ПРОЦЕССАМ

*Одномерная нелинейная модель влияния колебаний температуры поверхностных вод океана или озера на теплосодержание их глубинных слоев*

Интересно выяснить, какую роль играет пампинг-эффект в передаче тепла в глубинные слои морей, океанов и озер. Тепло может не только закачиваться внутрь океана, но и наоборот, откачиваться из глубин в зависимости от того, увеличивается или уменьшается амплитуда колебания поверхностной температуры. Этот поток тепла из глубинных слоев океана будет повышать температуру поверхностных вод и вносить дополнительный вклад в общее потепление климата.

В настоящее время основной причиной потепления климата считается парниковый эффект, который связывают в основном с увеличением содержания двуокси углерода в атмосфере. Но период потепления климата, помимо положительного тренда повышения глобальной температуры, характеризуется увеличением амплитуды годовых и многолетних колебаний температуры приземных слоев атмосферы и поверхности Мирового океана. Солнечная радиация, безусловно, является основным внешним источником формирования климата Земли. Но сама вариация солнечной радиации мала и составляет 0.1–0.6% от ее среднего значения. Это означает, что процессы внутреннего перераспределения потоков тепла в системе поверхность Земли – атмосфера играют главную роль в формировании изменений климата. Парниковый эффект является одним из таких внутренних причин климатических изменений. Пампинг-эффект также относится к внутренним процессам перераспределения тепла на Земле, закачивая в глубинные слои или откачивая из них тепло при изменении амплитуды колебаний температуры поверхности океана (ТПО). Как видно из результатов численного решения, представленных на рис. 1, при увеличении амплитуды колебания ТПО теплосодержание глубинных вод будет уменьшаться. В [3, 20] приводятся данные, подтверждающие охлаждение глубинных вод в Атлантике.

Дж. Рейд [23] нашел значимую корреляцию между потеплением климата и колебаниями ТПО. В [13] также подтверждается этот вывод по результатам анализа изменений ТПО в Атлантике за последние 50 лет. На рис. 2 приведен график колебаний ТПО в экваториальной зоне Атлантики начиная с 1959 г. [13]. График базируется на инструментальных наблюдениях и спутниковых данных. Видно, что амплитуда многолетних колебаний ТПО начиная с 1960 г. увеличивается. К



**Рис. 2.** Долгопериодные флуктуации температуры  $T$  на поверхности океана в экваториальной зоне Атлантики в точке с координатами  $10^\circ$  ю.ш.,  $0^\circ$  в.д. По вертикальной оси отложены значения  $\Delta T = T - T_{\min}$ , где  $T_{\min}$  – минимальная температура в данной точке за приведенный период. 1 – данные наблюдений; 2 – нелинейный тренд по [13].

2000 г. амплитуда колебания ТПО увеличилась на  $1.5^\circ\text{C}$ . Таким образом, амплитуда многолетних колебаний ТПО в Атлантике за период 1950–2000 гг. увеличилась примерно в 1.5 раза.

Осредним уравнение теплопроводности для Мирового океана по широте и долготе. Тогда распределение температуры воды по вертикали будет описываться одномерным уравнением нелинейной теплопроводности. Примем граничные условия в виде (2), где  $f(t) = T_0 + T_1 \cos \omega t$ . Однако сразу получить уравнение (1) не удастся, так как известно, что функция среды  $F(T)$ , или, точнее, коэффициент теплопроводности для океана, зависит от градиента температуры, а не от самой температуры, поэтому надо попытаться найти зависимость градиента температуры от самой температуры, с тем чтобы прийти к уравнению (1). Функция теплопроводности для океана определяется процессами турбулентного перемешивания. Она на много порядков больше коэффициента молекулярной теплопроводности. Коэффициент вертикального турбулентного обмена в океане пропорционален коэффициенту обмена импульсом по вертикали  $K_z$ . Ниже поверхностного слоя Эكمана для  $K_z$  в океанологии используется следующая параметризация [17, 24] с использованием частоты Вьяйсяля–Брента  $N(z)$ :

$$K_z(z) = \mu N^{-\gamma}, \tag{31}$$

где  $\mu = \delta / N_0^{1-\gamma}$ ,  $\delta \approx (1-2) \times 10^{-3} \text{ см}^2/\text{с}^2$ ,  $0.5 \leq \gamma \leq 1.5$ ,  $N_0$  – характерное значение частоты Вьяйсяля–Брента. Как отмечено в [17],  $\gamma = 1$  – наиболее под-

ходящее значение. В глубоководных слоях океана стратификация вод слабая и, следовательно,  $N(z)$  может оказаться очень малой величиной. В результате соотношение (31) будет давать сильно завышенные значения  $K_z$  в глубинных слоях. Чтобы избежать этого, в [24] предложена модификация соотношения (31) введением ограничения  $K_z \leq K_z^{\max}$ . Тогда соотношение (31) более корректно будет выглядеть как

$$K_z(z) = \min(\mu N^{-\gamma}, K_z^{\max}). \quad (32)$$

Будем предполагать, что  $K_z \leq K_z^{\max}$ , следовательно, соотношение (31) будет справедливым для всей толщи океана. Но чтобы непосредственно применить изложенную теорию пампинг-эффекта, необходимо выразить  $K_z$  в зависимости не от градиента температуры, а непосредственно от самой температуры, т.е. в виде  $K_z = K(T)$ . Как было показано в [11], фоновое распределение частот Вайсяля–Брента в открытом океане в геострофической области хорошо аппроксимируется гиперболической зависимостью

$$N(z) = \frac{h_E N_E}{z + h_E}, \quad (33)$$

где  $h_E$  – толщина верхнего слоя трения Экмана,  $N_E$  – значение частоты Вайсяля–Брента на нижней границе поверхностного слоя трения Экмана. Аппроксимация (33) получена в результате статистической обработки большого количества данных непосредственных наблюдений за распределением плотности воды в различных точках Мирового океана. Заметим, что среднегодовое распределение частот Вайсяля–Брента в Мировом океане изучалось в [16], но никакой параметризации для  $N(z)$  не было предложено.

Учитывая (33), можно написать

$$N^2(z) = \frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial z} = \left( \frac{h_E N_E}{z + h_E} \right)^2. \quad (34)$$

В (34) использована стандартная аппроксимация частоты Вайсяля–Брента с заменой в знаменателе плотности  $\rho$  на среднее значение  $\rho_0$ . Интегрируя (34) от дна  $z = H$  до уровня  $z$ , получим

$$\frac{h_E^2 N_E^2}{z + h_E} = \frac{g}{\rho_0} (\rho(H) - \rho(z)) + \frac{h_E^2 N_E^2}{H + h_E}. \quad (35)$$

Подставляя  $h_E N_E / (z + h_E)$  из (35) в (33) и затем в (31), получим

$$K(z) = \frac{\mu h_E^\gamma N_E^\gamma}{\left[ \frac{g}{\rho_0} (-\rho(z) + \rho(H)) + \frac{h_E^2 N_E^2}{H + h_E} \right]^\gamma}. \quad (36)$$

Считая поле солёности “замороженным” в океане, используем простейшее уравнение состояния морской воды в приближении Буссинеска:  $\rho = \rho_H(1 - \alpha_T(T - T_H))$ , где  $\alpha_T$  – коэффициент термического расширения воды,  $\rho_H = \rho(H)$  и  $T_H = T(H)$ . Тогда будем иметь окончательное выражение для функции температуропроводности в океане:

$$F(T) = CK_z(T) = \frac{A}{(B + RT)^\gamma}, \quad (37)$$

где  $A = S \mu h_E^\gamma N_E^\gamma$ ;  $B = \frac{h_E^2 N_E^2}{H + h_E} - \frac{g \rho_H \alpha_T}{\rho_0} T_H$ ;  $R = \frac{g \rho_H \alpha_T}{\rho_0}$ ,  $S$  – число Шмидта (отношение характерного значения кинематического коэффициента турбулентной теплопроводности к кинематическому коэффициенту турбулентного обмена импульсом).

Рассмотрим вначале случай термически однородного океана:  $T(z) = T_0$ . Нижнюю границу поверхностного слоя Экмана (т.е. верхнюю границу геострофической области) отождествим с поверхностью океана. Соотношение (32) позволяет избежать сингулярности в (37), поэтому будем иметь  $B + RT > 0$ . Первообразной функцией для функции

(37) при  $\gamma \neq 1$  будет функция  $\frac{A}{(1 - \gamma) R (B + RT)^{\gamma-1}}$ , а при  $\gamma = 1$  – функция  $(A/R) \ln(B + RT)$ . При  $\gamma = 1$  получим

$$\langle \ln(B + RT^{(\infty)}) \rangle = \langle \ln[B + R(T_0 + T_1 \cos \omega t)] \rangle. \quad (38)$$

Вычисляя интеграл в правой части (38), получим

$$\ln(B + RT^{(\infty)}) = \ln \left\{ \frac{B + RT_0 + \sqrt{(B + RT_0)^2 - (RT_1)^2}}{2} \right\}. \quad (39)$$

При условии малости отношения  $RT_1 / (B + RT_0)$  соотношение (39) упрощается:

$$T^{(\infty)} - T_0 = T^{(-)} \approx - \frac{RT_1^2}{4(B + RT_0)}. \quad (40)$$

Аналогично находим выражение для пампинг-эффекта при  $\gamma = 1/2$ . В этом случае первообразной функцией для (37) будет функция  $\frac{2A}{R} \sqrt{B + RT}$ . Для пампинг-эффекта получим выражение

$$T^{(\mp)} = \frac{1}{R} \left[ \frac{16}{4\pi^2} (B + RT_0 + RT_1) E^2(k) - (B + RT_0) \right], \quad (41)$$

где

$$k^2 = 2a / (1 + a) < 1, \quad a = RT_1 / (B + RT_0). \quad (42)$$

В (41)  $E(k)$  – полный эллиптический интеграл второго рода. Разлагая  $E(k)$  до вторых степеней и оставляя только члены до четвертого порядка по  $k$ , получим

$$T^{(-)} \approx -\frac{RT_1^2}{8(B + RT_0 + RT_1)}. \quad (43)$$

Итак, пампинг-эффект для Мирового океана отрицателен. Это означает, что когда амплитуда колебания поверхностной температуры  $T_1$  в океане увеличивается, температура глубинных слоев уменьшается, т.е. тепло будет откачиваться из глубинных слоев океана. И наоборот, при уменьшении амплитуды колебания поверхностной температуры по сравнению с предыдущим периодом времени глубинные слои будут теплеть, т.е. тепло будет закачиваться в глубь океана.

Проведем количественные оценки на примере Тихого океана. Полагаем, что  $h_E \approx 100$  м,  $N_E \approx 10^{-2} \text{ с}^{-1}$ ,  $H \approx 5$  км,  $\alpha_T = 1.67 \times 10^{-4} (\text{°C})^{-1}$ . Для оценок используем среднее значение придонной температуры Тихого океана  $T_H \approx 2.08 \text{°C}$ . Тогда вычисления дают  $B \approx -3.27 \times 10^{-3} \text{ м/с}^2$  и  $R \approx 1.67 \times 10^{-3} \text{ м(°C)}^{-1} \text{ с}^{-2}$ . Средняя температура вод Тихого океана составляет  $T_0 \approx 3.66 \text{°C}$  [2], в результате получим  $B + RT_0 \approx 2.8 \times 10^{-3} \text{ м/с}^2$ .

Из основной теоремы и полученных формул для пампинг-эффекта следует, что величина пампинг-эффекта не зависит от коэффициента  $A$  в (37). Но от него зависит толщина слоя, в котором решение выходит на асимптотический режим. Это так называемый слой Стокса. Из (21) получим толщину слоя Стокса, в котором наблюдаются колебания температуры и в котором температура выходит на асимптотический уровень пампинг-эффекта  $T^{(\infty)}$ :

$$L_{(+)} = \left[ \frac{A}{2\omega(B + RT_0)^\gamma} \right]^{1/2}. \quad (44)$$

Принимая число Шмидта, равным единице ( $S \approx 1$ ), получим  $A \approx 2 \times 10^{-7} \text{ м}^3/\text{с}^3$ . Вычисляя (44), получим толщину слоя Стокса около 83 м для колебаний температуры с периодом один год и около 187 м – для колебаний температуры с периодом пять лет. Из приведенных оценок видно, что толщина слоя Стокса, где температура выходит на асимптотический уровень, существенно меньше общей глубины океана, поэтому приближение бесконечно глубокого океана для расчета величины пампинг-эффекта вполне обосновано.

Оценим, насколько температура глубинных слоев однородного океана может снизиться при увеличении амплитуды многолетних колебаний

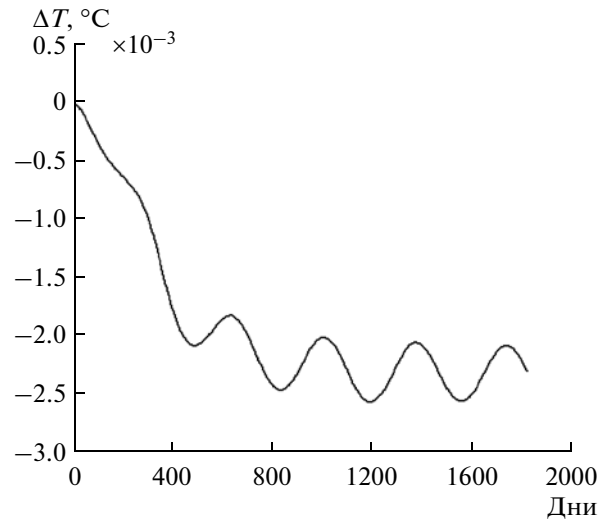


Рис. 3. Падение температуры на глубине 2000 м относительно стационарного решения (45) после включения годовых колебаний температуры поверхности океана с амплитудой  $0.7 \text{°C}$  (численный эксперимент).

температуры поверхности океана на  $T_1 \approx 0.35 \text{°C}$ . Рис. 1 иллюстрирует эту ситуацию. Для  $\gamma = 1$  соотношение (40) дает оценку  $\Delta T_\infty^{(-)} = -1.9 \times 10^{-2} (\text{°C})$ . В случае  $\gamma = 1/2$  вычисления по формуле (41) приводят к оценке  $\Delta T_\infty^{(-)} = -9 \times 10^{-3} (\text{°C})$ .

Приведенные выше оценки потерь тепла глубинными слоями океана были сделаны для термически однородного океана. Такое состояние океана соответствует одному из стационарных решений уравнения (1) с коэффициентом температуропроводности в форме (37) при нулевом фоновом потоке тепла по вертикали. Однако в реальном океане фоновый поток тепла по вертикали, вообще говоря, не равен нулю. Оценим величину пампинг-эффекта при наличии ненулевого фонового потока тепла. При  $\gamma = 1$  в (37) уравнение (1) имеет стационарное решение:

$$T(z) = \frac{1}{R}[-B + C_1 \exp(C_2 Rz)], \quad (45)$$

где

$$C_1 = RT_S + B, \quad C_2 = \frac{1}{RH} \ln \frac{RT_H + B}{RT_S + B}, \quad (46)$$

$T_S$  – температура поверхности океана,  $T_H$  – придонная температура,  $H$  – глубина океана.

Решение (45) описывает фоновое стационарное экспоненциальное распределение температуры в океане в геострофической области с поверхностной температурой  $T_S$  и придонной температурой  $T_H$ . На рис. 3 приведено численное решение

одномерного уравнения (1) с функцией теплопроводности (37) для  $\gamma = 1$  при фоновом распределении температуры по глубине (45) с  $T_S = 10^\circ\text{C}$  и  $T_H = 2.08^\circ\text{C}$ . На поверхности океана ставилось граничное условие на температуру в виде  $T(t, z)|_{z=0} = 10 + 0.7 \sin \omega t$  с периодом  $2\pi/\omega = 1$  год. Функция теплопроводности задавалась в виде (37) со значениями  $B = -3.27 \times 10^{-3} \text{ м/с}^2$ ,  $R = 1.67 \times 10^{-3} \text{ м/с}^2$  ( $^\circ\text{C}$ ). Так как величина пампинг-эффекта не зависит от значения коэффициента  $A$  (от него зависит только скорость выхода на асимптотический режим и толщина слоя Стокса), то в расчетах принималось  $A = 4 \times 10^{-3} \text{ м}^3/\text{с}^3$ . Амплитуда флуктуаций поверхностной температуры, равная 0.7, задавалась на основании рис. 2. Как видно из рис. 3, после начала счета температура во всех точках водной толщии начинает падать. На глубине 2000 м она снижается на величину  $2.5 \times 10^{-3} \text{ }^\circ\text{C}$ .

#### *Накачка уровня моря приливными волнами на мелководье*

Эволюция приливной волны периода  $\tau$ , когда она выходит на мелководье с глубиной  $h$ , не превышающей толщину слоя Стокса  $h_{st} = \sqrt{K_z \tau}$  ( $K_z$  — кинематический коэффициент вертикального турбулентного обмена,  $\tau$  — характерный временной масштаб движений (период волны)), описывается нелинейным параболическим уравнением [6, 7] для отклонения уровня  $\zeta$ :

$$\zeta_t = \frac{g}{3K_z} \nabla \left[ (h + \zeta)^3 \nabla \zeta \right], \quad (47)$$

где  $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y)$  — оператор Гамильтона,  $g$  — ускорение свободного падения. Одномерный аналог уравнения (47) будет иметь вид одномерного уравнения (1) с  $F(\zeta) = \frac{g}{3K_z} (h + \zeta)^3$ . Движение рассматривается в вертикальной плоскости, перпендикулярной к берегу. Колебания уровня на внешней глубоководной границе мелководной зоны определяются приходящей приливной волной  $\zeta = \zeta_0 \sin \omega t$ ,  $\omega = 2\pi/\tau$ . При  $h = \text{const}$  получим следующее выражение для инварианта:

$$(h + \zeta^{(+)})^4 = \frac{1}{\tau} \int_0^\tau (h + \zeta_0 \sin \omega t)^4 dt. \quad (48)$$

Вычисляя интеграл в (48), получим значение пампинг-эффекта для приливного уровня на бесконечности:

$$\zeta^{(+)} = h \left\{ \left[ 1 + 3 \left( \frac{\zeta_0}{h} \right)^2 + \frac{3}{8} \left( \frac{\zeta_0}{h} \right)^4 \right]^{1/4} - 1 \right\}. \quad (49)$$

Из (49) видно, что величина пампинг-эффекта для приливных волн будет положительной, т.е. уровень увеличивается на мелководье под действием прилива. В случае малости отношения амплитуды приходящей волны прилива  $\zeta_0$  к глубине  $h$  (т.е. при  $\varepsilon = \zeta_0/h \ll 1$ ) выражение (49) упрощается:

$$\zeta^{(+)} \approx \frac{3}{4} \frac{\zeta_0^2}{h}. \quad (50)$$

Как видно из (50), средний уровень приливного колебания повышается при приближении к берегу. В зоне, куда прилив не доходит, будем иметь стационарное повышение уровня. В устьях рек, впадающих в приливные моря, пампинг-эффект приводит к перемещению зоны подпора в глубь реки.

#### *Пампинг-эффект в двухслойной жидкости и интрузия морских вод в устьях рек в приливных морях*

Соленая морская вода проникает в устья рек в придонном слое в виде клина соленых вод. Динамика соленостного клина в двухслойной модели в канале постоянной глубины  $H_0$  меньшей толщины слоя Стокса описывается системой двух нелинейных параболических уравнений [5] для свободной поверхности  $z = \zeta(t, x)$  и толщины нижнего слоя  $z = \eta(t, x)$ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} &= \gamma \frac{\partial}{\partial x} \left\{ (H_0 - \zeta)^3 \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \delta \frac{\partial \eta}{\partial x} (3H_0 \eta^2 - 2\eta^3) \right\}, \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} &= \gamma \delta \frac{\partial}{\partial x} \left\{ \eta^3 \left( 4 - \frac{3\eta}{H_0} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} - \delta^{-1} \frac{\partial \zeta}{\partial x} (3H_0 \eta^2 - 2\eta^3) \right\}. \end{aligned} \quad (51)$$

В (51)  $\gamma = g/(3K_z)$ ,  $\delta = \Delta\rho/\rho_1$ ,  $K_z$  — кинематический коэффициент вертикального турбулентного обмена,  $g$  — ускорение свободного падения,  $\Delta\rho$  — разность плотностей морской и речной воды,  $\rho_1$  — плотность речной воды.

На входе в устье задаются периодические колебания уровня и толщины нижнего слоя морской воды:

$$x = 0: \quad \zeta = \zeta_0 \cos \omega t, \quad \eta = \eta_0 \cos \omega t + D,$$

где  $D$  — средняя толщина нижнего слоя на входе в канал.



Оценим величину пампинг-эффекта для свободной поверхности и поверхности раздела слоев  $\zeta_\infty^\pm$  и  $\eta_\infty^\pm$ . Для этого запишем систему (51) в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial \zeta}{\partial t} &= \gamma \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ -\frac{1}{4}(H_0 - \zeta)^4 - \delta \left( H_0 \eta^3 - \frac{\eta^4}{2} \right) \right], \\ \frac{\partial \eta}{\partial t} &= \gamma \delta \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[ \left( \eta^4 - \frac{3}{5H_0} \eta^5 \right) - \frac{1}{\delta} \int_0^x (3H_0 \eta^2 - 2\eta^3) \frac{\partial \zeta}{\partial x} dx \right]. \end{aligned} \quad (52)$$

Применяя оператор осреднения (3) к (52) и интегрируя дважды по  $x$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \langle (H_0 - \zeta)^4 \rangle + \delta \langle H_0 \eta^3 - \eta^4 / 2 \rangle &= C_1 x + C_2, \\ \left\langle \eta^4 - \frac{3}{5H_0} \eta^5 \right\rangle - \frac{1}{\delta} \left\langle \int_0^x (3H_0 \eta^2 - 2\eta^3) \frac{\partial \zeta}{\partial x} dx \right\rangle &= C_3 x + C_4. \end{aligned} \quad (53)$$

Из условия ограниченности уровня  $\zeta$  и толщины нижнего слоя  $\eta$  при  $x \rightarrow +\infty$  следует, что  $C_1 = C_3 = 0$  в (53). Таким образом, величины в левой части системы (53) являются инвариантами относительно сдвигов по оси  $X$  вдоль канала. Вычисляя эти инварианты на входе в канал и в бесконечно удаленной точке, где колебания затухают, получим систему уравнений для определения  $\zeta_\infty^\pm$  и  $\eta_\infty^\pm$ :

$$\begin{aligned} (H_0 - \zeta_\infty^+)^4 + \delta \left( H_0 - \frac{1}{2} \eta_\infty^\pm \right) (\eta_\infty^\pm)^3 &= \\ = \frac{1}{4} \langle (H_0 - \zeta(0, t))^4 \rangle + \delta \left\langle H_0 \eta^3(0, t) - \frac{\eta^4(0, t)}{2} \right\rangle, \\ (\eta_\infty^\pm)^4 - \frac{3}{5H_0} (\eta_\infty^\pm)^5 &= \left\langle \eta^4(0, t) - \frac{3}{5H_0} \eta^5(0, t) \right\rangle + \\ + \frac{1}{\delta} \left\langle \int_0^{+\infty} \frac{\partial \zeta}{\partial x} (3H_0 \eta^2 - 2\eta^3) dx \right\rangle. \end{aligned} \quad (54)$$

Из первого уравнения системы (54) видно, что с точностью до  $O(\delta)$  будем иметь для  $\zeta_\infty^+$  соотношение (50) будем иметь:

$$\zeta_\infty^+ = \frac{3\zeta_0^2}{4H_0} (1 + O(\delta)), \quad (55)$$

т.е. наличие двухслойности дает в выражении (50) лишь поправку порядка  $O(\delta)$ . Труднее обстоит дело с оценкой  $\eta_\infty^\pm$  из-за наличия в правой части (54) нелокального члена

$$J = \left\langle \int_0^{+\infty} \frac{\partial \zeta}{\partial x} (3H_0 \eta^2 - 2\eta^3) dx \right\rangle. \quad (56)$$

Однако тот факт, что в двухслойной жидкости накачка уровня  $\zeta_\infty^+$  практически такая же, как и в однородной, позволяет вычислить выражение (56),

воспользовавшись для нахождения  $\partial \zeta / \partial x$  результатами однородной модели. В однородном случае ( $\delta = 0$ ) решение первого уравнения (52) при малых величинах  $\alpha = \zeta_0 / H$  можно представить в виде асимптотического ряда по  $\alpha$ :

$$\zeta = \zeta_0 \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^k \zeta_k(x, t). \quad (57)$$

Подставляя (57) в первое уравнение (52) при  $\delta = 0$  и ограничиваясь только двумя членами асимптотического ряда (57), получим с точностью до  $O(\alpha^2)$

$$\begin{aligned} \zeta &= \zeta_0 \operatorname{Re} \{ i \exp[-(1+i)kx + i\omega t] - \frac{3\alpha}{4} [(1+i) - \\ &- \exp(-2kx + 2\pi i) - 2 \exp[-2(1+i)kx + 2i\omega t] - \\ &- 2 \exp[-(1+i)k\sqrt{2}x + 2i\omega t]] \} + O(\alpha^2), \end{aligned} \quad (58)$$

где  $k = L \sqrt{\frac{6\omega A_c}{gH_0^3}}$  – безразмерное волновое число,  $L$  – характерный пространственный масштаб движений.

Для полусуточной приливной волны  $M_2$  в закритической области глубин  $H \leq h_S$ , величина  $k \gg 1$ . Дифференцируя (58) по  $x$  и подставляя в (56), получим сумму интегралов Лапласа вида

$$I(t) = \int_0^{+\infty} e^{-vkx} f(x, t) dx. \quad (59)$$

Так как  $k \gg 1$ , то для вычисления интеграла (59) можно воспользоваться его асимптотикой [12] при  $k \rightarrow +\infty$ :

$$I(t) \sim \sum_{s=0}^{+\infty} (vk)^{-s-1} \frac{\partial^s f}{\partial x^s} \Big|_{x=0}. \quad (60)$$

Ограничившись первым членом асимптотического ряда (60), получим для (56)

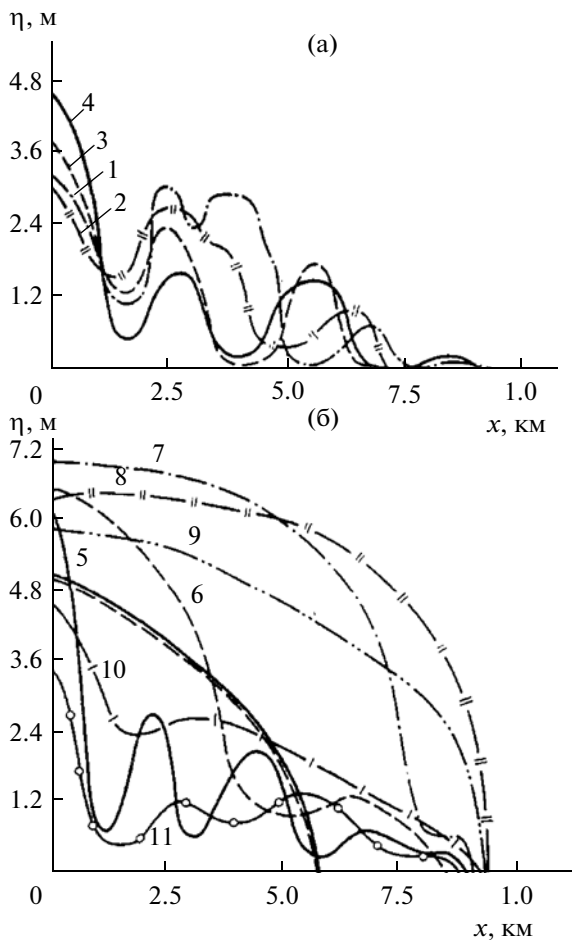
$$J \approx \zeta_0 \left\langle 3H_0 \eta^2(0, t) - 2\eta^3(0, t) \left( -\frac{3\alpha}{4} + \sin \omega t \right) \right\rangle. \quad (61)$$

Подставляя в (61) граничное условие для  $\eta$  и выделяя пампинг-эффект нижнего слоя  $\Delta \eta_\infty^\pm = \eta_\infty^\pm - D$ , получим из второго уравнения (54) приближенную формулу

$$\begin{aligned} \Delta \eta_\infty^\pm &\approx \frac{3\beta^2 (H_0 - D) D}{4H_0 - 3D} + \\ &+ \delta^{-1} \frac{3\alpha H_0^2 [(4\beta - 3\alpha)H_0 + (2\alpha - 4\beta)D]}{4D(4H_0 - 3D)}, \end{aligned} \quad (62)$$

где  $\beta = \eta_0 / D$ ,  $\alpha = \zeta_0 / H_0$ .

Из (62) видно, что на накачку в нижнем слое существенно влияет знак выражения



**Рис. 4.** Положение соленостного клина на каждый час полусуточного приливного цикла: а – с 1-го по 4-й час; б – с 5-го по 11-й час по результатам численного решения системы (52) для условий р. Онеги с синфазными граничными условиями для  $\zeta$  и  $\eta$  на входе в устье реки [5]. Сплошная линия с пунктиром в (б) – стационарный соленостный клин в отсутствие прилива со средним значением его толщины на входе в устье реки.

$$G = (-3\alpha + 4\beta)H_0 + (2\alpha - 4\beta)D.$$

При  $G > 0$  будем иметь положительную накачку ( $\Delta\eta_{\infty}^+ > 0$ ), при  $G < 0$  и  $\delta\beta^2 D^2(H_0 - D) + \alpha H_0^2 G < 0$  – отрицательную накачку ( $\Delta\eta_{\infty}^- < 0$ ). При  $\Delta\eta_{\infty}^+ \geq H_0 - D$  будем иметь вообще выклинивание нижнего слоя, т.е. нарушение двухслойности в горизонтальном канале. Когда поверхностная волна отсутствует ( $\alpha = 0$ ), для накачки нижнего слоя внутренней волной амплитуды  $\eta_0$  из (62) имеем выражение

$$\Delta\eta_{\infty}^+ = \frac{3\eta_0^2(H_0 - D)}{D(4H_0 - 3D)}. \quad (63)$$

Итак, в зависимости от соотношения амплитуд поверхностной  $\zeta_0$  и внутренней  $\eta_0$  волн и со-

отношения толщин верхнего  $H_0 - D$  и нижнего  $D$  слоев накачка нижнего слоя может быть положительная или отрицательная вплоть до возможного выклинивания верхнего либо нижнего слоя. На наклонной плоскости указанные эффекты будут способствовать либо увеличению длины соленостного клина, либо ее уменьшению. Оценим величину накачки нижнего слоя для условий устья р. Онеги:  $H_0 = 8$  м,  $D = 6$  м,  $\alpha = 0.2$ ,  $\beta = 0.3$ ,  $\delta = 1.5 \times 10^{-2}$ , тогда  $\Delta\eta_{\infty}^+ \approx 23$  см.

Величина накачки нижнего слоя в отсутствие поверхностной волны, как следует из (63), при  $D = \frac{2}{3}H_0$  достигает своего максимума:

$$\max(\Delta\eta_{\infty}^+) = \frac{3\eta_0^2}{4H_0}, \quad (64)$$

т.е. получается идентичная (50) формула; только теперь в числителе стоит амплитуда внутренней волны, а не поверхностной.

В устьях рек, впадающих в приливные моря, пампинг-эффект для свободной поверхности  $z = \zeta(t, x)$  приводит к перемещению зоны подпора вод выше по реке. Пампинг-эффект для поверхности раздела слоев  $z = \eta(t, x)$  приводит к увеличению длины соленостного клина и, как следствие, к более глубокому проникновению соленых морских вод в устья приливных рек. На рис. 4 приведены результаты численного решения системы уравнений (51) для конкретных условий устья р. Онеги, впадающей в Онежский зал. Белого моря.

Численные расчеты показывают, что глубина проникновения соленых вод в устья приливных рек из-за пампинг-эффекта может быть существенно больше, чем в устья неприливных рек. Это отличие может составлять километры.

#### *Пампинг-эффект в задачах безнапорной фильтрации грунтовых вод*

Пампинг-эффект может проявиться в фильтрации морских вод в береговые водоносные слои в приливных морях, что приведет к увеличению дальности проникновению морских вод в водоносные горизонты и повышению уровня грунтовых вод. При наличии насыщенного слоя грунтовых вод с верхней или нижней приточностью движение вод описывается уравнением Бюргера относительно скорости. И если на боковой границе слоя будут наблюдаться колебания скорости, например из-за прилива, то возникающий пампинг-эффект приведет к возникновению постоянного потока в глубь слоя от его внешней морской границы [9].

Рассмотрим задачу безнапорной фильтрации грунтовых вод. В приближении Буссинеска будем иметь одномерное нелинейное параболическое уравнение относительно уровня грунтовых вод  $H(\eta, t)$ :

$$m \frac{\partial H}{\partial t} = \frac{1}{\eta^n} \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \eta^n k H \frac{\partial H}{\partial \eta} \right) + \varepsilon(H, \eta, t), \quad (65)$$

где  $m$  – пористость (недостаток насыщения),  $t$  – время,  $k$  – коэффициент фильтрации,  $\varepsilon(H, \eta, t)$  – источники и стоки (перетекание в нижние пласты, инфильтрация или испарение с поверхности грунтовых вод). При  $n = 1$  уравнение (65) соответствует осесимметричному случаю в полярных координатах ( $\eta = r$ ), при  $n = 0$  – одномерному случаю в декартовой системе координат ( $\eta = x$ ), когда фильтрация рассматривается в вертикальной плоскости.

Будем рассматривать динамику грунтовых вод в декартовой системе координат, тогда  $H(x, t)$  будет описываться уравнением (65) с  $n = 0$ . При отсутствии перетекания в нижние пласты, а также инфильтрации и испарения  $\varepsilon(H, \eta, t) = 0$ . Если уровень воды в водоеме на входе в водоносный пласт имеет периодическое изменение во времени, тогда  $H(x, t)$  описывается уравнением (1) на полупрямой  $x > 0$  с периодическим граничным условием при  $x = 0$ :

$$H(0, t) = H_0 + H_1 \cos(\omega t), \quad (66)$$

где  $H_1$  – амплитуда колебания уровня грунтовых вод при  $x = 0$ ,  $\omega$  – частота колебаний,  $H_0$  – среднее значение уровня грунтовых вод.

Найдем величину пампинг-эффекта. Для этого вычислим значения инварианта  $\langle F(H(x, t)) \rangle$ , которые должны быть одинаковыми на границе  $x = 0$  и на бесконечности  $x = +\infty$ , где колебания затухают. Первообразной для функции  $K(H) = H$  будет функция  $F(H) = \frac{1}{2} H^2$ . На бесконечности имеем

$$\langle F(H^{(\infty)}) \rangle = \frac{1}{2} (H_0 + H^{(\pm)})^2. \quad (67)$$

Величина  $H^{(\pm)}$  и будет значением пампинг-эффекта. Значение инварианта при  $x = 0$  равно

$$\begin{aligned} \langle F(H(0, t)) \rangle &= \\ &= \frac{\omega}{4\pi} \int_0^{2\pi/\omega} (H_0 + H_1 \cos \omega t)^2 dt = \frac{1}{2} \left( H_0^2 + \frac{H_1^2}{2} \right). \end{aligned} \quad (68)$$

Приравнявая (67) и (68), получим

$$H^{(+)} = \left( H_0^2 + \frac{H_1^2}{2} \right)^{1/2} - H_0. \quad (69)$$

Из (69) видно, что величина пампинг-эффекта в задаче о безнапорной фильтрации всегда положительная. Если амплитуда колебаний  $H_1$  в (66) мала по сравнению с  $H_0$ , то выражение (69) можно упростить:

$$H^{(+)} \approx \frac{H_1^2}{4H_0}. \quad (70)$$

Итак, периодические колебания уровня грунтовых вод на входе в водоносный пласт около своего среднего положения  $H_0$  приводят за счет пампинг-эффекта к стационарному повышению уровня грунтовых вод на бесконечности на величину  $H^{(+)}$ . Формула (70) была получена ранее в [22].

Если длина водоносного пласта имеет конечную протяженность  $L$ , то, используя решение (19), получим величину пампинг-эффекта на конце пласта при условии  $H_1 \ll H_0$ :

$$\begin{aligned} H^{(+)}(L) &\approx -\frac{H_1^2}{4H_0} \left[ \frac{1}{\operatorname{ch}(\lambda L) \operatorname{ch}(\lambda^* L)} - 1 \right], \text{ где} \\ \lambda &= (1+i) \sqrt{\frac{\omega m}{2H_0 k}}. \end{aligned} \quad (71)$$

*Эффект падения температуры во льдах, ледниках и многолетней мерзлоте*

Сделаем некоторые оценки проявления пампинг-эффекта во льдах. Коэффициент температуропроводности для пресноводного льда является линейной функцией от температуры льда:

$$F(T) = k(T)/[C_p(T)\rho_{ice}], \quad (72)$$

где

$$k(T) = 5.35 \times 10^{-3} (1 - 4.8 \times 10^{-3} T) \text{ кал}/(\text{°C см с}),$$

$$C_p(T) = (0.5057 + 0.0018664T) \text{ кал}/(\text{г °C}).$$

Учитывая вид выражения (72), воспользуемся формулой (20). Пренебрегая зависимостью  $C_p$  от температуры, получим

$$T^{(-)} = \frac{\beta T_1^2}{4\alpha} = -1.2 \times 10^{-3} T_1^2. \quad (73)$$

Из (73) видно, что пампинг-эффект для колебательных процессов во льду (включая ледники, многолетнюю мерзлоту) является отрицательным. Это означает, что тепло будет откачиваться из нижних слоев ледового массива при увеличении амплитуды колебания температуры на его верхней границе. В зоне многолетней мерзлоты этот эффект может достигать существенных значений. К примеру, амплитуда внутригодовых колебаний температуры воздуха в Якутии достигает  $T_1 = 40^\circ\text{C}$ , в таком случае понижение температу-

ры в нижних слоях мерзлоты составит существенную величину:  $T^{(-)} = -1.9^{\circ}\text{C}$ .

### ВЫВОДЫ

Многие естественные природные процессы описываются нелинейными параболическими уравнениями типа нелинейного уравнения теплопроводности с коэффициентом теплопроводности, являющимся функцией от искомой характеристики среды. При наличии колебаний в такой системе, а они в природных процессах всегда есть, начинает проявляться пампинг-эффект, который, как было показано, приводит к формированию остаточных эффектов.

Приливные волны на мелководье приводят к повышению среднего уровня воды. В местах, где приливные волны затухают, например в устьях рек, этот эффект дает постоянное повышение уровня.

Морские воды проникают в устья рек в виде придонного клина соленых вод. В устьях рек, впадающих в приливы моря, пампинг-эффект может приводить к более глубокому проникновению соленых вод в устья рек по сравнению с тем, если бы этого прилива не было. Численные расчеты показали, что это увеличение дальности проникновения соленостного клина может достигать по сравнению с бесприливым морем нескольких километров.

Аналогичный эффект проявляется в процессе интрузии морских вод в подземные горизонты в приливых морях. Пампинг-эффект работает как насос, осуществляющий накачку воды в слой.

Приложение пампинг-эффекта к теплосодержанию глубинных вод морей, океанов и глубоководных озер показывает, что вариации амплитуды колебания ТПО приводят либо к закачке тепла в глубинные слои, либо, наоборот, к откачке тепла из глубинных слоев — в зависимости от того, уменьшается или увеличивается амплитуда вариаций ТПО. Оценки показывают, что пампинг-эффект играет роль важного нелинейного механизма перераспределения потоков тепла на Земле. Дополнительный поток тепла из глубинных слоев океана за счет пампинг-эффекта может составлять около  $0.18\text{--}0.25\text{ Вт/м}^2$ .

Пампинг-эффект влияет и на распределение температуры во льдах, ледниках, многолетней мерзлоте. Коэффициент теплопроводности пресного льда является линейной убывающей функцией от температуры. Пампинг-эффект для льда отрицателен, поэтому температура внутри ледового массива должна быть меньше среднего зна-

чения на поверхности льда. В зоне многолетней мерзлоты этот эффект может достигать существенных значений. К примеру, среднегодовая температура воздуха в Якутске составляет минус  $8.9\text{--}9.3^{\circ}\text{C}$ . Такая же должна быть температура мерзлых грунтов на глубине, где годовые колебания температуры исчезают. Как известно, на глубинах 10 м температура мерзлых грунтов ниже и составляет минус  $10\text{--}15^{\circ}\text{C}$ . По формуле (73) получим понижение температуры в данном регионе на глубине 10 м на минус  $1.9^{\circ}\text{C}$  от среднего значения минус  $8.9\text{--}9.3^{\circ}\text{C}$ , что составит величину порядка минус  $11^{\circ}\text{C}$ . Если учесть зависимость теплоемкости льда  $C_p$  от температуры, то понижение температуры мерзлых грунтов за счет пампинг-эффекта может достигать еще больших величин — до минус  $3\text{--}4^{\circ}\text{C}$ .

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баренблатт Г.И.* Подобие, автомодельность, промежуточная асимптотика. Л.: Гидрометеиздат, 1982. 254 с.
2. *Галеркин Л.И., Баращ М.Б., Сапожников В.В., Пастернак Ф.А.* Тихий океан. М.: Мысль, 1982. 318 с.
3. *Дийкстра Х.* Нелинейная физическая океанография. М.; Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2007. 680 с.
4. *Зельдович Я.Б., Райзер Ю.П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. М.: Наука, 1966. 688 с.
5. *Зырянов В.Н.* Гидродинамика соленостного клина // Вод. ресурсы. 1987. № 6. С. 107–125.
6. *Зырянов В.Н.* Топографические вихри в динамике морских течений. М.: ИВП РАН, 1995. 240 с.
7. *Зырянов В.Н., Музылев С.В.* Нелинейная накачка уровня приливами на мелководье // ДАН СССР. 1988. Т. 298. № 2. С. 454–458.
8. *Зырянов В.Н., Хубларян М.Г.* Пампинг-эффект в теории нелинейных процессов типа уравнения теплопроводности и его приложение в геофизике // ДАН. 2006. Т. 408. № 4. С. 535–538.
9. *Зырянов В.Н., Фролов А.П., Хубларян М.Г.* Некоторые нелинейные режимы фильтрации грунтовых вод // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 2009. № 5. С. 109–119.
10. *Лейбензон Л.С.* Подземная гидрогазодинамика. Собр. тр. М.: Изд-во АН СССР, 1953. 544 с.
11. *Монин А.С., Нейман В.Г., Филошкин Б.Н.* О стратификации плотности в океане // ДАН СССР. 1970. Т. 191. № 6. С. 1277–1279.
12. *Олвер Ф.* Асимптотика и специальные функции. М.: Наука, 1990. 528 с.
13. *Покровский О.М.* Температура поверхности океана как индикатор естественных колебаний климата в

- умеренных и высоких широтах Северного полушария // Исслед. Земли из космоса. 2005. № 6. С. 3–13.
14. *Полубаринова-Кочина П.Я.* Теория движения грунтовых вод. М.: Наука, 1977. 664 с.
  15. *Buckmaster J.* Viscous sheets advancing over dry beds // J. Fluid Mech. 1977. V. 81. P. 735–756.
  16. *Emery W.J., Lee W.G., Magaard L.* Geographic distribution of density, Brunt-Vaisala frequency and Rossby radii in the North Pacific and North Atlantic // J. Phys. Oceanogr. 1984. V. 14. P. 294–317.
  17. *Gargett A. E.* Vertical eddy diffusivity in the ocean interior // J. Mar. Res. 1984. 42(2). P. 359–393.
  18. *Larsen E.W., Pomraning G.C.* Asymptotic analysis of nonlinear Marshak waves // SIAM J. Appl. Math. 1980. V. 39. P. 201–212.
  19. *Le Blond P.H.* On tidal propagation in shallow rivers // J. Geophys. Res. 1978. V. 83. C9. P. 4717–4721.
  20. *Levitus S., Antonov J., Boyer T., Stephens C.* Warming of the World ocean // Science. 2000. V. 287. P. 2225–2229.
  21. *Muskat M.* The Flow of Homogeneous Fluids through Porous Media. N. Y.: McGraw-Hill, 1937.
  22. *Philip J.R.* Periodic nonlinear diffusion: an integral relation and its physical consequences // Australian J. Phys. 1973. V. 26. P. 513–519.
  23. *Reid G. C.* Solar total irradiance variations and the global sea surface temperature record // J. Geophys. Res. – Atmos. 1991. V. 96. D2. P. 2835–2844.
  24. *Stigebrandt A.* A model for the vertical circulation of the Baltic deep water // J. Phys. Oceanogr. 1987. V. 17. P. 1772–1785.