

ПРИМЕНЕНИЕ СОВРЕМЕННЫХ МЕТОДОВ СТАТИСТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ ДЛЯ ОПИСАНИЯ ФЛУКТУАЦИЙ ВЛАГОЗАПАСА ПОЧВЫ

© 2013 г. П. Ф. Демченко, Л. Д. Краснокутская

Институт физики атмосферы им. А.М. Обухова РАН

119017 Москва, Пыжевский пер., д. 3

E-mail: pasha@ifaran.ru

Поступила в редакцию 10.08.2011 г.

Рассмотрены вопросы применения методов современной теории броуновского движения к расчету флуктуаций влагозапаса почвы. Для нелинейной гидрологической модели формирования влагозапаса на основе уравнения Ланжевена и обобщенных соотношений Ланжевена получены аналитические зависимости времени корреляции флуктуаций влагозапаса почвы и средней величины влагозапаса от параметров внешних стохастических и детерминированных воздействий. Исследовано изменение низкочастотной части спектра быстрых синоптических переменных (разности между осадками и испарением) вследствие взаимодействия с флуктуациями влагозапаса. Дано объяснение нового эффекта увеличения спектра в промежуточной области временных интервалов, расположенных между характерными временами — временем изменений синоптических флуктуаций и временем изменений флуктуаций влагозапаса почвы. На примере задачи определения нестационарного отклика средней величины влагозапаса почвы на флуктуации режима увлажнения показаны возможности нового аппарата статистической физики — флуктуационных теорем.

Ключевые слова: влагозапас почвы, уравнение Ланжевена, флуктуации, корреляционные функции, спектр

DOI: 10.7868/S0321059613020028

Динамико-стохастические модели применяются для решения ряда гидрологических задач, таких как моделирование режима колебаний речного стока, уровня проточных и бессточных водоемов, влагозапаса почвы и т.д. [7, 9, 12, 14–16]. В основе таких моделей лежат стохастические дифференциальные (разностные) уравнения со случайными возмущениями (силами) и/или коэффициентами. Если эти возмущения на временах изменения рассматриваемых переменных можно считать некоррелированными по времени, то для них принимается приближение дельта-коррелированного случайного процесса — белого шума [13].

Коэффициенты стохастических дифференциальных (разностных) уравнений обычно определяются в результате соответствующей обработки эмпирических данных наблюдений за процессами, включенными в модели. При этом нет гарантии, что значения этих коэффициентов будут сохраняться при возможных изменениях климата. Действительно, целый ряд эмпирических методов, успешно применявшихся в практике гидрометеорологических прогнозов в 1960–1970-х гг., стал давать неверные результаты в 1980-х гг. пред-

положительно ввиду глобального потепления [10]. Это вынуждает уделить более пристальное внимание возможным процедурам вывода стохастических дифференциальных уравнений для описания компонент гидрологического цикла и, в частности, использовать современные методы неравновесной статистической механики.

С точки зрения статистической механики стохастические дифференциальные уравнения с дельта-коррелированными по времени случайными силами представляют собой уравнения Ланжевена [4] для случайной эволюции набора медленных переменных Y (здесь и далее полужирными буквами без курсива обозначаются векторы, матрицы или операторы), взаимодействующих с более быстрыми X . При этом характерные времена τ_X и τ_Y для каждой из подсистем переменных — быстрых и медленных — существенно разнесены ($\tau_X \ll \tau_Y$). Тогда применяется процедура огрубленного описания только медленных переменных, на характерных временах эволюции медленных переменных быстрые задаются только их

статистикой, заданной при фиксированных в каждый момент времени t значениях $\mathbf{Y}(t)$.

Если совместная система, описывающая изменение медленных $Y_i(t)$ и быстрых переменных $X_\alpha(t)$, состоит из следующих уравнений:

$$\frac{dY_i(t)}{dt} = U_i(\mathbf{X}(t), \mathbf{Y}(t)), \quad i = 1, \dots, N_Y, \quad (1a)$$

$$\frac{dX_\alpha(t)}{dt} = u_\alpha(\mathbf{X}(t), \mathbf{Y}(t)), \quad \alpha = 1, \dots, N_X, \quad (1b)$$

то в сжатом описании для любой функции переменных системы выделяются медленная, адаптированная в среднем к текущему состоянию $\mathbf{Y}(t)$ часть и отклонение от нее $F(\mathbf{X}(t), \mathbf{Y}(t)) = \langle F|\mathbf{Y}(t) \rangle + (F - \langle F|\mathbf{Y}(t) \rangle) = \langle F|\mathbf{Y}(t) \rangle + \delta F(\mathbf{X}(t), \mathbf{Y}(t))$ (угловые скобки здесь и далее означают операцию статистического осреднения по ансамблю реализаций). При этом термин “адаптированная в среднем” подразумевает процедуру осреднения только по быстрым переменным с заданной плотностью вероятности решения (1b) при фиксированном $\mathbf{Y} = \mathbf{Y}(t)$, $\langle F|\mathbf{Y} \rangle = \int_{\mathbf{X}} F(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \rho_S(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) d\mathbf{X}$. Остаток $\delta F(\mathbf{X}(t), \mathbf{Y}(t))$ считается быстрофлуктуирующим случайным процессом. Для инерционных природных процессов применять такую процедуру к правым частям уравнений (1a) впервые предложил К. Хассельманн [24], трактуя $\delta U(t)$ как дельта-коррелированную по времени случайную силу. Это позволяет рассматривать уравнения (1a) как уравнения Ланжевена, математический аппарат для которых хорошо развит [4]. По К. Хассельману, медленные переменные называются климатическими, более быстрые – погодными.

В качестве такой климатической переменной в данной статье рассматривается влагозапас почвы W – количество влаги в столбе деятельного слоя почвы единичного сечения. Влагозапас – важный гидрологический компонент, существенно влияющий на формирование речного стока подземных запасов воды на водосборе. Характерное время релаксации влагозапаса (τ_E в формуле (10)) составляет несколько месяцев [12, 31], что существенно превышает характерное время синоптических флуктуаций гидрометеорологических процессов, формирующих влагозапас, равное нескольким суткам. Это обстоятельство дает основание для применения процедуры адаптации в среднем.

При моделировании изменения влагозапаса учитывалось, что уравнение, описывающее эти изменения, содержит нелинейность, обусловленную наличием или отсутствием поверхностного стока – в зависимости от режима увлажнения.

Вариации влагозапаса могут существенно влиять на атмосферные переменные, такие как при-

земные температура и влажность [18–21]. Ввиду того что последние, в свою очередь, влияют на вариации влагозапаса, в системе могут проявляться коллективные эффекты, приводящие к изменению спектров атмосферных переменных.

УРАВНЕНИЯ ЛАНЖЕВЕНА ДЛЯ ВЛАГОЗАПАСА ПОЧВЫ: ВЫВОД МЕТОДОМ ПРОЕКЦИОННЫХ ОПЕРАТОРОВ

Один из современных методов получения уравнения Ланжевена для медленных переменных из исходной системы (1) базируется на методе проекционных операторов Х. Мори [27, 28]. В этом методе любая функция от решения задачи Коши для системы (1a)–(1b) записывается как функция от начальных значений переменных с помощью оператора эволюции \mathbf{M} :

$$F(t) = F(\mathbf{X}(t), \mathbf{Y}(t)) = e^{t\mathbf{M}} F(0), \quad (2)$$

$$\mathbf{M} = u_\alpha \frac{\partial}{\partial X_\alpha} + U_i \frac{\partial}{\partial Y_i}.$$

В (2) после применения оператора $\exp(t\mathbf{M})$ к $F(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ следует положить $(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = (\mathbf{X}(0), \mathbf{Y}(0))$, а операторную экспоненту рассчитывать путем формального разложения в ряд Тейлора.

В пространстве начальных состояний вводится проекционный оператор Мори \mathbf{P} :

$$\mathbf{P}F = \iint d\mathbf{Y} d\mathbf{X} F(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \delta(\mathbf{Y} - \mathbf{Y}(0)) \rho_S(\mathbf{X}|\mathbf{Y}) = \langle F|\mathbf{Y}(0) \rangle, \quad \mathbf{P}^2 = \mathbf{P}. \quad (3)$$

Запись (3) в развернутом виде подчеркивает то, что операция (3) может быть определена для любого момента времени, так что

$$e^{t\mathbf{M}} \mathbf{P}F(0) = e^{t\mathbf{M}} \langle F|\mathbf{Y}(0) \rangle = \langle F|\mathbf{Y}(t) \rangle. \quad (4)$$

При этом $\mathbf{Y}(t)$ является точным решением исходной системы (1). К оператору \mathbf{P} вводится дополнительный проекционный оператор $\mathbf{Q} = \mathbf{I} - \mathbf{P}$ (\mathbf{I} – единичный, тождественный оператор). \mathbf{Q} проецирует движение системы на дополнительное подпространство ($\mathbf{P}\mathbf{Q} = 0$) отклонений от квази-средних значений переменных.

Далее применим к правой части (1a) $U_i(0) = \langle U_i|\mathbf{Y}(0) \rangle + \delta U_i(\mathbf{X}(0), \mathbf{Y}(0))$ операторное тождество Мори: $\exp(t(\mathbf{A} + \mathbf{B})) = \exp(t\mathbf{A}) + \int_0^t d\tau \exp[(t - \tau)(\mathbf{A} + \mathbf{B})] \mathbf{B} \exp(\tau\mathbf{A})$, положив $\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{M}$, $\mathbf{B} = \mathbf{P}\mathbf{M}$. С уче-

том (4) окончательно получим так называемое обобщенное уравнение Ланжевена [27, 28]:

$$\frac{d\mathbf{Y}(t)}{dt} = \langle \mathbf{U} | \mathbf{Y}(t) \rangle + \int_0^t d\tau e^{(t-\tau)\mathbf{M}} \mathbf{P} \mathbf{M} e^{\tau \mathbf{Q} \mathbf{M}} \delta \mathbf{U}(0) + e^{t \mathbf{Q} \mathbf{M}} \delta \mathbf{U}(0). \quad (5)$$

Разбиение правой части (1а), полученное тождественными преобразованиями, есть его переписать в виде, удобном для применения аппроксимаций исходя из априорных знаний или предположений о поведении решений исходной системы (1а), (1б). Первое слагаемое – адаптированное к $\mathbf{Y}(t)$ квазистационарное (при фиксированном $\mathbf{Y}(t)$) условное среднее значение скорости изменения медленных переменных.

Второе слагаемое в (5) – интеграл памяти – описывает вклад конечности времени запаздывания среднестатистической реакции быстрых переменных на изменения медленных, оно зависит от t и значений $\mathbf{Y}(\tau \leq t)$, зависимость от $\mathbf{X}(0)$ в нем исчезает. Интеграл памяти имеет порядок τ_X/τ_Y . При замене в интеграле памяти верхнего предела интегрирования на $t = +\infty$ уравнение (5) переходит в уравнение Ланжевена, формально не содержащее запаздывание [28]:

$$\frac{d\mathbf{Y}(t)}{dt} = \langle \mathbf{U}_e | \mathbf{Y}(t) \rangle + f_Y(t), \quad (6a)$$

$$f_Y(t) = e^{t \mathbf{Q} \mathbf{M}} \delta \mathbf{U}(0), \quad \langle f_Y(t) | \mathbf{Y}(0) \rangle = 0,$$

$$\langle \mathbf{U}_e | \mathbf{Y}(t) \rangle = \langle \mathbf{U} | \mathbf{Y}(t) \rangle + \int_0^\infty d\tau \langle \mathbf{M} f_Y(\tau) | \mathbf{Y}(t) \rangle. \quad (6b)$$

Последнее слагаемое – случайная сила, среднее от которой при любой функции распределения вероятностей начальных значений вида $\rho(0) = \rho_Y(\mathbf{Y}(0))\rho_S(\mathbf{X}(0)|\mathbf{Y}(0))$ равно нулю (ρ_S – стационарная плотность распределения быстрых переменных при фиксированных значениях медленных, ρ_Y – плотность распределения медленных переменных). Это следует из равенства $\text{Re} \exp(t \mathbf{Q} \mathbf{M}) \mathbf{Q} = 0$.

Рассмотрим теперь флуктуации влагозапаса почвы W для теплого периода (в отсутствие снега и льда) при наличии стохастических короткопериодных возмущений потоков влаги между почвой и атмосферой. За основу примем упрощенную интегральную нульмерную модель баланса влаги в деятельном слое почвы [3, 4, 7, 9]:

$$\frac{dW(t)}{dt} = -E(t) + P(t) - R(t), \quad (7)$$

где E – испарение, P – осадки, R – поверхностный сток, t – время. Все величины, включая влагозапас (количество влаги, измеряемое высотой эквивалентного слоя воды), относятся к столбу деятельного слоя почвы единичного сечения.

Поскольку время изменений влагозапаса почвы τ_W существенно превышает время жизни индивидуальных погодных возмущений τ_a , то используя (6а) и (6б) и пренебрегая обратной связью влагозапас–осадки, перепишем уравнение (7) в виде стохастического дифференциального уравнения:

$$\frac{dW(t)}{dt} = -\langle E | W(t) \rangle + \langle P | W(t) \rangle - R(t) + \Delta P(t) - \Delta E(t), \quad (8)$$

где $\Delta P(t)$ и $\Delta E(t)$ – отклонения текущих значений от квазисредних, задаваемых формулой (4).

В (8) отдельно выделены короткопериодные флуктуации притоков тепла к деятельному слою из-за синоптической изменчивости осадков и испарения: $\Delta F_W(t) = \Delta P(t) - \Delta E(t)$. Для $\Delta F_W(t)$ принимается приближение дельта-коррелированного случайного процесса с нулевым средним и корреляционной функцией

$$K_F(t, t_1) = \langle \Delta F_W(t) \Delta F_W(t_1) \rangle = 2D_W \delta(t - t_1). \quad (9)$$

Для адаптированной в среднем к текущему состоянию W величины испарения примем параметризацию М.И. Будыко [2]: $\langle E | W \rangle = E_0 \frac{W}{W_0}$ при $W \leq W_0$ и $\langle E | W \rangle = E_0$ при $W > W_0$. Здесь E_0 – потенциальное испарение, W_0 – насыщающее по испарению значение влагозапаса почвы. Адаптированную часть осадков на данном этапе будем считать независимой от текущего значения влагозапаса и полагать равным среднему статистическому для данного региона $\langle P \rangle$. В последующих разделах отойдем от этого предположения при описании совместной эволюции гидрологического режима атмосферы и почвы.

При такой аппроксимации уравнение Ланжевена (8) для W можно привести к виду:

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{1}{\tau_E} (W - W_E) - R + \Delta F_W(t), \quad (10)$$

$$\tau_E = \frac{W_0}{E_0}, \quad W_E = W_0 \frac{\langle P \rangle}{E_0}.$$

Для поверхностного стока принимается “модель ведра” [7, 18–20]. В этой модели сток отсутствует, если влагозапас почвы меньше некоторого критического по стоку значения: $\frac{dW}{dt} = P - E (W < W_C)$. По достижении этого значения избыток притока вла-

ги к столбу почвы уходит в поверхностный сток при неизменном значении влагозапаса почвы: $\frac{dW}{dt} = 0$, $R = P - E$ ($W = W_C$, $P > E$). Эта модель – предельный случай модели с конечным временем релаксации влагозапаса почвы к критическому значению W_C за счет стока $R = \lambda_R H(W - W_C)$ при $\lambda_R \rightarrow \infty$ ($H(x)$ – функция Хэвисайда, равная нулю при отрицательных значениях аргумента и единице – при других).

Уравнение (10) для параметризации стока с конечным λ_R можно переписать, введя потенциал $U(W)$ [7] и полагая для простоты $W_C = W_0$:

$$\frac{dW}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial W} + \Delta F_W(t),$$

$$U(W) = \frac{1}{2\tau_E}(W - W_E)^2 + \lambda_R \int_{W_0}^W H(W' - W) dW'. \quad (11)$$

Потенциал U введен для удобства представления стационарной плотности распределения $\rho_{WS}(W) = C \exp\left[-\frac{U}{D_W}\right]$ для решения уравнения Фоккера–Планка (12), где при его вычислении можно положить $U(W) = \frac{1}{2\tau_E}(W - W_E)^2 + \lambda_R(W - W_0)H(W - W_0)$.

В заключение этого раздела сделаем некоторые оценки. В отсутствие стока уравнение (10) линейно. Дисперсия отклонений $\Delta W(t) = W(t) - W_E(t)$ от среднего стационарного W_E равна $\sigma_W^2 = D_W \tau_E = \sigma_f^2 \tau_f \tau_E$, где σ_f^2 и τ_f – дисперсия и время корреляции случайных притоков влаги соответственно. Если в качестве последних выбрать синоптические флуктуации осадков, для плотности распределения вероятностей которых принять экспоненциальное распределение $\rho_P(P) = \langle P \rangle^{-1} \exp(-P/\langle P \rangle)$ [30], то $\sigma_W = \langle P \rangle (\tau_P \tau_E)^{1/2}$. Если $\tau_f \approx 1.5$ сут, $\tau_E \approx 3$ мес. и $\langle P \rangle$ составляет 2–3 мм/сут [12, 18], то получим $\sigma_W \approx 3$ см, что хорошо согласуется с данными наблюдений [12].

**УРАВНЕНИЕ ФОККЕРА–ПЛАНКА:
ОПРЕДЕЛЕНИЕ СРЕДНЕГО
ПОВЕРХНОСТНОГО СТОКА
ДЛЯ ДИНАМИКО-СТОХАСТИЧЕСКОЙ
МОДЕЛИ**

Для плотности вероятности $\rho_W(W, t)$, соответствующей стохастическому дифференциальному уравнению (11), можно написать кинетическое уравнение. В пренебрежении воздействия

кумулянтов случайных сил выше второго (гаусово приближение) это будет уравнения Фоккера–Планка [13]:

$$\frac{\partial \rho_W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial W} \left(\rho_W \frac{\partial U}{\partial W} \right) + \frac{\partial^2}{\partial W^2} (D_W \rho_W). \quad (12)$$

Далее будем рассматривать случай постоянной интенсивности случайных воздействий. Если не рассматривать режимы с пустынным климатом, то в пределе $\lambda_R \rightarrow \infty$ (мгновенный сброс избытка влаги через сток) стационарное решение (12) задается формулой, формально определенной в области $(-\infty, W_0]$ [7, 9]:

$$\rho_{WS}(W) = C \exp\left[-\frac{(W - W_E)^2}{2D_E}\right], \quad D_E = D_W \tau_E,$$

$$C^{-1} = \int_{-\infty}^{W_E} \exp\left[-\frac{1}{2D_E}(W - W_E)^2\right] dW. \quad (13)$$

В (13) W_E , $D_E = D_W \tau_E$ и τ_E – соответствующие среднее, дисперсия и время релаксации флуктуаций влагозапаса почвы в стационарном состоянии в отсутствие стока.

Для среднего $\langle W \rangle = W_S$ и дисперсии $\langle (\Delta W)^2 \rangle = \sigma_{WS}^2$ стационарного в среднем состояния справедливы формулы [7, 10]

$$W_S = W_E - \left(\frac{D_E}{2}\right)^{1/2} \frac{1}{F_R(\Pi_R)},$$

$$\sigma_{WS}^2 = D_E \tau_E \left(1 + \frac{\Pi_R}{F_R(\Pi_R)} - \frac{1}{2F_R^2(\Pi_R)}\right), \quad (14)$$

где $F_R(\Pi_R) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{\Pi_R^2} \operatorname{erfc}(\Pi_R)$, $\operatorname{erfc}(x) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \times \int_0^x dz \exp(-z^2)$, а $\operatorname{erfc}(x)$ – дополнительный интеграл вероятностей [1].

Важный безразмерный параметр теории

$$\Pi_R = \left(\frac{\langle P \rangle}{E_0} - 1\right) \left(\frac{W_0 E_0}{2D_W}\right)^{1/2} = (W_E - W_0)(2D_E)^{-1/2} \quad (15)$$

меняет знак при переходе от режима с недостаточным увлажнением $\left(\frac{\langle P \rangle}{E_0} < 1\right)$ к режиму с избыточным увлажнением $\left(\frac{\langle P \rangle}{E_0} > 1\right)$. Плавность этого перехода для средних характеристик флуктуаций влагозапаса почвы, согласно (14), определяется интенсивностью флуктуаций. Например, эта интенсивность может определять и гладкость зависимости поверхностного стока от осадков [9].

Подставляя в осредненное соотношение баланса (7)

$$\langle R \rangle = \langle P \rangle - E_0 \frac{\langle W \rangle}{W_0}$$

и определяя $\langle W \rangle = W_S$ из (14), в рассматриваемой простой динамико-стохастической модели получим для поверхностного стока:

$$\frac{\langle R \rangle}{E_0} = \left(\frac{D_W}{2E_W W_W} \right)^{1/2} \frac{1}{F_R (\Pi_R)}. \quad (16)$$

Как следует из (16) и определения Π_R , величина среднего стока не изменяется при пропорциональном изменении интенсивности случайных синоптических флуктуаций источников D_W и величины критического влагозапаса почвы W_0 .

При больших положительных Π_R (асимптотика $\operatorname{erfc}(x \gg 1)$ [1]) и достаточно высоком превышении осадков над испаряемостью $F_R \approx (2\Pi_R)^{-1}$ и уравнение (16) переходит в асимптотику: $\langle R \rangle = \langle P \rangle - E_0$. В противоположном случае при малых осадках сток стремится к нулю. В области перехода между режимами недостаточного и избыточного увлажнения синоптические флуктуации способствуют плавному переходу, который можно назвать статистическим сглаживанием, в отличие от интерполяционной формулы для среднего поверхностного стока М.И. Будыко [4].

В формуле М.И. Будыко в режиме недостаточного увлажнения дополнительно учитывается возможность образования поверхностного стока за счет ливневых осадков $R_l = \mu P \approx 0.2P$. Для стохастической модели (10), как показано в [9], это приводит к замене параметров в исходном уравнении Ланжевена на

$$E_0^{(m)} = E_0 + \mu \langle P \rangle, \\ D_W^{(m)} = D_W \left(1 - \mu \frac{\langle W \rangle}{W_0} \right)^2, \quad W_E^{(m)} = W_E^{(m)} \frac{E_0}{E_0^{(m)}},$$

где верхний индекс (m) обозначает соответствующую модифицированную величину, μ — числовой параметр.

При характерных для суши в средних широтах значениях параметров гидрологической модели (потенциального испарения, полевой влагоемкости и времени корреляции осадков) стохастическая модель хорошо воспроизводит найденную М.И. Будыко интерполяционную зависимость поверхностного стока от осадков [9]. Следует отметить, что стохастическая версия содержит в себе дополнительную информацию о связи первых и вторых моментов флуктуаций компонент гид-

рологического баланса. Анализ зависимостей такого рода полезен при моделировании процессов подсеточного масштаба в моделях общей циркуляции и климатических моделях промежуточной сложности.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ РАСЧЕТА ВРЕМЕНИ КОРРЕЛЯЦИЙ ФЛУКТУАЦИЙ ВЛАГОЗАПАСА ПОЧВЫ

Обработка данных наблюдений за флуктуациями влагозапаса почвы на территории бывшего СССР [31] показала, что временную корреляционную функцию этих флуктуаций для теплого периода можно с большой степенью точности аппроксимировать экспоненциальной зависимостью $\langle \Delta W(t + \tau) \Delta W(t) \rangle = K_{WS}(\tau) = \sigma_{WS}^2 \exp(-\tau/\tau_W)$. Нижний индекс S , как и ранее, указывает на характеристики стационарных в среднем флуктуаций. Аналогичный результат показали и численные эксперименты с моделью общей циркуляции GFDL Принстонского университета [18–20]. Согласно уравнению (10), так и должно быть в отсутствие стока, причем $\tau_W \approx \tau_E$. Эта теоретическая оценка в основном была подтверждена обработкой данных наблюдений [31].

Проведенное в [18] численное моделирование флуктуаций W по уравнению (10) методом Монте-Карло выявило немонотонную зависимость рассчитанных значений τ_W от E_0 . При достаточном удалении от режима с насыщенной влагой почвой согласно (10) $\tau_W \sim 1/E_0$, возрастая с уменьшением E_0 . Однако по мере приближения к режиму избыточного увлажнения τ_W проходит через максимум и с дальнейшим уменьшением E_0 начинает убывать. Это происходит из-за того, что в этой области эффективная релаксация аномалий влагозапаса все в большей степени происходит не за счет испарения, а за счет сброса избыточной влаги в сток.

Для того чтобы описать этот эффект аналитически, используем нелинейную модель (11). Для корреляционной функции решения (10) справедливо уравнение [7, 10]:

$$\frac{dK_{WS}(\tau > 0)}{d\tau} = -\langle U'(t + \tau) \Delta W(t) \rangle, \quad U' = \frac{\partial U}{\partial W}.$$

В силу нелинейности (11) это уравнение не будет замкнутым, поскольку в правую часть будут входить моменты более высокого порядка и для их определения возникает бесконечная цепочка уравнений.

Однако численные эксперименты [18] и обработка данных наблюдений [31] указывают на то,

что корреляционная функция спадает экспоненциально, тогда даже в нелинейном случае возможно применение приближенных аналитических методов. К таким методам относится и метод квазиравновесного приближения [17], основная идея которого заключается в том, что одновременная и двухвременная плотности распределения вероятности решений (11) заменяются функциями заданного вида, параметры которых определяются из условия совпадения средних и корреляционных функций для точных и квазиравновесных функций распределения. Для стационарных в среднем флуктуаций в квазиравновесном приближении справедливо уравнение [17]:

$$\frac{dK_{WS}(\tau > 0)}{d\tau} = -\frac{\langle U'(t)\Delta W(t) \rangle_S}{\sigma_{WS}^2} K_{WS}(\tau). \quad (17)$$

Таким образом, в квазиравновесном приближении $\tau_W = \sigma_{WS}^2 \langle U'(W)W \rangle_S^{-1}$. Для любой стохастической модели типа (11), в которой ставится граничное условие $\rho_{WS}(\pm\infty) = 0$, в квазиравновесном приближении выполняется соотношение [7]:

$$\tau_W = \frac{\sigma_{WS}^2}{D_W}. \quad (18)$$

Это соотношение в виде $\sigma_{WS}^2 = D_W \tau_W$ для линейной модели известно. Для нелинейной одномерной системы в нем можно убедиться, выполняя при осреднении в (17) интегрирование по частям и учитывая свойство $\rho_{SW}(W) = S \exp(-U/D_W)$ стремиться к нулю на концах бесконечного интервала. Осуществляя в (18) переход $\lambda_R \rightarrow \infty$, определим τ_W через σ_{WS}^2 с помощью (14).

Для проверки применимости квазиравновесного приближения для описания зависимости τ_W от внешних параметров проведено сравнение расчета τ_W по конечно-разностной аппроксимации модели (10) с параметризацией стока по “модели ведра” с результатом применения формул (14), (18). В качестве случайных источников были выбраны синоптические флуктуации осадков, некоррелированные на временах порядка $\Delta t = 1-2$ сут; такой интервал примем в качестве единицы времени (условные сутки). Далее зададим эти флуктуации датчиком независимых случайных чисел, распределенных по экспоненциальному закону. На рис. 1 приведены результаты расчета зависимости τ_W от E_0 при фиксированных значениях средних осадков и критического влагозапаса. Величины E и $\langle P \rangle$ нормируем на некоторое характерное значение E_{00} и введем $\tau_0 = W_0/E_{00}$, помня, что τ_0 измеряется в условных сутках — близкому к реальным суткам интервалу времени, на котором

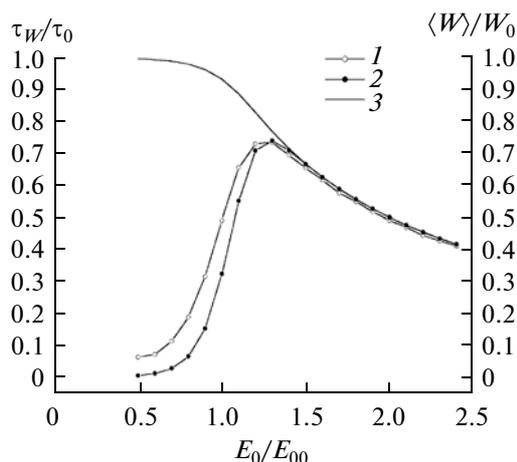


Рис. 1. Зависимость безразмерного времени корреляции τ_W/τ_0 от E_0/E_{00} при $\langle P \rangle = E_{00}$. 1 — расчет по конечно-разностной модели, флуктуации осадков распределены по экспоненциальному закону; 2 — расчет по квазиравновесному приближению; 3 — рассчитанная величина среднего влагозапаса (шкала справа), нормированного на критический.

флуктуации осадков можно считать некоррелированными. При определении соотношений между безразмерными $\langle R \rangle/E_{00}$, $\langle P \rangle/E_{00}$, $\langle E \rangle/E_{00}$ и τ_W/τ_0 , не нарушая общности, можно полагать $E_{00} = 1$ и $W_0 = \tau_0$. Выберем значения $\tau_0 = 60$, что соответствует $\tau_E = 2-4$ мес., величина $\langle P \rangle$ принималась равной E_{00} .

Из рис. 1 видно, что смена знака производной зависимости времени корреляции от величины потенциального испарения происходит уже при $E_0 \approx 1.25 \langle P \rangle$ ($\langle P \rangle = E_{00}$). При этих значениях, согласно рис. 1 (кривая 3), средний влагозапас почвы составляет 0.7 от критического. При $E_0 = \langle P \rangle$ это отношение равно 0.8, а рассчитанная по стохастической модели величина τ_W составляет около половины от ее оценки по величине τ_E для линейной модели в отсутствие стока. Сравнение с эмпирическими данными о соотношении величин среднего и критического влагозапаса [31] для территории бывшего СССР показывает, что области с $\langle W \rangle > W_0$ покрывают значительную часть высоких и умеренных широт.

Данные рис. 1 показывают, что квазиравновесное приближение (18) качественно хорошо воспроизводит зависимость времени корреляции флуктуаций влагозапаса от внешних условий даже в случае, когда распределение синоптических флуктуаций притоков влаги далеко от гауссовского.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО
ОТКЛИКА ВЛАГОЗАПАСА ПОЧВЫ
НА ВНЕШНИЕ ВОЗДЕЙСТВИЯ
С ПОМОЩЬЮ НЕЛИНЕЙНЫХ
ФЛУКТУАЦИОННО-ДИССИПАТИВНЫХ
СООТНОШЕНИЙ

Формулы (14) дают возможность определить для рассматриваемой упрощенной модели средний стационарный отклик W (не обязательно линейный) на заданное постоянное возмущение внешних факторов (например, средних осадков или потенциального испарения). Однако в реальности внешние условия могут изменяться (например, в годовом ходе). Если эти изменения происходят плавно, то возможно допущение о квазистационарном отклике. Однако в случае быстрых изменений для нелинейной системы при наличии шумов возможны большие отклонения среднего отклика от квазистационарного. Учитывая, что за время действия внешнего возмущения в (10) может происходить смена режима увлажнения, определение нестационарного отклика $\langle W(t) \rangle$ на изменение внешних условий представляет собой нетривиальную задачу.

Далее будем рассматривать средние отклонения набора текущих значений переменных $\mathbf{X}(t)$ от их равновесных квазистационарных средних $\langle \mathbf{X}(t) \rangle_S = \mathbf{X}_S$: $\Delta_S \mathbf{X}(t) = \mathbf{X}(t) - \mathbf{X}_S(t)$ при заданном изменении внешнего управляющего параметра $\lambda(t)$. При этом равновесные средние определяются по стационарной функции распределения вероятностей $\rho_S(\mathbf{X}, \lambda(t))$, определяемой по кинетическому уравнению (например, по (11) – для влагозапаса почвы) при условии, что $\lambda(t)$ (например, средние осадки) сохраняют свое текущее значение в дальнейшем бесконечно долго.

Для определения связи между характеристиками неравновесного, нестационарного состояния системы и ее равновесными характеристиками при текущих значениях внешних заданных возмущений в последние годы получило развитие новое направление статистической физики – стохастическая термодинамика [22, 23, 29]. Ядро теории – так называемые флуктуационные теоремы (ФТ), или флуктуационные соотношения. Одно из таких соотношений, которое понадобится в дальнейшем, устанавливает связь между $\rho_S(\mathbf{X}, \lambda(t))$ и некоторым функционалом от траектории случайного процесса в предыдущие моменты времени независимо от временного поведения внешнего управляющего параметра $\lambda(t)$.

Вводится обобщенный потенциал $\varphi(\mathbf{X}, \lambda(t)) = -\ln \rho_S(\mathbf{X}, \lambda(t))$. В случае интегральной модели (10), (11) $\varphi(\mathbf{X}, \lambda(t)) = U/D_W$ (при $D_W = \text{const}$). Для

каждой возможной траектории процесса вводится функционал (аналог механической работы):

$w(t) = \int_0^t \lambda'_\tau(\tau) \varphi'_\lambda(\mathbf{X}(\tau), \lambda(\tau)) d\tau$, где штрихи обозначают взятие производной по переменной, обозначенной нижним индексом.

При осреднении по всем возможным траекториям $\mathbf{X}(\tau < t)$ справедливо [22]:

$$g(\mathbf{X}, t) = \langle \delta(\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}) \exp\{-w(t)\} \rangle \equiv \exp[-\varphi(\mathbf{X}, \lambda(t))] = \rho_S(\mathbf{X}, \lambda(t)). \quad (19)$$

В (19) $\delta(\mathbf{X})$ – дельта-функция Дирака, отсутствие аргумента у переменной означает, что, в отличие от текущего значения на траектории, речь идет о заранее заданном значении вектора. В отличие от плотности вероятности $\rho(\mathbf{X}, t) = \langle \delta(\mathbf{X}(t) - \mathbf{X}) \rangle$, функцию $g(\mathbf{X}, t)$ называют взвешенной плотностью вероятностей [22]. Соотношение (19) доказано для нестационарных марковских процессов, к каковым принадлежит и решение (10), (11), а также для гамильтоновских систем [22]. Оно справедливо для случая, когда в начальный момент времени система находилась в стационарном состоянии.

Функционалы вида (19) можно преобразовать, следуя методам, развитым в [13] для нахождения характеристического функционала случайных процессов. В результате для влагозапаса почвы, например, можно получить:

$$\langle W(t) \rangle - W_S(\lambda(t)) = \int_0^t dt_1 \lambda'_t(t_1) K_{W,S}(t, t_1), \quad (20)$$

где коррелятор $K_{W,S}(t, t_1)$ – стандартный фрагмент теории линейного отклика [10, 26]:

$$K_{W,S}(t, t_1) = \left\langle W(t) \varphi'_\lambda(t_1) \right\rangle_S = - \left\langle F(t) \frac{\partial \ln \rho_{WS}(W(t_1), \lambda(t_1))}{\partial \lambda(t_1)} \right\rangle_S. \quad (21)$$

Здесь и далее нижний индекс S у двухвременных корреляционных функций означает, что они вычисляются при условии, что при $t_1 < t$ система находилась в стационарном состоянии при $\lambda = \lambda(t_1)$.

Флуктуационно-диссипативное соотношение (ФДС) (20) отличается от принятых в [5, 11, 25, 29] тем, что, во-первых, рассматриваются отклонения не от начального, а от текущего квазистационарного среднего и, во-вторых, под интегралом перед функцией стоит не внешнее воздействие, а его производная по времени. Но, самое главное, вывод (20) не предполагает малости внешнего воздействия. Таким образом, (20) и (21) – нелинейные ФДС.

Далее ограничимся случаем постоянной интенсивности случайных сил, а в качестве управляющего параметра $\lambda(t)$ выберем $W_E = \langle P \rangle / E_0$. Можно показать, что из (14) и (15) следует

$$\frac{\partial \ln \rho_S}{\partial W_E} = -\frac{\partial \phi}{\partial W_S} = \frac{1}{D_S} (W - W_S) = \frac{\Delta_S W}{D_E}. \quad (22)$$

Для статистически нестационарного случая квазиравновесное приближение (17), (18) трансформируется [17]:

$$\frac{d \langle \Delta W(t) \Delta W(t_1) \rangle}{dt} = -\frac{1}{\tau_w(t)} \langle \Delta W(t) \Delta W(t_1) \rangle. \quad (23)$$

Далее, продифференцировав (20) по времени, с учетом (21)–(23) получим линейное дифференциальное уравнение для $\langle \Delta_S W(t) \rangle$:

$$\frac{d \langle \Delta_S W(t) \rangle}{dt} = -\frac{1}{\tau_w(t)} \langle \Delta_S W(t) \rangle - \frac{dW_E(t)}{dt} \frac{\sigma_{WS}^2(t)}{D_E},$$

решение которого:

$$\langle \Delta_S W(t) \rangle = -\int_0^t dt_1 \frac{dW_E(t_1)}{dt_1} \frac{\sigma_{WS}^2(t_1)}{D_E} \exp\{-[(\Lambda(t) - \Lambda(t_1))]\}, \quad (24)$$

$$\Lambda(t) = \int_0^t dt \tau_w^{-1}(\tau) d\tau.$$

Применим полученные соотношения (14), (15), (18), (24) для расчета среднего отклика влагозапаса почвы на изменения средних осадков. Считая остальные параметры неизменными, нормируем влагозапас на его критическое значение, введя безразмерный влагозапас $w = W/W_0$. Формула (15) для безразмерного параметра Π_R переходит в $\Pi_R = (w_E - 1)(2d_E)^{-1/2}$, где d_E – безразмерная интенсивность флуктуаций влагозапаса почвы в отсутствие стока.

Считаем, что в начальный момент времени $t = 0$ система находилась в статистически среднем стационарном состоянии при $\langle w(0) \rangle = 0.5$. Дальнейшие расчеты следует рассматривать как содержащие в том числе и осреднение по статистическому ансамблю начальных аномалий. Вопрос о среднем отклике на заданную начальную аномалию для линейной модели рассматривался, например, в [12]. Согласно рис. 1, такое начальное значение среднего влагозапаса почвы соответствует режиму недостаточного увлажнения вдали от порога, начиная с которого дальнейшее увеличение осадков приводит к образованию стока. Нормируем время t на $\tau_E(0) = \langle P(0) \rangle / E_0 = t_0$, вводя $\tau = t/t_0$.

Рассмотрим случай, когда начиная с момента $t = 0$ средние осадки увеличиваются линейно со временем, приводя к линейному росту w_E от

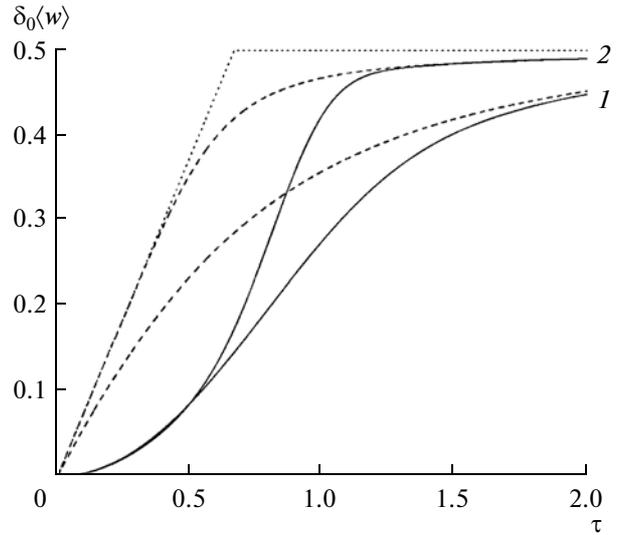


Рис. 2. Результаты расчетов по (14), (15), (18), (24) отклика безразмерного среднего влагозапаса $\delta_0 \langle w(\tau) \rangle = \langle w(\tau) \rangle - w_S(0)$ на увеличение средних осадков при $\delta_0 w_E = 1.5$ и различных значениях d_E (сплошные линии), отклонения для квазистационарных значений $\delta_0 w_S = W_S(\tau) - W_S(0)$ (штриховые линии), $d_E = 0.1$ (1), $d_E = 0.01$ (2), $\delta_0 w(\tau) = \delta_0 w_E(t)$ до достижения режима $\langle P \rangle = E_0$ (пунктирная линия).

$w_E(0) = w_S(0)$ до $w_E(2t_0) = w_F$. Результаты расчетов отклика среднего влагозапаса почвы $\delta_0 \langle w(t) \rangle = \langle w(t) \rangle - w_S(0)$ на увеличение средних осадков при $\delta_0 w_E = w_E(2t_0) - w_E(0) = 1.5$ и различных значениях d_E приведены на рис. 2 сплошными линиями. Для сравнения приведена пунктирная кривая, которая соответствует идеализированному линейному квазистационарному росту $w_S(t) = w_E(t)$ до достижения насыщения; далее полагаем $w_S(t) = 1$. Штриховыми линиями нанесены отклонения квазистационарных значений $\delta_0 w_S(t) = w_S(t) - w_S(0)$.

При заданном сценарии, как видно из излома пунктирной линии на рис. 2, система переходит из линейного режима с недостаточным увлажнением в нелинейный режим избыточного увлажнения. При этом максимальные отличия проявляются ближе к границе режимов, располагаясь все же в области недостаточного увлажнения.

Из рис. 2 также видно влияние интенсивности флуктуаций на ширину переходной области. С ростом d_E переход происходит плавнее, однако максимум отклонения среднего нестационарного отклика от квазистационарного среднего уменьшается.

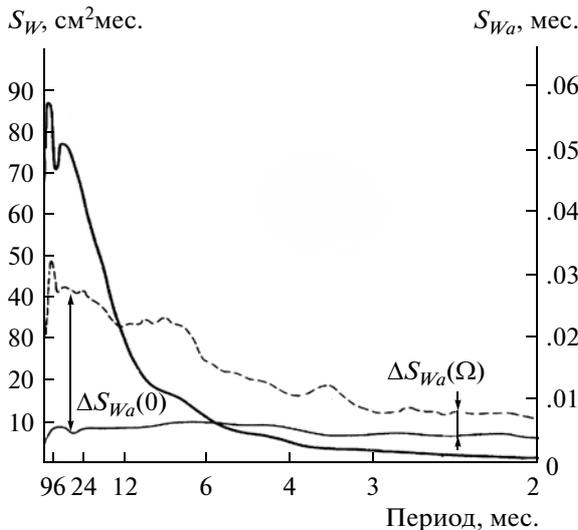


Рис. 3. Спектры флуктуаций относительной влажности приповерхностного воздуха S_{Wa} по результатам модели общей циркуляции [19, 20]. Неинтерактивный эксперимент – пунктирная линия, интерактивный – сплошная; для сравнения сплошной жирной линией нанесен спектр влагозапаса почвы S_W (шкала справа).

ИЗМЕНЕНИЕ СПЕКТРА ФЛУКТУАЦИЙ АТМОСФЕРНОЙ ВЛАЖНОСТИ ПРИ ЕЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИИ С ПОЧВЕННОЙ ВЛАГОЙ: МЕТОД ЭКВИВАЛЕНТНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Низкочастотные флуктуации влагозапаса почвы, вызванные откликом на короткопериодные атмосферные воздействия, в свою очередь способны вызывать низкочастотную атмосферную изменчивость, модулируя потоки водяного пара в атмосферу.

Первые численные эксперименты [18–20] по выявлению роли влажности почвы в изменчивости атмосферы были проведены на модели общей циркуляции атмосферы и океана Лаборатории геофизической гидродинамики (г. Принстон, США). В этих экспериментах влажность почвы рассчитывалась по интегральной модели эволюции влагозапаса – уравнению баланса влаги верхнего слоя почвы (7) с параметризацией испарения E по методу М.И. Будыко и стока R – по “модели ведра”. Численный эксперимент разбивался на два этапа. На первом этапе (интерактивный эксперимент) интегрировалась полная система уравнений, аппроксимирующая взаимодействующие атмосферу и влагозапас почвы W . Расчет проводился на 50 лет – срок, достаточный для надежного определения первых и вторых статистических моментов, – при заданном годовом ходе темпера-

туры поверхности океана. На втором этапе полученные в интерактивном эксперименте средние значения влагозапаса в каждой ячейке модели (учитывая их годовой ход) принимались в качестве заданных внешних параметров и на 25 лет проводилось интегрирование только атмосферной модели. Таким образом, для среднего любой переменной F : $\langle F \rangle^{(n)} = \langle F \rangle \langle W^{(i)} \rangle$. Здесь и далее верхние индексы (i) и (n) относятся к интерактивному и неинтерактивному экспериментам соответственно.

На рис. 3 приведены результаты обработки спектров абсолютной влажности приземного воздуха по данным [18–20], которые иллюстрируют коллективный эффект интенсификации атмосферной изменчивости из-за взаимодействия атмосферы и почвенной влаги в процессе согласованной коэволюции (интерактивный режим) – по сравнению со случаем, когда влажность почвы фиксирована (неинтерактивный режим). Спектры были пространственно осреднены по территории Северной Америки в широтном поясе 36° с.ш. – 54° с.ш. На рис. 3 показаны стрелками разности $\Delta S_{Wa}(0)$ спектров относительной влажности вблизи нулевой частоты между экспериментами и разность величин спектров в промежуточной области частот – спектрального плато $\Delta S_{Wa}(\Omega)$. Важная особенность приведенных на рис. 3 спектров – увеличение спектральной мощности флуктуаций атмосферной влажности для интерактивного эксперимента в области спектрального плато: $S(\Omega: \tau_w \ll \omega \ll \tau_a) \approx \text{const}$.

Для расчета модификации спектров низкочастотных флуктуаций в быстрой подсистеме (атмосфере) при ее взаимодействии с флуктуациями в медленной подсистеме (влагозапас почвы) можно использовать метод **эквивалентных стохастических систем** [6, 10]. В этом методе обобщенное уравнение Ланжевена (5) для медленных переменных Y дополняется разбиением быстрых переменных X по аналогии с правой частью (5). В результате получаются **обобщенные соотношения Ланжевена** [6]. В некоторых достаточно общих предположениях уравнение (16) для быстрых переменных заменяется на стохастическое дифференциальное уравнение с эквивалентной случайной силой $f_X(t)$, определяемой собственной изменчивостью $X_0(t)$ при $Y = \text{const}$ (неинтерактивный эксперимент):

$$\begin{aligned} \frac{dX(t)}{dt} &= -B_0 X(t) + AY(t) + f_X(t), \\ f_X(t) &= \frac{dX_0(t)}{dt} + B_0 X_0(t). \end{aligned} \quad (25)$$

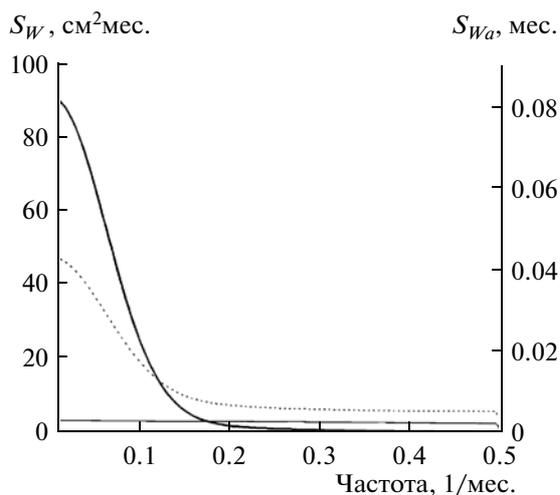


Рис. 4. Спектры флуктуаций относительной влажности воздуха W_a/W_{ac} по результатам стохастической модели. Неинтерактивный эксперимент – пунктирная линия, интерактивный – сплошная; для сравнения сплошной жирной линией нанесен полученный по стохастической модели спектр влагозапаса почвы S_W (шкала справа).

В (25) матрицы \mathbf{B}_0 и \mathbf{A} определяются из статистики решения задачи определения отклика $\delta_Y \langle \mathbf{X}(t) \rangle$ на аномалии \mathbf{Y} . Построенная таким образом система эквивалентна исходной – но только в низкочастотной области.

Для воспроизведения эффектов, выявленных на графиках рис. 3, дополним уравнение (7) для влагозапаса почвы (в режиме недостаточного увлажнения) уравнением для интегрального содержания влаги в столбе атмосферы W_a , предполагая, что адвективные осадки также можно параметризовать по “модели ведра” с некоторой критической величиной W_{ac} . Для горизонтальной адвекции влаги в атмосфере D_h выразим параметризацию через фоновое значение влагосодержания атмосферы W_f : $D_h = -\lambda_D(W_a - W_f) + f_D$, λ_D – числовой коэффициент. Случайные притоки адвекции тепла f_D зададим датчиком независимых случайных чисел с равномерным распределением. Таким образом, была построена максимально грубая эквивалентная стохастическая система для описания взаимодействия влаги в атмосфере и почве. Однако эта система позволяет проводить и сравнивать интерактивный и неинтерактивный эксперименты.

Результаты такого сравнения для спектров при реалистическом выборе параметров модели приведены на рис. 4. При расчетах с эквивалентной стохастической системой было принято, что $W_f =$

$= 0.85W_{ac}$, $W_{ac} \approx 1$ см, а дискретизация по времени составляла 3 сут.

Сравнение рисунков 3 и 4 показывает хорошее соответствие данных модели климата и построенной стохастической модели взаимодействия флуктуаций влаги в атмосфере и в почве. В обеих моделях спектр флуктуаций относительной влажности в промежуточной области частот в интерактивном эксперименте по сравнению с неинтерактивным увеличивается приблизительно в 2 раза. На низких частотах увеличение спектра относительной влажности атмосферы в интерактивном эксперименте в стохастической модели (более чем в 10 раз) превышает таковое для гидродинамической модели (приблизительно в 5 раз).

ВЫВОДЫ

Приведенные примеры ограничены исследованием поведения флуктуаций влагозапаса почвы. При этом не рассматривались пространственно-распределенные флуктуации, столь важные для определения стока. Тем не менее сами приведенные методы допускают многомерные обобщения и сформулированы для решений многомерного обобщенного уравнения Ланжевена (5). При использовании разностного или спектрального представления полей (не обязательно влагозапаса) приведенные методы также могут применяться.

Определение нестационарного отклика гидрологических характеристик на внешние воздействия с помощью флуктуационных соотношений типа (19)–(20) следует считать перспективным методом, если учесть, что стоковые характеристики, как правило, имеют ярко выраженный сезонный ход. Использование нелинейных методов статистической физики, возможно, будет полезным.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абрамовиц М., Стиган И.* Справочник по специальным функциям. М.: Наука, 1979. 653 с.
2. *Будыко М.И.* Климат и жизнь. Л.: Гидрометеиздат, 1971. 472 с.
3. *Будыко М.И.* Климат в прошлом и будущем. Л.: Гидрометеиздат, 1980. 351 с.
4. *Гардинер К.В.* Стохастические методы в естественных науках. М.: Мир, 1986. 526 с.
5. *Грицун А.С., Дымников В.П.* Отклик баротропной атмосферы на малые внешние воздействия. Теория и численные эксперименты // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1999. Т. 35. № 5. С. 511–525.
6. *Демченко П.Ф.* Анализ флуктуаций глобального климата с помощью обобщенных уравнений Лан-

- жевена // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1989. Т. 25. № 12. С. 1245–1255.
7. Демченко П.Ф. Аналитическая модель спектра флуктуаций влагозапаса почвы // Метеорология и гидрология. 1990. № 3. С. 47–54.
 8. Демченко П.Ф. Простая модель долгопериодной изменчивости влажности атмосферы с учетом ее взаимодействия с почвой // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1997. Т. 33. № 1. С. 3–9.
 9. Демченко П.Ф. Динамико-стохастическая модель формирования поверхностного стока // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2003. Т. 39. № 2. С. 186–192.
 10. Демченко П.Ф., Кислов А.В. Стохастическая динамика природных объектов: броуновское движение и геофизические приложения. М.: ГЕОС, 2010. 189 с.
 11. Дымников В.П. Диссипационно-флуктуационные соотношения для динамико-стохастических уравнений с переменными коэффициентами и диссипативных систем со случайным форсингом // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2002. Т. 38. № 6. С. 744–749.
 12. Кислов А.В. Учет изменчивости начального состояния почвы в стохастической модели влажности почвы // Метеорология и гидрология. 1991. № 8. С. 109–111.
 13. Кляцкин В.И. Стохастические уравнения и волны в случайно-неоднородных средах. М.: Наука, 1980. 236 с.
 14. Кучмент Л.С., Гельфан А.Н. Математическое моделирование речного стока. М.: Наука, 1993. 103 с.
 15. Найденов В.И. Нелинейная динамика поверхностных вод суши. М.: Наука, 2004. 318 с.
 16. Фролов А.В. Динамико-стохастические модели многолетних колебаний уровня проточных озер. М.: Наука, 1985. 103 с.
 17. Brey J.J., Casado J.M., Morillo M. Spectral density for a nonlinear Fokker-Planck model: Monte Carlo and analytical studies // Phys. Rev. A. 1985. V. 32. № 5. P. 2893–2898.
 18. Delwoth T.L., Manabe S. The influence of potential evaporation on the variabilities of simulated soil wetness and climate // J. Climate. 1988. V. 1. P. 523–547.
 19. Delwoth T.L., Manabe S. The influence of soil wetness on near-surface atmospheric variability // J. Climate. 1989. V. 2. P. 1447–1462.
 20. Delwoth T., Manabe S. Climate variability and land-surface processes // Adv. Water. Res. 1993. V. 16. № 1. P. 3–20.
 21. Entekhabi D., Rodriguez-Iturhe I., Castelli F. Mutual interaction of soil moisture state and atmospheric processes // J. Hydrology. 1996. V. 184. № 1. P. 3–17.
 22. Jarzynski C. What is the microscopic response of a system far from equilibrium? // Lecture Notes in Physics. 2002. V. 597. P. 63–82.
 23. Hatano T., Sasa C.-I. Steady state thermodynamics of Langevine systems // Phys. Rev. Lett. 2001. V. 86. № 16. P. 3463–3466.
 24. Hasselmann K. Stochastic climate models. Pt I. Theory // Tellus. 1976. V. 28. № 6. P. 473–485.
 25. Leith C.E. Climate response and fluctuation dissipation // J. Atmos. Sci. 1975. V. 32. P. 2022–2026.
 26. Marconi U.M.B., Puglisi A., Rondoni L., Vulpiani A. Fluctuations – dissipation: response theory in statistical physics // Phys. Rep. 2008. V. 461. № 4–6. P. 111–195.
 27. Mazo R.M. Aspects of the theory of Brownian motion // Lecture notes in physics. 1978. V. 4. Stochastic processes in nonequilibrium systems. (Sitges. Troc. 1978). P. 54–81.
 28. Mori H., Morita T., Mashiyama K.T. Constraction of state variables in non-equilibrium systems // Progr. Theor. Phys. 1980. V. 63. №. 6. P. 1865–1884
 29. Seifert U. Stochastic thermodynamics: Principles and perspectives // Eur. Phys. J. 2008. V. 64B. № 3–4. P. 423–431.
 30. Semenov V., Bengtson L. Secular trends in daily precipitation characteristics: greenhouse gas simulation with a coupled AOGSM // Climate Dynamics. V. 19. P. 123–140.
 31. Vinnikov K.Ya., Yeserkepova I.B. Soil moisture: empirical data and model results // J. Climate. 1991. V. 4. № 1. P. 66–79.