

ГИДРОФИЗИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ

УДК 551.465(.481.1)

СКЛОНОВЫЕ ТЕЧЕНИЯ В МОРЯХ, ОЗЕРАХ И ВОДОХРАНИЛИЩАХ, ОБУСЛОВЛЕННЫЕ ДИФфуЗИОННЫМИ ЭФФЕКТАМИ¹

© 2012 г. В. Н. Зырянов*, Л. Э. Лапина**

*Институт водных проблем РАН
119333 Москва, ул. Губкина, 3
E-mail: zuryanov@aquas.laser.ru

**Отдел математики Коми НЦ УрО РАН
167982 Сыктывкар, ул. Чернова, 3а

Поступила в редакцию 01.09.2010 г.

Изучается гидродинамика склоновых течений в стратифицированных водоемах, обусловленных процессами диффузии тепла и соли вблизи твердой наклонной непроницаемой границы. Физика этого явления заключается в том, что потоки тепла и соли из-за непроницаемости берегового склона должны быть равны нулю по нормали к нему. В силу того, что фоновая стратификация этому условию не удовлетворяет, возникают диффузионные пограничные слои вдоль берегового склона. Показано, что в зависимости от соотношений коэффициентов диффузии тепла и соли и параметров стратификации по температуре и солёности склоновые течения могут быть как восходящими, так и нисходящими. Кроме того, при определенных условиях в пограничных слоях может формироваться режим “пальцевой” конвекции, хотя фоновая стратификация является устойчивой. Возникающие склоновые течения, несмотря на свою локальность, инициируют глобальную поперечную вентиляцию вод во всем водоеме.

Ключевые слова: стратификация вод, наклонная граница, тепло, соль, диффузия, склоновые течения.

В метеорологии хорошо известно такое явление как склоновый ветер, возникающий на склонах гор из-за подогрева поверхностью Земли прилегающих слоев атмосферы. Однако склоновые течения могут возникать совершенно по другим причинам. Это особенно проявляется в стратифицированной водной среде, в которой возникают пограничные слои у наклонного берега из-за особенностей диффузии тепла и соли – потоки тепла и соли должны быть равны нулю по нормали к берегу. Если берег наклонный, а стратификация по температуре и солёности в начальный момент времени имеет градиент только по вертикали, т.е. изотермы и изогалины горизонтальны, то вдоль подводного склона берега возникают пограничные слои, в которых диффузионные эффекты стремятся поставить изотермы и изогалины перпендикулярно к берегу. При устойчивой стратификации по температуре и солёности в результате диффузии тепла и соли у наклонной стенки нижние слои будут прогреваться и опресняться, вода будет становиться легче, в результате возникает восходящее вдоль подводного склона течение. Надо отметить, если рассматривается морская вода, то такая система является системой

с двойной диффузией и в ней возможно возникновение нисходящего склонового течения [9, 11], по крайней мере, в начальной стадии формирования пограничного слоя.

Склоновые течения, как правило, имеют малые скорости и в процесс водообмена между мелководной и глубоководной частями водоема вносят малый вклад по сравнению с транзитными и ветровыми течениями в период открытой воды. Однако в зимний период, когда озеро или водохранилище покрыто льдом и свободная поверхность водоема экранирована от прямого действия ветра, а проникновение солнечной радиации сильно ослаблено, эти диффузионные течения могут приобретать доминирующее значение. В [8] на основе экспериментального исследования подледных течений в озерах Канады: оз. Васкессью и в Южно-Индианском оз. (зал. Вьюпау) показано, что подо льдом имеются течения со скоростями ~0.3–1 см/с. Причина возникновения этих течений в том, что на одних и тех же горизонтах температура воды в литорали оказывается выше, чем в глубоководной части, потому что изотермы должны подходить по нормали к береговому склону. А так как температура воды ниже 4С, то более теплая вода оказывается тяжелее. В результате возникает градиент плотности воды, который приводит к адвекции воды из литоральной

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-05-00651).

области в глубоководную часть озера. Такая неравномерность температуры поддерживается, с одной стороны, разным проникновением солнечной радиации сквозь лед, с другой — особенностями диффузионных процессов вблизи берегового склона.

В [6] рассматривается поперечное перемешивание вод в озере подо льдом, вызываемое склоновым течением из-за диффузии тепла от донных осадков на литорали. Эти течения (sediment heat flow) возникают из-за того, что донные осадки ближе к берегу — более теплые и подогревают воду. В результате вдоль берегового склона возникает нисходящее течение в глубоководную часть. Этот процесс проходит, хотя и с очень малыми скоростями, всю зиму и играет важную роль в вентилизации вод в озерах зимой.

Таким образом, происходящие в узких пограничных слоях у берегового склона, казалось бы, локальные физические процессы на самом деле оказывают глобальное влияние на весь водоем. Изучению гидродинамических закономерностей формирования склоновых течений, индуцируемых диффузионными процессами в стратифицированных водоемах, посвящена данная работа.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим пограничные слои, возникающие у наклонного берега в море из-за диффузии тепла и соли. Выберем систему координат (ξ, η) , связанную с наклонным берегом. Ось ξ идет вдоль берегового склона вверх, а ось η — перпендикулярно береговому склону. Новая система координат повернута по отношению к традиционной системе координат (x, z) на угол θ (рис. 1). Тогда уравнение для скорости U по оси ξ в пренебрежении нелинейными инерционными членами будет иметь вид

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k_U \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} - g \frac{\rho}{\rho_0} \sin \theta - \frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial \xi}, \quad (1)$$

$$-g\rho = \frac{\partial P}{\partial z}, \quad (2)$$

где U — скорость вдоль берегового склона (ось ξ), k_U — кинематический коэффициент турбулентного обмена импульсом, ρ — плотность воды, P — давление в жидкости, g — ускорение свободного падения.

Распределения температуры T и солёности S зададим в виде фонового с линейным распределением по глубине и возмущений \tilde{T} и \tilde{S}

$$\begin{aligned} T &= T_0(1 + \gamma_T z + \tilde{T}), \\ S &= S_0(1 + \gamma_S z + \tilde{S}), \end{aligned} \quad (3)$$

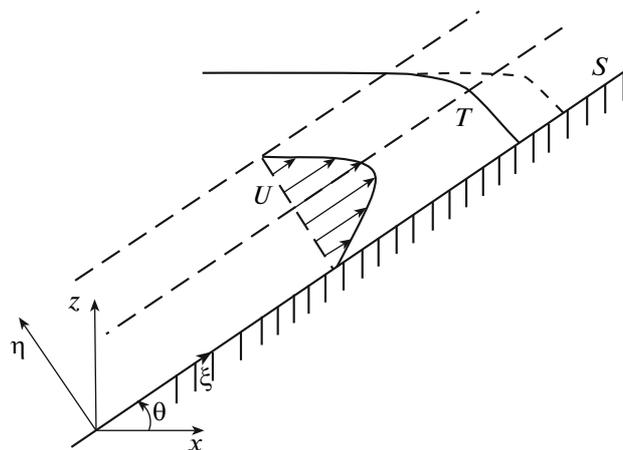


Рис. 1. Формирование диффузионных пограничных слоев по температуре и солёности и генерация склонового течения по береговому откосу.

где γ_T и γ_S — фоновые градиенты безразмерных температуры и солёности по вертикали соответственно.

Уравнение состояния морской воды примем в простейшей линейной форме [5]:

$$\frac{\rho}{\rho_0} = C_1 + C_2 \frac{T}{T_0} + C_3 \frac{S}{S_0}, \quad (4)$$

где $C_1 = 0.97529$, $C_2 = -0.00317$, $C_3 = 0.02737$, $T_0 = 17.5^\circ\text{C}$, $S_0 = 35\text{‰}$.

Подставим (3) в (4) и полученное выражение — в уравнение гидростатики (2). Учитывая, что $C_1 + C_2 + C_3 \approx 1$, можем написать выражение для распределения плотности воды в виде

$$\frac{\rho}{\rho_0} = 1 + (\alpha_T \gamma_T + \beta_S \gamma_S) z + \alpha_T \tilde{T} + \beta_S \tilde{S}, \quad (5)$$

где $\alpha_T = C_2$, $\beta_S = C_3$. Из (5) получим для фонового распределения плотности соотношение

$$g|\alpha_T \gamma_T + \beta_S \gamma_S| = -\frac{g}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial z} = N^2, \quad (6)$$

где N — частота Вайселя—Брента.

Будем предполагать, что вдоль оси ξ нет изменений, тогда из (2) следует, что фоновому распределению плотности будет соответствовать гидростатическое давление

$$\frac{\partial P}{\partial \xi} = -\rho_0 [1 + (\alpha_T \gamma_T + \beta_S \gamma_S) z] g \sin \theta. \quad (7)$$

Возмущение плотности относительно фонового распределения в (7) приведет к возникновению силы плавучести Архимеда, которая и будет вызывать движение жидкости,

$$g \Delta \rho \sin \theta = g \rho_0 \sin \theta (\alpha_T \tilde{T} + \beta_S \tilde{S}). \quad (8)$$

Подставляя (8) в (1), получим

$$\frac{\partial U}{\partial t} = k_U \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} - g \sin \theta [\alpha_T \tilde{T} + \beta_S \tilde{S}]. \quad (9)$$

Из (7) следует, что фоновая стратификация будет устойчивой, если

$$\alpha_T \gamma_T + \beta_S \gamma_S < 0. \quad (10)$$

Для возмущений температуры \tilde{T} и солености \tilde{S} имеем уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} &= k_T \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \eta^2} - U \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \xi}, \\ \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} &= k_S \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial \eta^2} - U \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \xi}, \end{aligned} \quad (11)$$

где k_T, k_S — кинематические коэффициенты турбулентной диффузии соответственно тепла и соли.

Подставляя (3) в (11) и учитывая, что $\partial/\partial \xi = (\partial/\partial z) \sin \theta$, получим уравнения для возмущений температуры и солености

$$\begin{aligned} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} &= k_T \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \eta^2} - \gamma_T U \sin \theta, \\ \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} &= k_S \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial \eta^2} - \gamma_S U \sin \theta. \end{aligned} \quad (12)$$

С учетом (9) и (12) исходная система уравнений в координатах (ξ, η) будет иметь вид

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= k_U \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} - g \sin \theta [\alpha_T \tilde{T} + \beta_S \tilde{S}], \\ \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} &= k_T \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \eta^2} - \gamma_T U \sin \theta, \\ \frac{\partial \tilde{S}}{\partial t} &= k_S \frac{\partial^2 \tilde{S}}{\partial \eta^2} - \gamma_S U \sin \theta. \end{aligned} \quad (13)$$

Граничные условия на береговом склоне следуют из условия прилипания для скорости и из условий отсутствия потоков тепла и соли по нормали к береговому откосу (условие непроницаемости границы)

$$\begin{aligned} U|_{\eta=0} &= 0, \quad \left. \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} + \gamma_T \cos \theta = 0, \\ \left. \frac{\partial \tilde{S}}{\partial \eta} \right|_{\eta=0} &+ \gamma_S \cos \theta = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

На бесконечности при $\eta \rightarrow \infty$ все возмущения затухают: $U \rightarrow 0, \tilde{T} \rightarrow 0, \tilde{S} \rightarrow 0$.

Система (13) получена ранее в [9], но без коэффициентов α_T и β_S , что не совсем корректно. В работе предпринята попытка найти аналитическое решение с помощью преобразования Лапла-

са. Заметим, что формально не представляет труда написать в общей форме аналитическое решение системы (13) через преобразование Лапласа, но из-за громоздкости выражений преобразование Лапласа вычислить явно обратное преобразование Лапласа (интеграл Меллина) не представляется возможным. В [9] авторы нашли приближенные решения в двух предельных случаях — для малых и для больших времен. Однако, что же происходит между этими предельными случаями — осталось неясным.

СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ

Предварительный анализ системы (13) показывает, что система с двойной диффузией (имеется диффузия двух компонент — тепла и соли) не может иметь стационарного решения. Действительно, предположим обратное, пусть система (13) выходит на некоторое стационарное решение $\bar{U}(\eta), \bar{T}(\eta), \bar{S}(\eta)$. Тогда проинтегрируем второе и третье уравнения системы (13) по η от 0 до бесконечности. Интеграл от $\bar{U}(\eta)$ даст полный расход Q пограничного течения вдоль склона. В результате будем иметь

$$\begin{aligned} k_T \left. \frac{\partial \bar{T}}{\partial \eta} \right|_0 - \gamma_T Q \sin \theta &= 0, \\ k_S \left. \frac{\partial \bar{S}}{\partial \eta} \right|_0 - \gamma_S Q \sin \theta &= 0. \end{aligned} \quad (15)$$

Подставляя в (15) граничные условия (14), приходим к выводу, что система (15) может быть совместной, только если предположить, что $k_T = k_S$. Это согласуется с выводом [9]. В [1, 3] также получено, что в бесконечной неограниченной стратифицированной по температуре и солености жидкости с наклонной границей решение не может выйти на стационарный режим. Вдоль наклонной границы формируются три слоя: динамический диффузионный пограничный слой толщиной $\delta_U \sim \sqrt{k_U t}$, температурный пограничный слой толщиной $\delta_T \sim \sqrt{k_T t}$ и соленостный пограничный слой толщиной $\delta_S \sim \sqrt{k_S t}$. Как видно, толщины слоев растут со временем. Далее под пограничным слоем будет пониматься суммарная область этих трех пограничных слоев.

Отсутствие стационарного режима в модели связано с постановкой задачи в бесконечной области, в результате чего фоновые распределения температуры и солености по вертикали растут от минус бесконечности до плюс бесконечности. Такой подход, конечно, является сильной идеализацией реальной ситуации в природе. Надо иметь в виду, что полученные решения отражают реальный процесс в природных водоемах только на

ограниченном интервале времени, по истечению которого решение становится непригодным. Однако, если водоем ограничен или имеет параллельную границу, т.е. задача рассматривается в бесконечном наклонном канале, то, как отмечено в [9], система (13) имеет стационарное решение.

Для пресноводного водоема система (13) является однодиффузионной, а эта система уже допускает стационарное решение. Действительно, в случае пресноводного озера будем иметь укороченную систему из двух уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} &= k_U \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} - g\alpha_T \sin \theta \tilde{T}, \\ \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} &= k_T \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \eta^2} - \gamma_T U \sin \theta. \end{aligned} \quad (16)$$

Такую задачу рассматривал еще Л. Прандтль [4] для атмосферы при описании склоновых ветров над горами. Он нашел стационарное решение задачи для движения воздуха вверх по склону, когда поверхность горного склона теплее воздуха и подогревает его. На поверхности склона задается постоянная температура – граничное условие первого рода. В данной работе постановка задачи и физика явления иные – на береговом склоне задается отсутствие потока тепла по нормали к нему, т.е. береговой откос является непроницаемым для потока тепла и соли. В близкой постановке для океана с учетом только диффузии тепла такая задача рассмотрена в [12].

В стационарном случае система (16) будет иметь вид

$$\begin{aligned} k_U \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} - g\alpha_T \sin \theta \tilde{T} &= 0, \\ k_T \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial \eta^2} - \gamma_T U \sin \theta &= 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Найдем решение системы (17). С этой целью продифференцируем дважды по η второе уравнение в (17) и с учетом первого уравнения получим

$$k_U k_T \frac{d^4 \tilde{T}}{d\eta^4} - g\alpha_T \gamma_T \sin^2 \theta \tilde{T} = 0. \quad (18)$$

По условию устойчивости имеем $\alpha_T \gamma_T < 0$, и, следовательно, корни характеристического уравнения будут

$$\lambda_{1,2,3,4} = \pm \frac{1 \pm i}{\sqrt{2}} \sqrt[4]{\frac{g|\alpha_T \gamma_T| \sin^2 \theta}{k_U k_T}}. \quad (19)$$

Учитывая, что \tilde{T} затухает на бесконечности и не должно обращаться в нуль при $\eta = 0$, получим решение уравнения (18)

$$\tilde{T} = C e^{-\lambda \eta} \cos \lambda \eta, \quad (20)$$

где C – константа интегрирования и

$$\lambda = \sqrt[4]{\frac{g|\alpha_T \gamma_T| \sin^2 \theta}{4k_U k_T}}. \quad (21)$$

Подставляя (20) в граничное условие (14), найдем константу C . В результате будем иметь решение (18) с граничным условием (14)

$$\tilde{T} = \frac{\gamma_T \cos \theta}{\lambda} e^{-\lambda \eta} \cos \lambda \eta. \quad (22)$$

Подставляя (22) в первое уравнение системы (17) и интегрируя, получим решение для скорости U с учетом граничного условия (14) для U

$$U = -\frac{g\alpha_T \gamma_T \sin 2\theta}{4\lambda^3 k_U} e^{-\lambda \eta} \sin \lambda \eta. \quad (23)$$

С учетом (21) выражение для скорости (23) можно записать в более простом виде

$$U = 2\lambda k_T \operatorname{ctg}(\theta) e^{-\lambda \eta} \sin \lambda \eta.$$

Графики функций (22) и (23) приведены на рис. 2, 3. Для получения размерного значения температуры на рис. 2 необходимо умножить значения \tilde{T} на 17.5°C .

Если вместо условия второго рода (14) на нормальную производную от \tilde{T} на береговом откосе задается условие первого рода, т.е. возмущение температуры $\tilde{T}|_{\eta=0} = \tilde{T}_0$, как в задаче Л. Прандтля [4], то тогда вместо (22) и (23) будем иметь решения

$$\begin{aligned} \tilde{T} &= \tilde{T}_0 e^{-\lambda \eta} \cos \lambda \eta, \\ U &= -\frac{\tilde{T}_0 g\alpha_T \sin \theta}{2\lambda^2 k_U} e^{-\lambda \eta} \sin \lambda \eta. \end{aligned} \quad (24)$$

Продифференцировав выражения (23) и (24) и приравняв производные нулю, найдем, что максимум скорости течения достигается в точке $\eta = \frac{\pi}{4\lambda}$, и он будет равен

$$U_{\max} = \frac{g\alpha_T \gamma_T \sin 2\theta}{4\sqrt{2}\lambda^3 k_U} e^{-\pi/4}. \quad (25)$$

Из (24) аналогично получим выражение для максимума скорости, когда задается возмущение температуры берегового откоса

$$U_{\max} = \frac{\tilde{T}_0 g\alpha_T \sin \theta}{2\sqrt{2}\lambda^2 k_U} e^{-\pi/4}. \quad (26)$$

Из вида решения (23) следует, что распределение скорости имеет характер экспоненциального пограничного слоя, толщина которого равна $1/\lambda = (4k_U k_T)^{1/4} / (N \sin \theta)^{1/2}$. Этот пограничный слой явно выделен К. Вуншем [12], и как он полагал, –

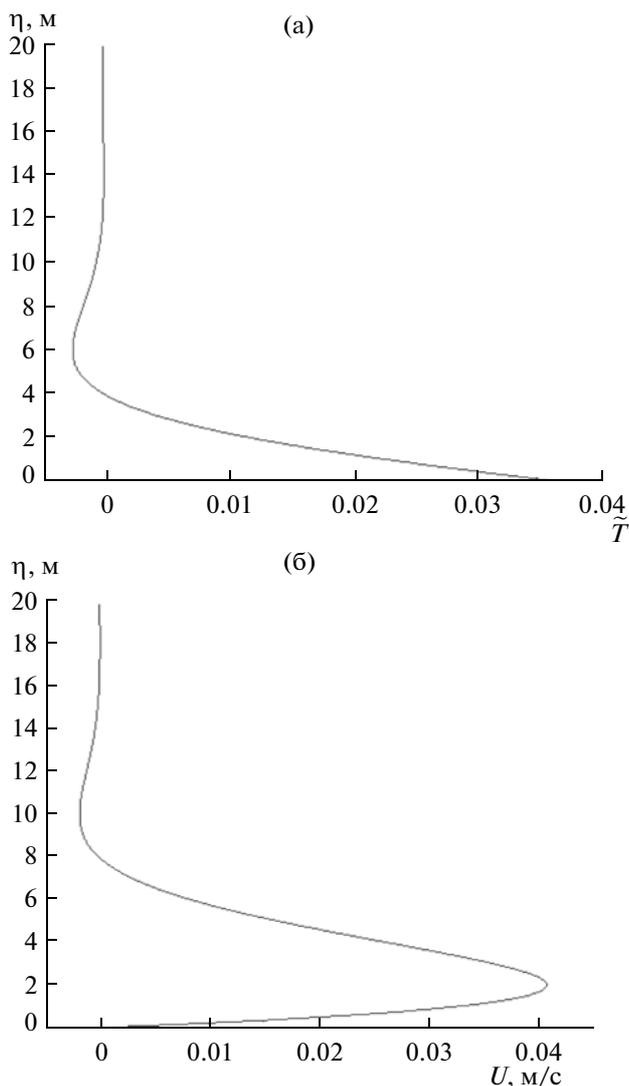


Рис. 2. Распределения безразмерной температуры (а), скорости потока (б) (формулы (22), (23)) в установившемся склоновом течении в пресноводном водоеме при значениях параметров $k_U = 0.02 \text{ м}^2/\text{с}$, $k_T = 0.025 \text{ м}^2/\text{с}$, $\alpha_T = -0.00317$, $\theta = \pi/4$, $\gamma_T = 0.02 \text{ м}^{-1}$.

впервые, но следует отметить, что этот пограничный слой уже фигурировал в упомянутой работе Л. Прандтля [4]. Оценим толщину пограничного слоя. При $\theta = \pi/4$, $k_U = 0.02 \text{ м}^2/\text{с}$, $k_T = 0.025 \text{ м}^2/\text{с}$, $\alpha_T = -0.00317$, $\gamma_T = 0.02 \text{ м}^{-1}$ получим $1/\lambda = 1.6 \text{ м}$. При уменьшении угла θ толщина пограничного слоя растет и, например, при $\theta = \pi/30$ будет уже составлять 4.1 м.

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ

Как отмечалось ранее, аналитически удастся получить решение системы (13) только в двух

предельных случаях — для малых и больших времен. Поведение решения на конечных временах можно исследовать только с помощью численных методов. Численное решение системы (13) находилось с помощью пакета MATLAB, и на рис. 3 приведены результаты численного решения при следующих значениях входящих параметров: $k_U = 0.02 \text{ м}^2/\text{с}$, $k_T = 0.025 \text{ м}^2/\text{с}$, $k_S = 0.02 \text{ м}^2/\text{с}$, $\gamma_T = 0.02 \text{ м}^{-1}$, $\gamma_S = -0.02 \text{ м}^{-1}$. Нетрудно проверить, что фоновая стратификация будет устойчивой: $\alpha_T \gamma_T + \beta_S \gamma_S < 0$. Начальные значения U , \tilde{T} , \tilde{S} задавались нулевыми. Из рис. 3а видно, что вдоль склона при данных условиях формируется пограничное течение в положительном направлении, т.е. восходящее вверх по склону. Кроме того, показано, что процесс формирования склонового течения имеет пульсирующий характер. Насколько известно из публикаций, пульсирующий характер склонового течения не был отмечен никем ранее.

На рис. 3б приведены возмущения температуры $\tilde{T}(\eta, t)$ в пограничном слое, из которого видно, что $\tilde{T}(\eta, t)$ — положительная функция. Следовательно, после прибавления $\tilde{T}(\eta, t)$ к фоновому распределению температуры изотермы будут заглубляться и подходить по нормали к береговому склону. Возмущения же солёности $\tilde{S}(\eta, t)$, наоборот, являются отрицательными (рис. 3в). Так как солёность растёт с глубиной, то для того, чтобы изогалины подходили к береговому склону по нормали, возмущение солёности должно уменьшать суммарную солёность вблизи склона, т.е. должно быть отрицательным.

На рис. 4 дано развитие во времени склонового восходящего течения, приведенного на рис. 3а. Изображены эпюры скорости течения через 20, 60, 140, 200 и 260 с после начала движения. Видно, что течение в пограничном слое носит пульсирующий характер — при $t = 60 \text{ с}$ (эпюра 2) скорость течения больше, нежели при $t = 140 \text{ с}$ (эпюра 3), при $t = 200 \text{ с}$ скорость вновь возрастает (эпюра 4). Важно отметить, что за склоновым узким восходящим течением формируется слабый противоток — нисходящее течение с отрицательными скоростями (рис. 4). Таким образом, склоновое течение в восходящем режиме имеет две области — собственно область хорошо выраженного восходящего склонового течения и область слабого нисходящего противотечения.

Интересно сравнить численные решения с аналитическими асимптотическими решениями для малых и больших времен. Асимптотики решения приведены в [9], и в принятых в данной статье обозначениях они имеют следующий вид:

для малых времен

$$U = -\frac{4g(\sin 2\theta)\beta_S\gamma_S(k_T t)^{3/2}}{k_U} \left\{ \frac{\lambda}{1-\sigma^{-1}} i^3 \operatorname{erfc} \frac{\eta}{2(k_T t)^{1/2}} - \frac{\tau^{1/2}}{\tau^{-1}-\sigma^{-1}} i^3 \operatorname{erfc} \frac{\eta}{2(k_S t)^{1/2}} + \left(\frac{\tau^{1/2}}{\tau^{-1}-\sigma^{-1}} - \frac{\lambda}{1-\sigma^{-1}} \right) i^3 \operatorname{erfc} \frac{\eta}{2(k_U t)^{1/2}} \right\} (1 + O(\beta_S^2 \gamma_S^2 k_S t)), \quad (27)$$

$$T = 2(\cos \theta) \alpha_T \gamma_T (k_T t)^{1/2} i^1 \times \operatorname{erfc} \frac{\eta}{2(k_T t)^{1/2}} (1 + O(\beta_S^2 \gamma_S^2 k_S t)), \quad (28)$$

$$S = 2(\cos \theta) \beta_S \gamma_S (k_S t)^{1/2} i^1 \times \operatorname{erfc} \frac{\eta}{2(k_S t)^{1/2}} (1 + O(\beta_S^2 \gamma_S^2 k_S t)), \quad (29)$$

для больших времен

$$U = 2 \operatorname{ctg} \theta \frac{\tau(1-\lambda)}{1-\tau\lambda} k_T M \times \exp(-M\eta) \sin M\eta (1 + O(g\beta_S\gamma_S t^2)^{-1/2}), \quad (30)$$

$$T = \alpha_T \gamma_T \cos \theta \left\{ \frac{\tau(1-\lambda)}{1-\tau\lambda} M^{-1} \exp(-M\eta) \cos M\eta + \frac{2(1-\tau)(k_T t)^{1/2}}{[(1-\lambda)(1-\tau\lambda)]^{1/2}} i^1 \operatorname{erfc} \left[\left(\frac{1-\lambda}{1-\tau\lambda} \right)^{1/2} \frac{\eta}{2(k_T t)^{1/2}} \right] \right\} \times (1 + O(g\beta_S\gamma_S t^2)^{-1/2}), \quad (31)$$

$$S = \beta_S \gamma_S \cos \theta \left\{ \frac{1-\lambda}{1-\tau\lambda} M^{-1} \exp(-M\eta) \cos M\eta + \frac{2\lambda(1-\tau)(k_S t)^{1/2}}{[(1-\lambda)(1-\tau\lambda)]^{1/2}} i^1 \operatorname{erfc} \left[\left(\frac{1-\lambda}{1-\tau\lambda} \right)^{1/2} \frac{\eta}{2(k_S t)^{1/2}} \right] \right\} \times (1 + O(g\beta_S\gamma_S t^2)^{-1/2}), \quad (32)$$

где $\lambda = -\alpha_T \gamma_T / \beta_S \gamma_S$, $\sigma = k_U / k_T$, $\tau = k_S / k_T$, $M = -\left(\frac{\alpha_T \gamma_T}{k_T} + \frac{\beta_S \gamma_S}{k_S} \right) \frac{g \sin^2 \theta}{4k_U}$.

Кратный дополнительный интеграл вероятностей $i^n \operatorname{erfc}(x)$ в формулах (27) – (32) определяется рекуррентной зависимостью

$$i^n \operatorname{erfc}(x) = \int_x^\infty i^{n-1} \operatorname{erfc}(y) dy, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

причем

$$i^0 \operatorname{erfc}(x) = \operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty e^{-y^2} dy, \quad (33)$$

$$i^{-1} \operatorname{erfc}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \exp(-x^2).$$

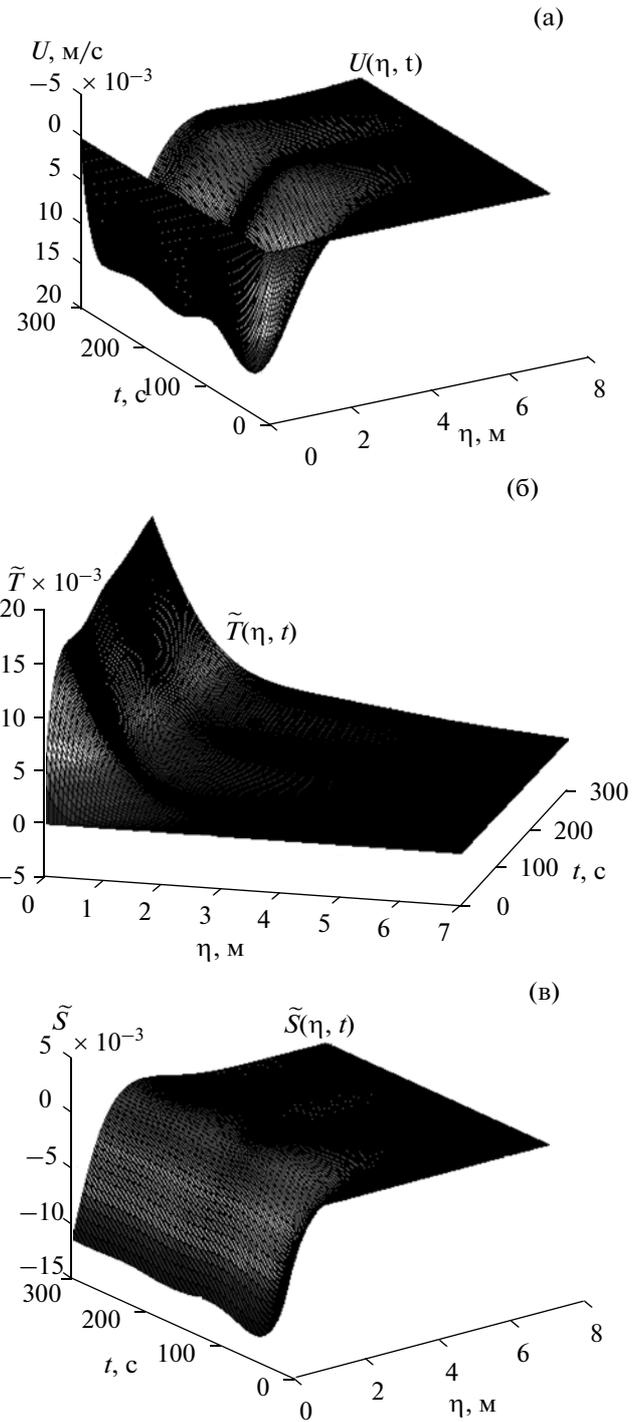


Рис. 3. Пространственно-временное распределение в склоновом пограничном течении в море скорости течения $U(\eta, t)$ (а), возмущения температуры $\tilde{T}(\eta, t)$ (б), возмущения солёности $\tilde{S}(\eta, t)$ (в) в режиме восходящего течения при значениях параметров $\theta = 45^\circ$, $k_U = 0.022 \text{ м}^2/\text{с}$, $k_T = 0.025 \text{ м}^2/\text{с}$, $k_S = 0.02 \text{ м}^2/\text{с}$, $\gamma_T = 0.02 \text{ м}^{-1}$, $\gamma_S = -0.02 \text{ м}^{-1}$.

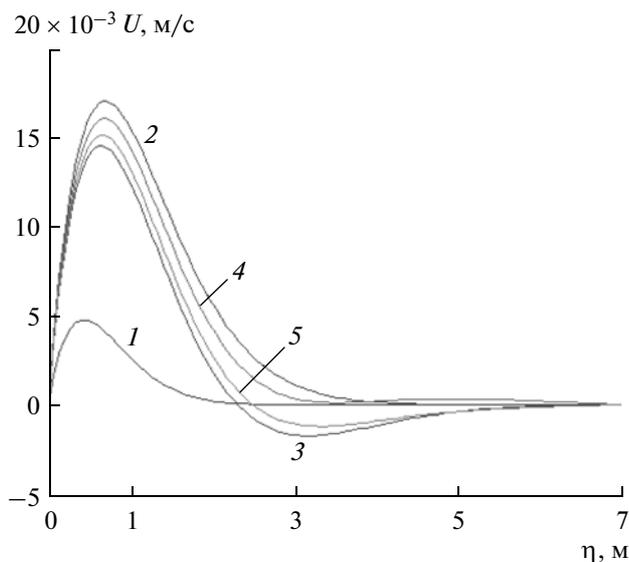


Рис. 4. Распределения скоростей течения в восходящем склоновом течении, приведенном на рис. 3а, в моменты времени: 20 (1), 60 (2), 140 (3), 200 (4), 260 (5) с.

Для непосредственных вычислений воспользуемся рекуррентным соотношением

$$i^n \operatorname{erfc}(x) = -\frac{x}{n} i^{n-1} \operatorname{erfc}(x) + \frac{1}{2n} i^{n-2} \operatorname{erfc}(x). \quad (34)$$

Учитывая (33) и (34), будем иметь выражения

$$i^3 \operatorname{erfc}(x) = \frac{1}{6} \left[-x \left(x^2 + \frac{3}{2} \right) \operatorname{erfc}(x) + \frac{x^2 + 1}{\sqrt{\pi}} \exp(-x^2) \right], \quad (35)$$

$$i^1 \operatorname{erfc}(x) = -x \operatorname{erfc}(x) + \pi^{-1/2} \exp(-x^2). \quad (36)$$

Подставляя теперь выражения (35) и (36) в (27) – (32), получим явные формулы, пригодные для вычислений. На рис. 5 приведено для сравнения поведение численного решения во времени при $\eta = 1$ и асимптотического решения при малых и больших временах при значениях параметров, приведенных на рис. 3. Из рис. 5 видно, что асимптотическое решение хорошо аппроксимирует численное на начальном участке по времени, но оно растет быстрее, чем численное. На больших временах асимптотическое решение – постоянное по времени, в то время как в численном решении еще присутствуют волны, но они затухающие.

На рис. 6 приводится сравнение пространственного распределения численного и асимптотического решений для малых ($t = 20$ с) и больших ($t = 260$ с) времен. Из рисунка видно, что асимптотическое решение хорошо аппроксимирует численное. Это служит подтверждением правильности найденного численного решения.

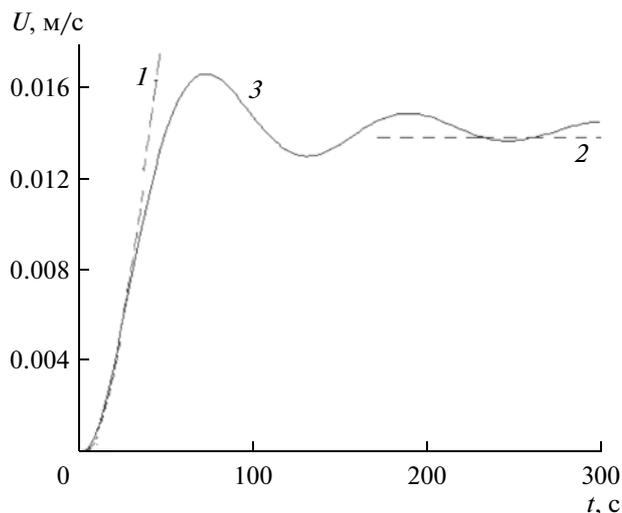


Рис. 5. Асимптотическое решение для малых и больших времен (соответственно пунктирные 1 и 2) при $\eta = 1$ и значений параметров, приведенных на рис. 3: 3 – поведение численного решения во времени в той же точке.

ВОСХОДЯЩИЕ И НИСХОДЯЩИЕ СКЛОНОВЫЕ ТЕЧЕНИЯ

Приведенное на рис. 3а течение являлось восходящим. Однако в системах с двойной диффузией склоновые течения могут быть как восходящими, так и нисходящими. В работе [9] из анализа асимптотического решения для малых времен получен критерий, который в принятых в данной статье обозначениях формулируется так: в системе с двойной диффузией течение будет нисходящим, если $|\lambda| > F$, и восходящим, если $|\lambda| < F$, где

$$|\lambda| = |\alpha_T \gamma_T / \beta_S \gamma_S|, \quad F = \frac{\tau(\sigma - 1)(\sigma^{1/2} - \tau^{1/2})}{(\sigma^{1/2} - 1)(\sigma - \tau)}. \quad (37)$$

Выражение для F в (37) после подстановки τ и σ можно упростить

$$F = \frac{k_S \sqrt{k_U} + \sqrt{k_T}}{k_T \sqrt{k_U} + \sqrt{k_S}}. \quad (38)$$

Надо иметь в виду, что этот критерий строго был получен только для малых времен. Далее течение может изменить свое направление. Действительно, течению на рис. 3а соответствуют значения $F = 0.8472$ и $|\lambda| = 0.1158$, т.е. выполняется неравенство $|\lambda| < F$, и течение является восходящим. На рис. 7 приведены результаты расчета пограничного течения при $\gamma_T = -0.155 \text{ м}^{-1}$ и тех же значениях остальных параметров, что и на рис. 3. Нетрудно убедиться, что стратификация остается устойчивой, т.е. $\alpha_T \gamma_T + \beta_S \gamma_S < 0$, хотя более холодная вода теперь располагается сверху.

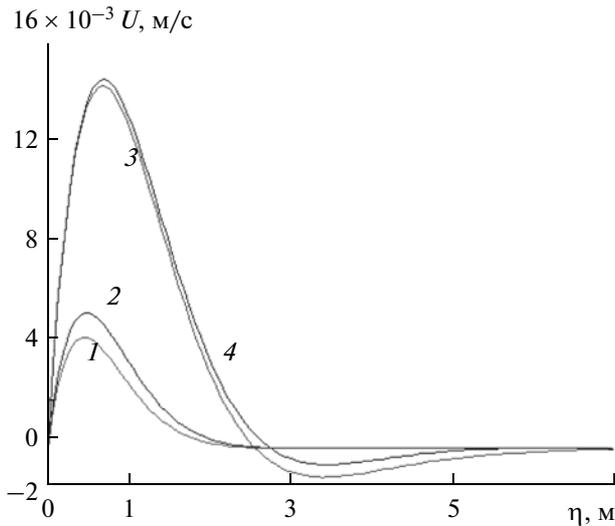


Рис. 6. Сравнение пространственного распределения асимптотического и численного решений для скорости течений при малых временах $t = 20$ с (1 – численное, 2 – асимптотическое решения) и при больших временах $t = 260$ с (3 – асимптотическое, 4 – численное решения).

Но теперь уже при этих значениях $|\lambda| = 0.8976$, и в результате будем иметь $|\lambda| > F$. Из рис. 7 видно, что на начальном этапе формирования пограничного течения скорость действительно имеет отрицательное направление, т.е. течение идет вниз. Но затем нисходящее течение начинает оттесняться от берега узкой струей восходящего потока. Отчетливо прослеживается также пульсирующий характер движений в склоновом течении. Возникающую пространственную структуру течения хорошо видно на рис. 6, на котором приведены эпюры скорости склонового течения в моменты времени $t = 100, 300, 700, 1000$ и 1300 с. В начальный момент времени формируется чисто нисходящее течение (эпюра 1), но затем нисходящий поток оттесняется от берегового склона узким восходящим течением (эпюры 2 – 5), однако суммарный перенос остается нисходящим. Хорошо виден пульсирующий характер течения и в режиме нисходящего потока.

В системах с двойной диффузией появляются дополнительно еще две степени свободы – дополнительная диффузия, описываемая коэффициентом диффузии, и стратификация второй компоненты, описываемая параметром стратификации. Дополнительные две степени свободы приводят к существенному расширению режимов возможных течений. Одна из таких особенностей систем с двойной диффузией – нисходящие течения – были описаны выше. Другая особенность связана с возникновением в системах с двойной диффузией так называемой «пальцевой» конвекции. Как было показано Дж. Тернером [10], суще-

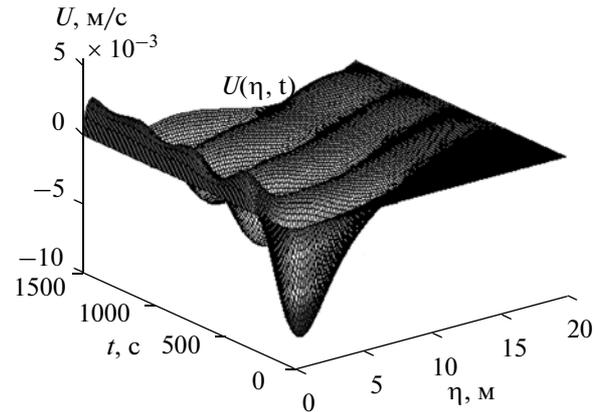


Рис. 7. Пространственно-временное распределение скорости $U(\eta, t)$ в нисходящем склоновом пограничном течении в море при значениях параметров $k_U = 0.02$ м²/с, $k_T = 0.025$ м²/с, $k_S = 0.02$ м²/с, $\gamma_T = -0.155$ м⁻¹, $\gamma_S = -0.02$ м⁻¹.

ствует два класса систем с двойной диффузией, зависящих от неустойчивой по стратификации компоненты и соотношения коэффициентов диффузии. Если неустойчива по стратификации компонента с меньшим значением коэффициента диффузии, то развивается конвекция в виде длинных вертикальных ячеек (пальцев), поэтому этот вид движения получил название «пальцевой» конвекции. Если, наоборот, неустойчива по стратификации компонента с более высоким значением коэффициента диффузии, то режим обмена является диффузионным. При этом жидкость остается устойчиво стратифицированной по плотности.

При расчетах режима нисходящего течения на рис. 7, 8 вода неустойчиво стратифицирована по температуре ($\gamma_T = -0.155$ м⁻¹). Однако коэффициент диффузии тепла $k_T = 0.025$ м²/с больше коэффициента диффузии соли $k_S = 0.02$ м²/с. Соответственно течение на рис. 7 и 8 относится к диффузионному режиму. Чтобы теперь получить режим «пальцевой» конвекции, необходимо в этих расчетах положить $k_T < k_S$. На рис. 9 приведены результаты расчета в режиме «пальцевой» конвекции при $k_T = 0.015$ м²/с, $k_S = 0.02$ м²/с, $\gamma_T = -0.155$ м⁻¹, $\gamma_S = -0.02$ м⁻¹. Нетрудно проверить, что по плотности жидкость устойчиво стратифицирована, т.е. $\alpha_T \gamma_T + \beta_S \gamma_S < 0$. Из рис. 9 видно, что движение жидкости приобретает совсем иную форму – возникают ячейки с восходящими и нисходящими течениями в виде пальцев. Это можно видеть на рис. 10 и на рис. 9, 10 хорошо прослеживается, что режим пальцевой конвекции является неустойчивым – скорости восходящих и нисходящих движений в ячейках неограни-

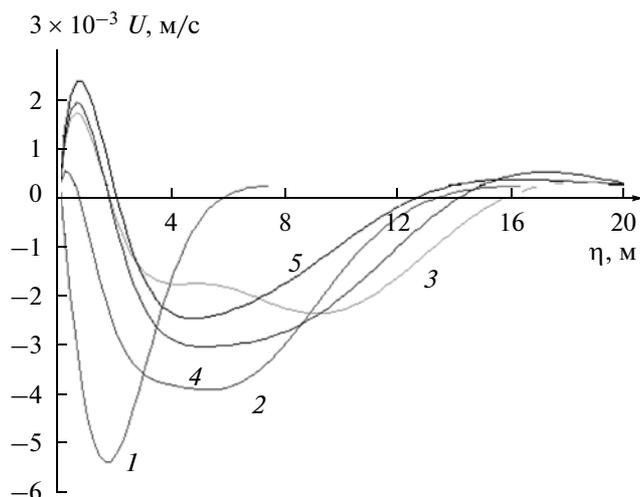


Рис. 8. Распределения скоростей течения в нисходящем склоновом течении, приведенном на рис. 7, в моменты времени 100 (1), 300 (2), 700 (3), 1000 (4), 1300 с (5).

ченно растут по времени. В дальнейшем происходит микрообрушение по слоям, в результате чего формируется тонкая ступенчатая структура перемешанных слоев. Этот эффект в системах с двойной диффузией изучен в работах [7, 9–11]. В [9] с помощью лабораторного моделирования наглядно показано, что склоновое течение в режиме пальцевой конвекции формирует тонкую ступенчатую структуру в виде горизонтальных слоев локально перемешанной жидкости, распространяющихся в толщу воды от наклонного берега.

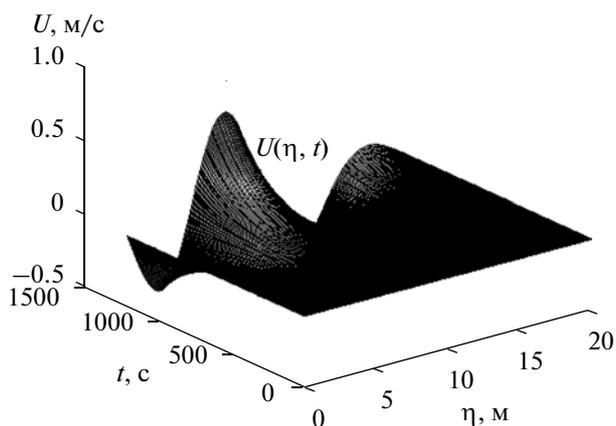


Рис. 9. Пространственно-временное распределение скорости $U(\eta, t)$ в склоновом пограничном течении в море в режиме развития пальцевой конвекции при значениях параметров $k_U = 0.02 \text{ м}^2/\text{с}$, $k_T = 0.015 \text{ м}^2/\text{с}$, $k_S = 0.02 \text{ м}^2/\text{с}$, $\gamma_T = -0.155 \text{ м}^{-1}$, $\gamma_S = -0.02 \text{ м}^{-1}$.

ГЕНЕРАЦИЯ ВОЛН В ДИФФУЗИОННЫХ СЛОЯХ

Как уже отмечалось ранее, процесс формирования склонового течения имеет пульсирующий характер. Возникновение этих внутренних колебаний – нетривиальный факт, учитывая, что система (13) – система параболических уравнений. Генерация волновых движений является следствием учета адвективного переноса для температуры и солености в системе (13). Если адвективный перенос во втором и третьем уравнениях системы (13) убрать, как это сделано в [1, 3], то пульсирующий характер решений исчезнет.

Исследуем характеристики волновых колебания, возникающих в диффузионных слоях. Для этого запишем систему уравнений (13) в векторном виде

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{R} = \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \vec{R}_k + A \vec{R}, \quad (39)$$

где $\vec{R} = (U, \tilde{T}, \tilde{S})$, $\vec{R}_k = (k_U U, k_T \tilde{T}, k_S \tilde{S})$, а матрица A равна

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -g\alpha_T \sin \theta & -g\beta_S \sin \theta \\ -\gamma_T \sin \theta & 0 & 0 \\ -\gamma_S \sin \theta & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (40)$$

В (39) член со второй производной описывает трение и диффузию, которые приводят к затуханию происходящих процессов, а второе слагаемое описывает генерацию импульса, возмущений тепла и солености. Диффузионные члены становятся существенными в пограничных слоях вблизи берегового склона, а вне этих слоев ими можно

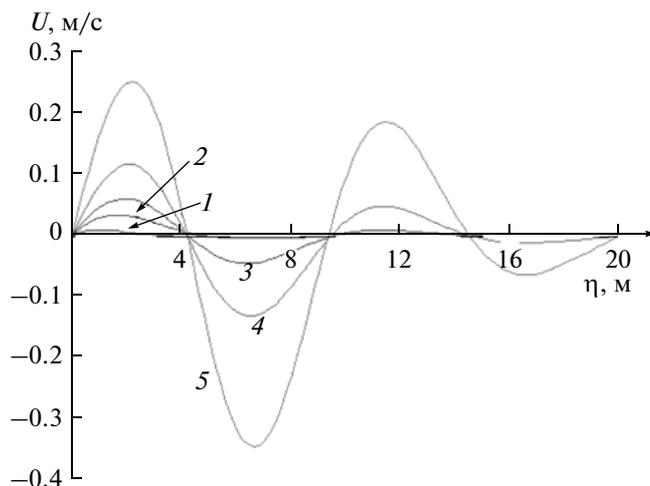


Рис. 10. Распределения скоростей в склоновом пограничном течении в режиме «пальцевой» конвекции. Сечения поверхности $U(\eta, t)$, приведенной на рис. 9, в моменты времени: 60 (1), 180 (2), 420 (3), 600 (4), 780 с (5).

в первом приближении пренебречь. Таким образом, вне этих слоев доминирующим будет баланс членов

$$\frac{\partial}{\partial t} \bar{R} = A \bar{R}. \quad (41)$$

Матрица A имеет следующие собственные значения

$$\lambda_1 = 0, \quad \lambda_{2,3} = \pm \sqrt{g \sin^2 \theta (\alpha_T \gamma_T + \beta_S \gamma_S)}. \quad (42)$$

Так как $\alpha_T \gamma_T + \beta_S \gamma_S < 0$, то $\lambda_{2,3}$ являются чисто мнимыми величинами. Это означает, что система (40) допускает волновые решения с частотой

$$\omega = \sqrt{g |\alpha_T \gamma_T + \beta_S \gamma_S| \sin^2 \theta}. \quad (43)$$

Учитывая выражение для частоты Вайсяля–Брента (6), из (43) получим формулу для частоты возникающих волн

$$\omega = N \sin \theta. \quad (44)$$

Соотношение (44) показывает, что возбуждаемые у берегового склона волны – модифицированные внутренние волны, частота которых уменьшается с уменьшением угла наклона берега. Отсюда следует важный вывод, что для приливной волны всегда будет существовать критический наклон берега, при котором частоты приливной волны и возбуждаемой модифицированной внутренней волны в склоновом течении будут совпадать, т.е. возникнет резонанс.

На рис. 11 приведены графики колебаний скорости течения на расстоянии 3 м по нормали от берегового склона. Период колебаний составляет по численным расчетам 117–120 с. Вычисления по формуле (41) дают период 115 с для тех же значений входящих параметров.

ДИСПЕРСИОННОЕ СООТНОШЕНИЕ

Введем операторы вида

$$L_U = \frac{\partial}{\partial t} - k_U \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}, \quad L_T = \frac{\partial}{\partial t} - k_T \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}, \quad (45)$$

$$L_S = \frac{\partial}{\partial t} - k_S \frac{\partial^2}{\partial \eta^2}.$$

Применим последовательно операторы L_T и L_S к первому уравнению системы (13), в результате будем иметь

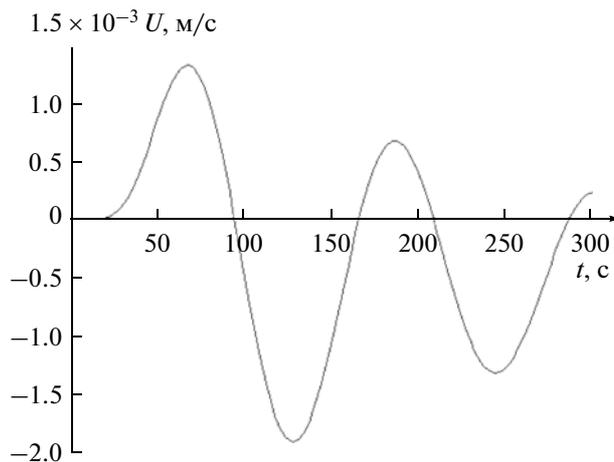


Рис. 11. Колебания скорости течения на расстоянии 3 м по нормали от берегового склона в восходящем склоновом потоке. Сечение поверхности $U(\eta, t)$, приведенной на рис. 3а, при $\eta = 3$ м.

$$L_S L_T L_U(U) = g \sin^2 \theta (\alpha_T \gamma_T L_S + \beta_S \gamma_S L_T) U. \quad (46)$$

Подставляя в (46) выражение $U \sim e^{i(\omega t + k \eta)}$ и проводя вычисления действия операторов, получим дисперсионное соотношение

$$k^6 (k_S k_T k_U) + k^4 i \omega (k_T k_U + k_T k_S + k_S k_U) - k^2 ((k_T + k_U + k_S) \omega^2 + g \sin^2 \theta (\alpha_T \gamma_T k_S + \beta_S \gamma_S k_T)) - i \omega^3 - g \sin^2 \theta (i \omega (\alpha_T \gamma_T + \beta_S \gamma_S)) = 0. \quad (47)$$

Решение бикубического уравнения (47) можно найти с помощью формул Кардано. На рис. 12а приведены три ветви (остальные три отличаются знаком) действительной части корней уравнения (47), дающие значение волнового числа. Мнимые части корней дают декремент затухания, и они здесь не приводятся.

Для пресноводного водоема имеем $k_S = 0$, и дисперсионное соотношение (47) сведется к биквадратному уравнению

$$k^4 (k_U k_T) + k^2 i \omega (k_U + k_T) - \alpha_T \gamma_T g \sin^2 \theta - \omega^2 = 0. \quad (48)$$

Решая уравнение (48), найдем зависимость волнового числа k от частоты ω

$$k_{1,2,3,4} = \pm \left[\frac{-i \omega (k_U + k_T) \pm \sqrt{-\omega^2 (k_U + k_T)^2 + 4 k_U k_T (\alpha_T \gamma_T g \sin^2 \theta + \omega^2)}}{2 k_U k_T} \right]^{1/2}. \quad (49)$$

Аналогично действительная часть соотношения (49) дает волновые числа, а мнимая – декремент

затухания. На рис. 12б приведены графики ветвей дисперсионного соотношения (49).

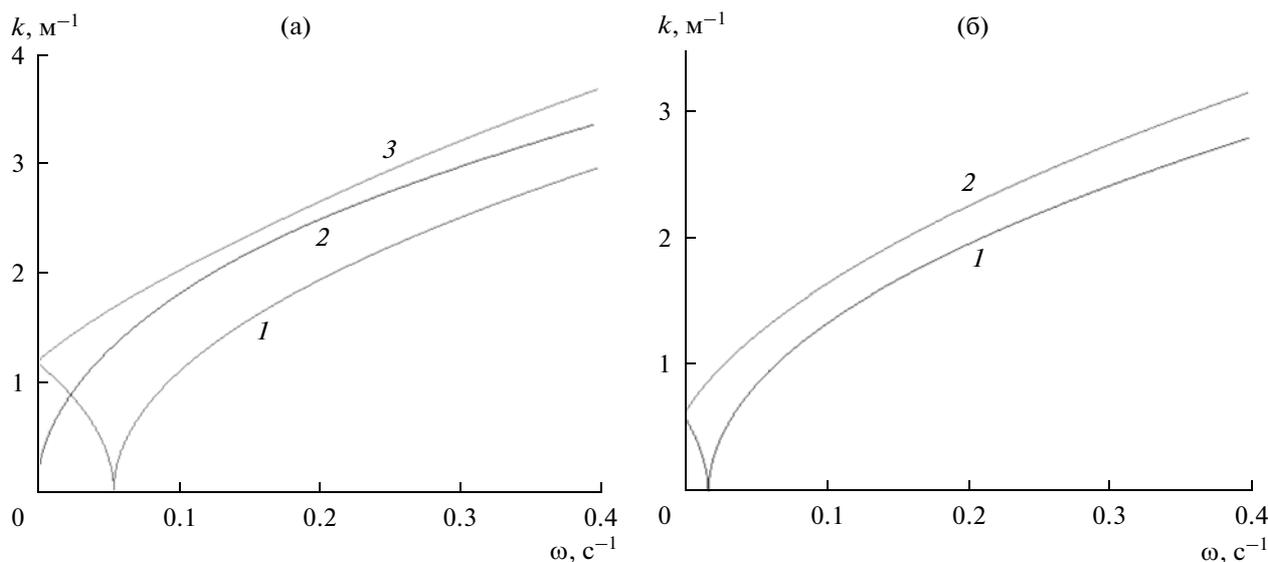


Рис. 12. Ветви дисперсионных соотношений для волн в склоновом восходящем течении: для моря (формула (47)) (а); для пресноводного озера (формула (49)) (б). Значения параметров даны в подписи к рис. 3.

На дисперсионных кривых на рис. 12а, 12б видно, что частоте $\omega = N \sin \theta$ соответствует резкий провал до нуля значений волнового числа на ветви 1. Это означает, что длина волны, соответствующая этой частоте, равна бесконечности, т.е. с такой частотой будет колебаться весь диффузионный слой. Действительно, это видно по результатам численных экспериментов, приведенных на рис. 3а и 7. Однако имеются другие ветви дисперсионного соотношения (кривые 2, 3 на рис. 12а и кривая 2 на рис. 12б), на которых частоте $\omega = N \sin \theta$ соответствуют волны конечной длины. Эти волны направлены по нормали к береговому склону. По-видимому, эти волны играют важную роль в развитии неустойчивости в режиме пальцевой конвекции.

ВЫВОДЫ

Хорошо известно, что эффекты диффузии наиболее сильно проявляются вблизи твердых границ, а также скачков плотности внутри жидкости, формируя пограничные слои. Рассмотренные в данной статье склоновые течения являются следствием эффектов диффузии вблизи твердой границы. Как было показано, в диффузионных слоях вдоль берегового склона происходят довольно сложные гидродинамические процессы — формирование восходящих и нисходящих течений (которые к тому же оказываются пульсирующими), пальцевая конвекция и образование ступенчатой микроструктуры из горизонтальных слоев перемешанной жидкости.

Формирующиеся склоновые течения как в восходящем, так и в нисходящем режимах, не яв-

ляются однонаправленными по всему пограничному слою — образуются, хотя и слабые, противотечения. Эти противотечения, тем не менее, не могут полностью компенсировать расход основного течения, поэтому в открытой части водоема должны образовываться компенсационные вертикальные движения обратной направленности. Отсюда следует, что локальные движения в диффузионных пограничных слоях берегового склона становятся источником глобального поперечного перемешивания вод во всем водоеме. Этот факт был отмечен в работе К. Вунша [12], который пытался оценить вертикальный водообмен в Мировом океане, исходя из расчетов расходов склоновых течений.

Без сомнения, механизм поперечной вентиляции вод, возбуждаемый склоновыми течениями, становится особенно важным для озер в зимний период. В озере, покрытом льдом, остаются фактически два источника поперечного перемешивания, это сейши [2] и склоновые течения. В зимний период стратификация по температуре в озерах становится обратной — более холодная вода ($\sim 0^\circ\text{C}$) находится сверху, вблизи нижней границы льда, а более теплая ($\sim 4^\circ\text{C}$), но более тяжелая — в придонной области. Охлаждаясь за счет более интенсивной диффузии тепла в пограничных слоях вдоль берегового склона, вода становится легче и начинает двигаться вверх вдоль склона. Таким образом, в пресноводных водоемах склоновые течения в любой период года являются восходящими. Надо отметить, что в данном случае речь идет только о склоновых течениях, обусловленных непроницаемостью берега для потоков тепла и соли. Однако, если берег является проницаемым для

потоков тепла и соли, то на первый план могут выходить склоновые течения, обусловленные другими факторами. Об одном из таких факторов (sediment heat flow) упоминалось в начале статьи. В этом случае берег подогревает воду в зимний период, в результате чего формируется склоновое нисходящее течение из литорали в глубоководную часть озера.

В данной работе рассматривалась только устойчивая фоновая стратификация. Для неустойчивой фоновой стратификации, когда плотность воды увеличивается к поверхности, течение в пограничном слое экспоненциально растет, т.е. пограничный слой становится неустойчивым, развивается конвекция и обрушение. Такая ситуация возникает, например, при осеннем выхолаживании водоема. Но, как было показано, неустойчивый режим в пограничном слое может формироваться и при устойчивой фоновой стратификации за счет процесса несбалансированной диффузии компонентов в двухдиффузионных системах, когда возникает режим пальцевой конвекции.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Байдулов В.Г., Чашечкин Ю.Д. Влияние диффузионных эффектов на пограничные течения в непрерывно стратифицированной жидкости // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 1993. Т. 29. № 5. С. 666–672.
2. Зырянов В.Н. Сейши подо льдом // Водные ресурсы. 2011. Т. 38. № 3. С. 259–271.
3. Кистович А.В., Чашечкин Ю.Д. Структура нестационарного пограничного течения на наклонной плоскости в непрерывно стратифицированной среде // Докл. РАН. 1992. Т. 325. № 4. С. 833–837.
4. Прандтль Л. Гидроаэромеханика. Ижевск: Регулярная и хаотическая динамика, 2002. 572 с.
5. Фельзенбаум А.И. Динамика морских течений // Итоги науки. ВИНТИ. Сер. Механика. 1968. С. 97–338.
6. Bengtsson L. Mixing in ice-covered lakes // Hydrobiologia. 1996. V. 322. № 1–3. P. 91–97.
7. Chen C.F., Wong S.B. Double-diffusive convection along a sloping wall // Bull. Amer. Phys. Soc. 1974. V. 19. P. 1154.
8. Kenney B.C. Physical limnological processes under ice // Hydrobiologia. 1996. V. 322. № 1–3. P. 85–90.
9. Linden P.F., Weber J.E. The formation of layers in a double-diffusive system with a sloping boundary // J. Fluid Mech. 1977. V. 81. № 4. P. 757–773.
10. Turner J.S. Buoyancy Effects in Fluids. Cambridge: Cambridge University Press, 1973. 367 p.
11. Turner J.S., Chen C.F. Two-dimensional effects in double-diffusive convection // J. Fluid Mech. 1974. V. 63. P. 577–592.
12. Wunsch C. On oceanic boundary mixing // Deep-Sea Research. 1970. V. 17. P. 293–301.