ВОДНЫЕ РЕСУРСЫ, 2011, том 38, № 5, с. 538–547

ГИДРОФИЗИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ

УДК 551/461.24(262.81)

ДИСКРЕТНАЯ ДИНАМИКО-СТОХАСТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ МНОГОЛЕТНИХ КОЛЕБАНИЙ РЕЧНОГО СТОКА[1]

© 2011 г. А. В. Фролов

Институт водных проблем Российской академии наук

119333 Москва, ул. Губкина, 3

Поступила в редакцию 04.03.2010 г.

Предложена модель многолетних колебаний речного стока, в основе которой используется разностное стохастическое уравнение водного баланса водосбора. Осадки и испарение на водосборе моделируются статистически зависимыми негауссовыми Марковскими процессами. Многолетние колебания речного стока описываются компонентой трехмерного негауссова Марковского процесса. Показана возможность отрицательности коэффициентов автокорреляции и асимметрии речного стока. Предложенная модель может быть использована для оценки влияния климатически обусловленных изменений режима осадков и испарения на водосборе на многолетние колебания речного стока.

Ключевые слова: многолетние колебания речного стока, динамико-стохастические модели, Марковские процессы, стохастическое уравнение водного баланса речного водосбора.

Моделирование многолетних колебаний речного стока относится к одной из основных задач гидрологии. Исторически существует два основных похода, применяемые при таком моделировании: динамико-стохастический и чисто статистический.

Физический базис динамико-стохастических моделей – уравнение водного баланса речного водосбора. Моделирование процесса многолетних колебаний речного стока на основе стохастического уравнения водного баланса водосбора впервые было предложено, по-видимому, М. Фийрингом [27] и в дальнейшем получило развитие в работах В. Клемеша [29, 30] и других исследователей, например [7, 24, 25, 33, 34].

В этих работах речной сток рассматривается как выходной процесс гидрологической системы осадки–испарение $\longrightarrow$ сток с водосбора, зависящий как от статистических характеристик входных процессов – осадков и испарения, так и от параметров детерминированной зависимости речного стока от запасов воды на водосборе. Примеры динамико-стохастического моделирования речного стока для интервалов времени меньше года можно найти, например, в монографии [11].

Математическое описание многолетних колебаний стока при использовании чисто статистического подхода дается условными и безусловными функциями распределения вероятностей и/или дискретными уравнениями типа авторегрессии – скользящего среднего [2] (также другими, идейно подобными), полученными при статистической обработке рядов наблюдений за речным стоком. При этом, в отличие от динамико-стохастического подхода, при оценке параметров функций распределения никак не используется ни зависимость стока от основных стокоформирующих процессов – осадков и испарения по водосбору, ни физический механизм, формирующий колебания стока. Однако, как отмечали Д.Я. Раткович и М.И. Фортус [19], "... даже при точном знании статистических характеристик возможности чисто стохастических моделей ограничены. Гораздо предпочтительней модели, использующие одновременно и физические законы, и статистическую информацию". Разработка динамико-стохастических моделей, использующих уравнение водного баланса водосбора в качестве физического механизма формирования стока, представляется шагом в направлении преодоления упомянутой выше ограниченности чисто стохастических моделей.

Разработка дискретной (разностной) модели многолетнего речного стока, в дополнение к ранее полученной автором непрерывной (дифференциальной) модели [25], вызвана потребностью максимального учета многообразия режимов колебаний как собственно стока, так и основных стокоформирующих процессов – осадков и испарения на речном водосборе. В частности, необходим учет возможной отрицательной автокоррелированности основных стокоформирующих процессов – осадков и испарения по водосбору. Реальность отрицательной автокоррелированности осадков подтверждается статистическим анализом данных, приведенных в монографии [1], согласно которым

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты 04-05-65010 и 08-05-01064).

коэффициент автокорреляции для многолетних колебаний осадков, усредненных по крупным территориям, может достигать значений –0.14...–0.17. Заметим, что отрицательная автокоррелированность некоторых других многолетних процессов оказывается совсем не редкостью, например, отрицательная автокорреляция отмечалась в изменениях (приращениях) объемов горных ледников (в 7 случаях из 26; до –0.3 [7]), в речном стоке (в 50 случаях из 339; до –0.33 [18]).

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

Выбор моделей входных процессов – осадков и испарения по водосбору опирается на результаты многочисленных исследований, содержащихся в работах [1, 3–5, 7, 20, 21]. В монографии С.Г. Добровольского [7] изложены результаты анализа около 500 рядов наблюдений над осадками на различных метеостанциях. В преобладающем числе случаев наилучшие модели многолетних изменений осадков – либо марковские процессы первого порядка, либо процесс белого шума.

Результаты по стохастическому моделированию испарения с достаточно больших территорий приведены в работе Е.М. Гусева и др. [4]. В соответствии с результатами этой работы, многолетние колебания испарения близки к белому шуму или же к марковскому процессу с малым коэффициентом автокорреляции.

Физическое обоснование автокоррелированности (фактически – свойства марковости) процессов многолетних колебаний осадков на водосбор и испарения с его поверхности представляется задачей, до сих пор не решенной в полном объеме. Можно только предположить реальность такой автокоррелированности (хотя бы и близкой к нулю), используя соображения относительно возможного свойства марковости метеорологических полей. Эти соображения, опирающиеся на гипотезу А.Н. Колмогорова об асимптотической марковости турбулентного потока в среде с исчезающей вязкостью, приведены в монографии А.С. Монина [13]. Если гипотеза о физически обусловленной марковости процессов многолетних колебаний осадков и испарения верна, то, несмотря на малую величину коэффициентов автокорреляции этих процессов (и, заметим, иногда формально статистически мало достоверную), эти коэффициенты должны приниматься во внимание.

Функции распределения осадков и испарения в общем случае негауссовы, что сразу следует из ограниченности снизу нулем значений этих процессов.

Таким образом, в качестве моделей многолетних колебаний осадков и испарения естественно принять дискретные (по отношению ко времени) негауссовы марковские процессы (процессы авторегрессии первого порядка). Коэффициенты автокорреляции этих процессов могут быть как положительными, так и отрицательными (свойство марковости процесса никак не связано со знаком его автокорреляции). Это обстоятельство существенно отличает дискретные авторегрессионные модели от непрерывных. Знаки коэффициентов асимметрии осадков и испарения также могут быть произвольными, что позволяет учитывать отрицательную асимметрию этих процессов.

ОСНОВНЫЕ УРАВНЕНИЯ И ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

Разностное уравнение водного баланса речного водосбора имеет вид

$$w_t = w_{t-1} + p_t - e_t - q_t, \tag{1}$$

где w_t – величина эффективных запасов воды на водосборе (суммарные запасы воды в речной сети, озерах, болотах, почвах вместе с подземными водами, участвующими в формировании речного стока), p_t – осадки на водосбор, e_t – испарение с водосбора, q_t – величина годового стока с водосбора, t – время (годы). Без уменьшения общности будем считать, что входящие в уравнение (1) значения всех процессов представляют собой отклонения от средних значений. Использование уравнения (1) предполагает, что отсутствует водообмен с другими водосборами и рассматривается ненарушенный техногенным влиянием (изъятиями воды или дополнительным стоком из других речных бассейнов) режим колебаний речного стока. Все величины, входящие в (1), имеют размерность слоя. Поскольку уравнение (1) описывает колебания годовых величин эффективных запасов воды, то предполагается, что осадки p_t и испарение e_t заданы годовыми значениями.

С учетом изложенного в предыдущем разделе, в качестве моделей процессов многолетних колебаний осадков $p_t(t)$ и испарения $e_t(t)$ используем марковские (авторегрессионные) негауссовы процессы первого порядка

$$p_t = r_p p_{t-1} + n_{p,t}, \tag{2}$$

и

$$e_t = r_e e_{t-1} + n_{e,t}, \tag{3}$$

где r_p, r_e – коэффициенты автокорреляции осадков и испарения соответственно, $n_{p,t}, n_{e,t}$ – белые негауссовы шумы с нулевыми средними и дисперсиями $\sigma^2_{n,e} = \left\langle n_e^2 \right\rangle$ и $\sigma^2_{n,p} = \left\langle n_p^2 \right\rangle$; угловые скобки здесь и в дальнейшем означают статистическую операцию усреднения. Если $r_p = 0$, $r_e = 0$, то осадки и испарение представляют собой белые шумы. Процессы

$n_{p,t}, n_{e,t}$ предполагаются взаимно-коррелированными с коэффициентом корреляции $r_{n,p,e}$

$$r_{n,p,e}\sigma_{n,v}\sigma_{n,e} = \langle n_{p,t}n_{e,t}\rangle, \tag{4}$$

таким, что обеспечивается заданная корреляция между осадками и испарением. Предполагается также, что белые негауссовы шумы имеют третьи центральные несмешанные моменты, обеспечивающие заданные значения асимметрии осадков и испарения.

Для замыкания уравнения (1) необходимо задать зависимость между запасами воды на водосборе и стоком с водосбора. В качестве таких зависимостей часто используются линейная $q = \alpha w$ и нелинейные зависимости вида $q = \beta\, e^{f(w)}$ или $q = k\, g(w)$, где q – сток с водосбора, w – эффективные запасы воды на водосборе, α, β, и k – числовые коэффициенты; $f(w)$ и $g(w)$ – некоторые функции от эффективных запасов [8, 16, 17, 24, 25, 28–34]. Б.М. Долгоносов [8] получил на основе физического подхода действительно "фундаментальное соотношение между стоком и влагозапасом воды на водосборе" в виде степенной функции

$$q = k\,w^b. \tag{5}$$

Показатель степени b отражает доминирующий режим стока с водосбора – ламинарный, турбулентный или промежуточный, b изменяется от 3/2 до 3. Величина коэффициента k зависит от длины водосбора и от среднего уклона.

Во всех отмеченных выше работах водосбор рассматривался как некоторый проточный водоем с оттоком – речным стоком с водосбора. Исчерпывающее обоснование такого представления речного водосбора подробно изложено в работах В. Клемеша [29–31]. В случае, когда колебания стока относительно среднего значения невелики, приведенные выше степенная и экспоненциальная функции могут быть аппроксимированы в окрестности среднего значения $\overline{w}$ линейными зависимостями.

Величина $K = 1/\alpha$, обратная коэффициенту α в линейной зависимости $q = \alpha w$, в зарубежной литературе называется "коэффициентом влагозапаса" или "постоянной влагозапаса водосбора". Коэффициент влагозапаса водосбора K, по определению, есть величина постоянная [29, 30, 35]. Заметим, что вывод о зависимости коэффициента K от времени, содержащийся в [32], имеет причиной ошибочную трактовку результатов попытки применения линейной модели концептуального водоема для описания заведомо нелинейного процесса формирования ливневого стока во время прохождения тайфуна.

Надеяться на абсолютно точную линейную зависимость речного стока от запасов на водосборе вряд ли приходится. Поэтому принятие предположения о прямой пропорциональности между стоком с водосбора и эффективными запасами воды на водосборе следует рассматривать только как приближение к реальной зависимости.

В этом случае для рек с небольшим коэффициентом вариации стока линейное приближение может рассматриваться как удовлетворительное, по крайней мере, дающее качественное представление о закономерностях формирования многолетних колебаний речного стока как выходного процесса системы "осадки–испарение $\longrightarrow$ сток с водосбора". Для подавляющего числа рек коэффициенты вариации находятся в приблизительном диапазоне 0.1–0.5 (например, [18, 21]). Представляется, что для таких рек имеется основание для применения линейных зависимостей между стоком и эффективными запасами воды на водосборе.

В. Клемеш [31], анализируя данные по водному балансу водосбора Дождливого озера, пришел к выводу, что "...моделирование изменяющихся под действием гравитации запасов воды [на водосборе] посредством линейного [т.е. сток из которого линейно зависит от запасов воды в нем] водоема обосновано".

Таким образом, в рамках данного исследования принимается зависимость

$$q_t = \alpha w_t, \tag{6}$$

где $\alpha > 0$ – коэффициент, показывающий изменение стока при изменении запасов воды на водосборе, участвующих в формировании речного стока, на единицу слоя.

Из уравнений (1) и (6) получаем уравнение, описывающее колебания речного стока с водосбора,

$$q_t = \beta q_{t-1} + \varphi(p_t - e_t), \tag{7}$$

где

$$\beta = \frac{1}{1+\alpha}, \quad \varphi = \frac{\alpha}{1+\alpha} = \alpha\beta. \tag{8}$$

Уравнения (7), (2) и (3) образуют систему линейных разностных стохастических уравнений, описывающую многолетние колебания речного стока с водосбора. Решение этой системы находится на основе методов корреляционной теории негауссовых случайных процессов [12, 22, 23].

МОДЕЛЬ С ОДНИМ ВХОДНЫМ ПРОЦЕССОМ ТИПА НЕГАУССОВА БЕЛОГО ШУМА

Рассмотрим частный случай уравнения (7), когда эффективные осадки (разность между осадками и испарением на водосборе) представляют собой негауссов белый шум

$$u_t = p_t - e_t. \tag{9}$$

В частности, u_t будет белым шумом, если p_t и e_t – стационарно несвязанные белые шумы.

В этом случае многолетние колебания стока с водосбора моделируются марковской последовательностью (авторегрессионным процессом первого порядка),

$$q_t = \beta q_{t-1} + a_t, \qquad (10)$$

где $a_t = \varphi u_t$; очевидно, что a_t — также процесс белого шума.

Важность рассмотрения этого случая обусловлена тем, что именно такое же представление речного стока получено в многочисленных работах при чисто статистическом подходе, не использующем уравнения водного баланса водосбора и полностью основывающимся только на статистической обработке рядов наблюдений над стоком [11, 18, 21]. Уравнение вида (10) при чисто статистическом подходе получается в результате построения моделей типа АРСС (авторегрессии — скользящего среднего), для чего применяются известные процедуры (например, [2]). Например, в работе [26] показано, что многолетние колебания стока Волги описываются процессом

$$q_t = 0.4q_{t-1} + a_t. \qquad (11)$$

где a_t — белый шум. Автокорреляционная функция $r_q(\tau)$ стока Волги описывается зависимостью

$$r_q(\tau) = 0.4^{|\tau|},$$

где τ — время (годы).

В данном случае имеет место достаточно редкая в гидрологии ситуация, когда чисто статистическая модель может быть физически интерпретирована. Действительно, процесс белого шума a_t, входящий в уравнение (10), может рассматриваться как процесс многолетних изменений эффективных осадков (разности между осадками и испарением) на водосборе. Поскольку коэффициент β в уравнении (11) равен коэффициенту автокорреляции стока — $\beta = r_q(1)$, то, в соответствии с левым равенством из (8),

$$r_q(1) = \frac{1}{1+\alpha}, \qquad (12)$$

т.е. коэффициент автокорреляции речного стока есть функция параметра инерционности водосбора. Из выражения (12) следует, что

$$\alpha = \frac{1-r_q}{r_q}, \qquad (13)$$

при условии, что $r_q \neq 0$. Для модели волжского стока (11), приведенной в [26], $\alpha = 1.5$ год$^{-1}$. Таким образом, чисто статистическая модель (11) может быть интерпретирована и как динамико-стохастическая модель многолетних колебаний стока с водосбора, формирующихся процессом эффективных осадков типа белого шума. Оценка параметра динамико-стохастической модели β (следовательно, также и α) может быть получена в результате чисто статистической операции — как выборочная оценка коэффициента автокорреляции стока r_q или в общем случае как некоторая функция от r_q.

Заметим, что в данном случае, т.е. когда эффективные осадки рассматриваются как процесс белого шума, коэффициент автокорреляции стока всегда положителен, поскольку $\alpha > 0$. Можно сказать, что по отношению к многолетним изменениям эффективных осадков колебания стока с водосбора имеют более “сглаженный” характер. Эта сглаженность обусловлена наличием переходящих от года к году запасов воды на водосборе [17] и проявляется в повышенной автокоррелированности стока по сравнению с автокоррелированностью эффективных осадков.

Итак, на этом примере можно сделать вывод, что динамико-стохастическая и чисто статистическая модели стока могут описываться одним и тем же разностным стохастическим уравнением вида (10). Другими словами, динамико-стохастическая и чисто статистическая модели в данном частном случае совпадают. То обстоятельство, что чисто статистическая модель процесса авторегрессии первого порядка оказывается оптимальной (в некотором смысле) для описания многолетних колебаний речного стока, как представляется, указывает на наличие одного и того же физического механизма, формирующего сток различных рек.

МОДЕЛЬ С ДВУМЯ ВХОДНЫМИ НЕГАУССОВЫМИ ПРОЦЕССАМИ

Рассмотрим более общий случай, когда осадки и испарение на водосборе представляют собой статистически связанные процессы авторегрессии первого порядка (2) и (3) соответственно, зависимость стока от эффективных запасов на водосборе принимается линейной вида (5). Тогда многолетние колебания речного стока описываются системой разностных стохастических уравнений

$$\begin{cases} q_t = \beta q_{t-1} + \varphi(p_t - e_t) \\ p_t = r_p p_{t-1} + n_{p,t} \\ e_t = r_e e_{t-1} + n_{e,t} \end{cases}, \qquad (14)$$

величины, входящие в эту систему, определены выше (см. пояснения к (2), (3) и (7)).

Положим, что $r_p, r_e \neq 0$ и в начальный момент времени $t = 0, q = q_0, p = p_0, e = e_0$.

Тогда уравнения, входящие в систему (14), имеют следующие решения:

$$q_t = \varphi^t\left(q_0 + \sum_{k=1}^{t}\frac{\beta(p_k - e_k)}{\varphi^k}\right), \quad t \geq 0, \tag{15}$$

$$e_t = r_e^t\left(e_0 + \sum_{k=1}^{t}\frac{n_{e,k}}{r_e^k}\right), \tag{16}$$

$$p_t = r_p^t\left(p_0 + \sum_{k=1}^{t}\frac{n_{p,k}}{r_p^k}\right). \tag{17}$$

Эти решения позволяют получить аналитические выражения для статистических характеристик стока: автоковариационной функции, дисперсии, коэффициента взаимной корреляции между стоком и осадками и других.

Аналитическое выражение для ковариационной функции стока $R_q(t, t')$, полученное с учетом (15) – (17) как функции двух моментов времени t, t', весьма громоздко, поэтому ограничимся приведением этой функции $|t - t'| = \tau$ для стационарного режима $R_q(\tau)$, т.е. предел $R_q(t,t')$ при $t, t' \longrightarrow +\infty$,

$$\begin{aligned} R_q(\tau) = \frac{\alpha^2\beta^2}{1-\beta^2}\Bigg\{ & \frac{\sigma_p^2\left[\left(1-\beta^2\right)r_p^{|\tau|+1} - \left(1-r_p^2\right)\beta^{|\tau|+1}\right]}{(r_p-\beta)(1-r_p\beta)} + \\ & + \frac{\sigma_e^2\left[\left(1-\beta^2\right)r_e^{|\tau|+1} - \left(1-r_e^2\right)\beta^{|\tau|+1}\right]}{(r_e-\beta)(1-r_e\beta)} - \\ & - r_{pe}\sigma_p\sigma_e\left[\frac{\left(1-\beta^2\right)r_e^{|\tau|+1} - \left(1-r_e^2\right)\beta^{|\tau|+1}}{(r_e-\beta)(1-r_e\beta)} + \right. \\ & \left. + \frac{\left(1-\beta^2\right)r_p^{|\tau|+1} - (1-r_p{}^2)\beta^{|\tau|+1}}{(r_p-\beta)(1-r_p\beta)}\right]\Bigg\}. \end{aligned} \tag{18}$$

Полагая $\tau = 0$, из (18) получаем формулу для безусловной (т.е. не зависящей от времени) дисперсии стока σ_q^2,

$$\begin{aligned} \sigma_q^2 = \frac{\alpha^2\beta^2}{1-\beta^2}\Bigg\{ & \frac{\sigma_p^2(1+\beta r_p)}{(1-\beta r_p)} + \frac{\sigma_e^2(1+\beta r_e)}{(1-\beta r_e)} - \\ & - \rho_{pe}\sigma_p\sigma_e\left(\frac{1+\beta r_e}{\left(1-r_e^2\right)(1-\beta r_e)} + \frac{1+\beta r_p}{\left(1-r_p^2\right)(1-\beta r_p)}\right)\Bigg\}. \end{aligned} \tag{19}$$

Коэффициент автокорреляции речного стока равен

$$r_q = R_q(1)\big/\sigma_q^2, \tag{20}$$

где $R_q(1)$ – значение $R_q(\tau)$ при $\tau = 1$, σ_q^2 определяется формулой (18).

Коэффициенты взаимной корреляции между стоком с водосбора и осадками и между стоком и испарением определяются выражениями (при $\tau = 0$) соответственно

$$r_{qp} = \alpha\beta\left(\sigma_p^2 - r_{pe}\sigma_p\sigma_e\right)\big/\sigma_q\sigma_p, \tag{21}$$

$$r_{qe} = \alpha\beta\left(-\sigma_p^2 + r_{pe}\sigma_p\sigma_e\right)\big/\sigma_q\sigma_p. \tag{22}$$

Возведя в куб обе части первого уравнения из системы (14) и выполнив операцию статистического усреднения (напомним, что эта операция обозначается угловыми скобками), получаем после очевидного преобразования выражение для третьего центрального несмешанного момента стока μ^q,

$$\begin{aligned} \mu_q = \frac{1}{1-\beta^3}\Big(& -3\varphi\beta^2\left\langle e_t q_{t-1}^2\right\rangle + 3\varphi\beta^2\left\langle p_t q_{t-1}^2\right\rangle + \\ & + 3\varphi^2\beta\left\langle e_t^2 q_{t-1}\right\rangle - 6\varphi^2\beta\left\langle e_t p_t q_{t-1}\right\rangle + \\ & + 3\varphi^2\beta\left\langle p_t^2 q_{t-1}\right\rangle - \varphi^3\left\langle e_t^3\right\rangle + 3\varphi^3\left\langle e_t^2 p_t\right\rangle - \\ & - 3\varphi^3\left\langle e_t p_t^2\right\rangle + \varphi^3\left\langle p_t^3\right\rangle\Big). \end{aligned} \tag{23}$$

Если третьи смешанные моменты вида $\langle abc\rangle$, $\langle a^2bc\rangle$ (здесь a, b, c – случайные величины), входящие в (23), таковы, что сумма всех членов выражения в круглых скобках, за исключением разности $\langle p_t^3\rangle - \langle e_t^3\rangle$, близка к нулю, то имеет место приближенная зависимость

$$\mu_q = \left\langle q_t^3\right\rangle \approx \frac{\varphi^3}{1-\beta^3}\left(\left\langle p_t^3\right\rangle - \left\langle e_t^3\right\rangle\right). \tag{24}$$

Эта зависимость, дающая в общем случае грубые оценки μ^q, представляет определенный интерес, поскольку показывает, что при выполнении неравенства $\langle p_t^3\rangle < \langle e_t^3\rangle$ оказывается возможным выполнение неравенства $\mu_q < 0$, т.е. при положительной асимметрии осадков и испарения асимметрия речного стока может быть отрицательной. Таким образом, дополняются представления В. Клемеша [28] о физических причинах отрицательной асимметрии в стоковых рядах. Заметим, что С.Н. Крицкий и М.Ф. Менкель [10], по-видимому, также допускали возможность отрицательной асимметрии в рядах годового стока, поскольку таблицы значений параметров трехпараметрического распределения вероятностей? приведенные в [10], пригодны для моделирования рядов годового стока для значений коэффициента асимметрии –2, –1, –0.5. Детально исследование зависимости μ^q от параметров осадков и испарения естественно проводить с помощью решения первого уравнения системы (14), понимаемом как получение численной реализации значений стока q_t достаточно большой длины N, например, для $N = 10000$.

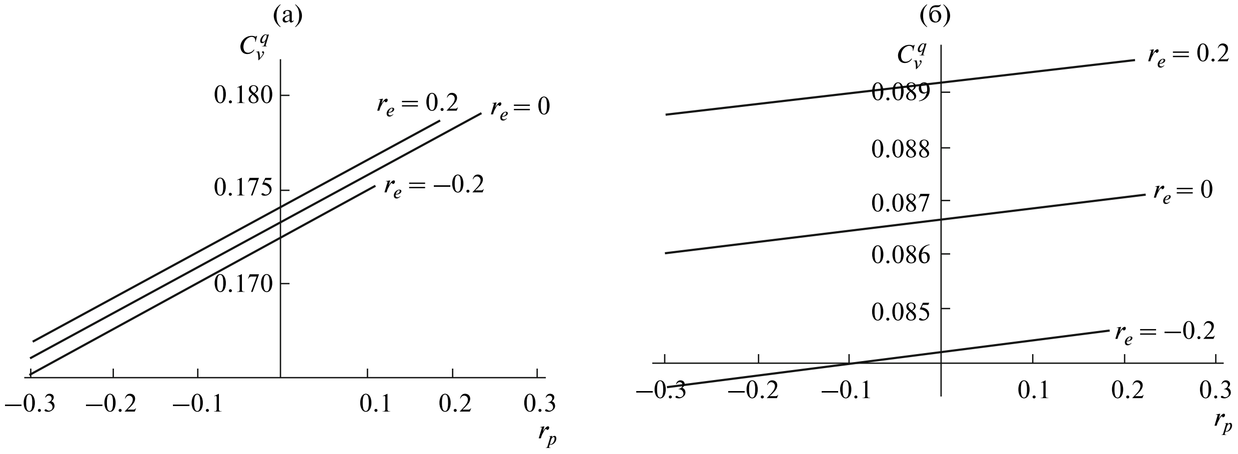

Рис. 1. Зависимость коэффициента вариации стока C_V^q от коэффициента автокорреляции осадков при различных коэффициентах автокорреляции испарения при $\sigma_e^2 = 1$, $\sigma_p^2 = 4.0$ (а); $\sigma_e^2 = 1$, $\sigma_p^2 = 0.25$ (б).

ВЛИЯНИЕ СТАТИСТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ОСАДКОВ И ИСПАРЕНИЯ НА СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ МНОГОЛЕТНЕГО РЕЧНОГО СТОКА НА ВОДОСБОРЕ. УСТОЙЧИВОСТЬ МОДЕЛИ К ВОЗМУЩЕНИЯМ ПАРАМЕТРОВ ВХОДНЫХ ПРОЦЕССОВ

Рассмотрим применение теоретических зависимостей (18)–(22) на конкретных примерах.

Положим, что дисперсия осадков и испарения удовлетворяют соотношению

$$\sigma_p^2 = k\sigma_e^2, \quad k > 0. \tag{25}$$

Если дисперсия осадков не меньше дисперсии испарения, то $k \geq 1$, в противном случае $k < 1$. Без уменьшения общности примем $\sigma_e^2 = 1$. В этом случае дисперсия стока, определяемая выражением (19), зависит от коэффициента k, параметра водосбора α, коэффициента взаимной корреляции между осадками и испарением r_{pe} и коэффициентов автокорреляции осадков и испарения r_p и r_e соответственно. Пусть, для определенности $\alpha = 5.0$, $r_{pe} = 0.2$, математические ожидания слоев стока, осадков и испарения равны 10, 30 и 20 см соответственно. Рассмотрим два случая – когда дисперсия осадков больше и меньше дисперсии испарения, именно – при $k = 4.0$ и $k = 0.25$ соответственно.

На рис. 1 приведены зависимости коэффициента вариации стока от параметров осадков и испарения.

Коэффициент вариации стока C_V^q увеличивается с увеличением коэффициента автокорреляции осадков r_p, однако это увеличение незначительно, так же как и расслоение кривых, отвечающих различным r_e. Таким образом, применительно к рассматриваемому примеру можно сказать, что C_V^q устойчиво (при неизменном среднем стоке) по отношению к малым изменениям коэффициентов автокорреляции осадков и испарения. Зависимости коэффициента автокорреляции стока от параметров осадков и испарения приведены на рис. 2а и 2б, соответственно.

Анализ графиков на рис. 2 показывает следующее. Во-первых, коэффициент автокорреляции стока увеличивается с увеличением автокоррелированности осадков и испарения. Во-вторых, различная степень расслоения зависимостей $r_q(r_p, r_e)$ на рис. 2а, 2б означает, что чем больше превышение дисперсии осадков над дисперсией испарения, тем менее чувствителен коэффициент автокорреляции стока к изменению автокорреляции испарения. В-третьих, нижняя кривая на рис. 2б показывает, что сток может иметь нулевую или отрицательную автокорреляцию при положительной автокоррелированности осадков, однако при этом автокорреляция испарения должна быть отрицательной и дисперсия испарения должна быть больше дисперсии осадков.

Исследование зависимости коэффициентов взаимной корреляции между стоком и осадками r_{qp} и между стоком и испарением r_{qe} от коэффициента взаимной корреляции между осадками и испарением r_{pe} представляет интерес для оценки влияния зональности расположения водосбора на величины r_{qp} и r_{qe}.

Существует представление, что при переходе от зоны избыточного увлажнения к зоне недостаточного увлажнения коэффициент корреляции между осадками и испарением r_{pe} увеличивается, при этом r_{qp} уменьшается, а r_{qe} возрастает [6]. Приве-

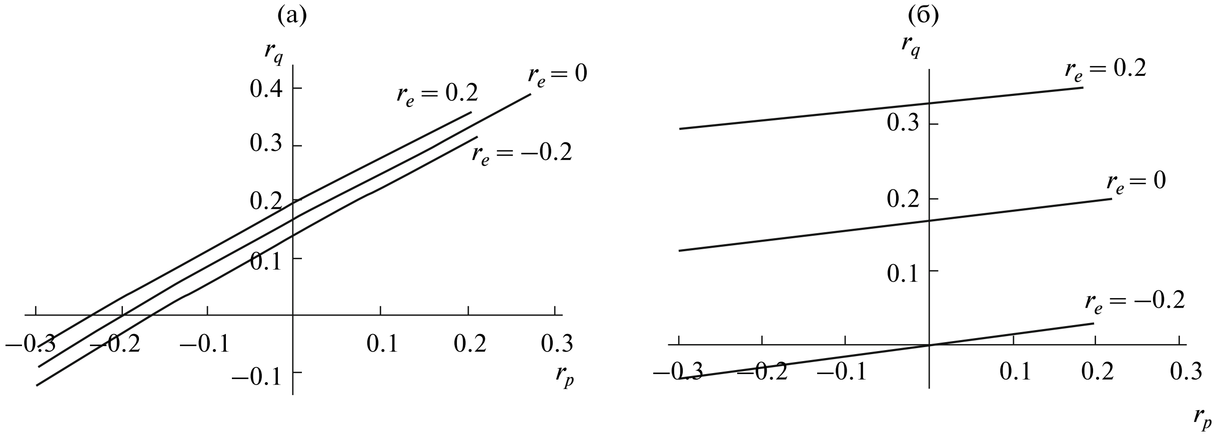

Рис. 2. Зависимости коэффициента автокорреляции стока r_q от коэффициента автокорреляции осадков r_p для различных значений коэффициента автокорреляции испарения r_e при $\sigma_e^2 = 1$, $\sigma_p^2 = 4.0$ (а); $\sigma_e^2 = 1$, $\sigma_p^2 = 0.25$ (б).

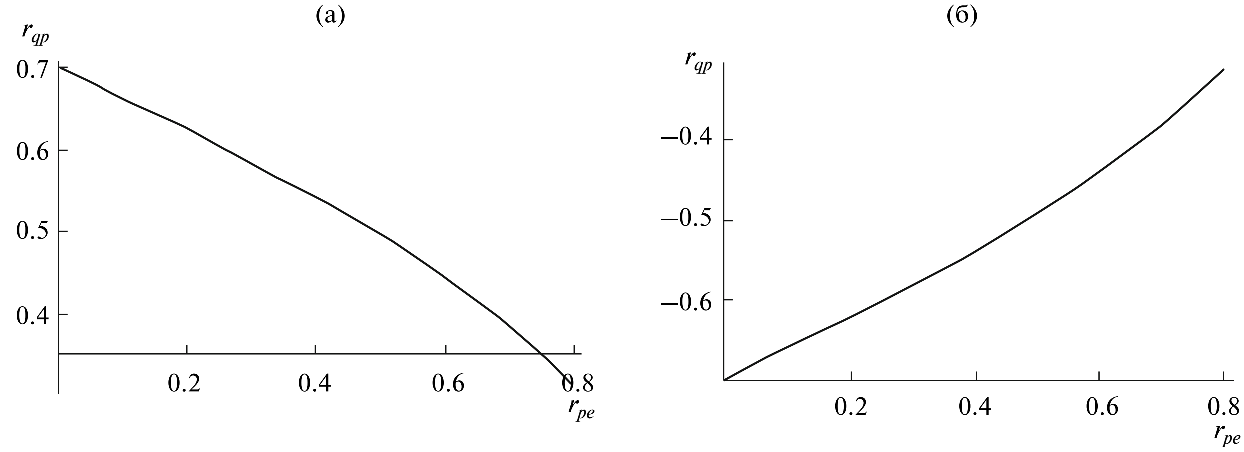

Рис. 3. Зависимости коэффициентов взаимной корреляции между речным стоком и осадками $r_{q\,p}$ (а) и между речным стоком и испарением $r_{q\,e}$ (б) от коэффициента взаимной корреляции между осадками и испарением r_p.

денные на рис. 3 графики вполне отвечают этим представлениям (построены для случая $\sigma_p^2 = \sigma_e^2 = 4.0$ и $r_p = r_e = 0.1$).

На рис. 3а видно, что, в соответствии с моделью (14) с увеличением взаимной корреляции между осадками и испарением корреляция между речным стоком и осадками уменьшается. Коэффициент r_{qe} (рис. 3б) отрицателен, что физически вполне понятно – чем больше испарение на водосборе, тем меньше сток.

ПРИМЕР ОЦЕНКИ СТАТИСТИЧЕСКИХ ХАРАКТЕРИСТИК СТОКА ПО ДИНАМИКО-СТОХАСТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Недостаточность или отсутствие натурных данных по многолетним колебаниям испарения и эффективных запасов воды на водосборе вынуждают прибегнуть к методу статистических испытаний для оценки корректности предложенной модели многолетних колебаний речного стока.

Проводимое тестирование необходимо для оценки точности вычисления статистических параметров стока по известным параметрам осадков и испарения с помощью аналитических формул (18)–(22).

С этой целью моделировались многолетние колебания стока с водосбора использованием зависимости стока от эффективных запасов воды на водосборе в виде (6) при $\alpha = 4.5$ год$^{-1}$. Ряды p_t и e_t моделировались с заданным взаимным коэффициентом корреляции $r_{pe} = 0.3$ (выборочная оценка этого коэффициента оказалась равной 0.301). Методика моделирования взаимозависимых рядов близка к предложенной в работе [15]. Ряд значений годового

Таблица 1. Статистические характеристики составляющих водного баланса модельного водосбора (для осадков и испарения без скобок – выборочные оценки характеристик для рядов, полученных методом статистических испытаний, в скобках – заданные значения этих характеристик; для речного стока без скобок – выборочные оценки по последовательности значений стока, полученной в соответствии с уравнением (6), в скобках – вычисленные с использованием формул (18)–(22) и для асимметрии – по приближенной формуле (24))

Характеристика	Осадки p_t	Испарение e_t	Речной сток q_t
Среднее, мм	640	460	180
Коэффициент			
вариации C_V	0.154 (0.15)	0.096 (0.10)	0.365 (0.365)
асимметрии C_S	0.196 (0.20)	0.298 (0.30)	–0.004 (–0.123)
автокорреляции r	0.15 (0.15)	0.101 (0.10)	0.293 (0.298)

Таблица 2. Статистические параметры основных составляющих водного баланса волжского водосбора по модели (14) и по данным [9] (в скобках), коэффициент взаимной корреляции между осадками и испарением равен 0.37)

Характеристика	Среднее, мм/год	C_V	Дисперсия, мм^2/год^2	r
Осадки	665	0.11	5350	0.07
Испарение	474	0.07	1100	–0.10
Сток Волги	191	0.17 (0.15)	1050 (820)	0.44 (0.43)

стока q_t вычислялся в соответствии с первым уравнением системы (14).

Статистические параметры составляющих водного баланса модельного водосбора приведены в табл. 1.

Результаты, представленные в табл. 1, а также сопоставление выборочных оценок коэффициентов взаимной корреляции $r_{qp} = 0.484$ и $r_{qe} = -0.673$, полученных по моделированным рядам, с соответствующими величинами $r_{qp} = 0.482$ и $r_{qe} = -0.675$, рассчитанными в соответствии с формулами (21) и (22), показывают обоснованность применения аналитических зависимостей (18)–(22).

МОДЕЛИРОВАНИЕ СТОКА ВОЛГИ

Для моделирования стока Волги (замыкающий створ г. Волгоград) использовались данные по осадкам, испарению и стоку р. Волги из статьи [9] . Параметр α для волжского водосбора принимался равным 1.98 год$^{-1}$ [25]. Параметры входных процессов модели (14) приведены в табл. 2.

Статистические характеристики стока Волги, полученные в соответствии с моделью (14) по формулам (18)–(22), приведены в табл. 2. Выборочные коэффициенты взаимной корреляции между стоком и осадками и между стоком и испарением равны 0.63 и –0.32 соответственно. Величины этих коэффициентов, полученные по модели (14) равны 0.84 и –0.07 соответственно.

Выборочные и полученные в соответствии с моделью (14) значения дисперсий и коэффициентов автокорреляции стока Волги практически совпадают, соответствующие значения коэффициента взаимной корреляции между стоком и осадками довольно близки. Наибольшее расхождение – между выборочными и полученными по модели оценками коэффициента взаимной корреляции между стоком и испарением. Принимая во внимание, что для выборочных оценок статистических характеристик стока Волги и испарения использовались восстановленные и расчетные значения [10], совпадение выборочных и полученных по модели (14) характеристик представляется удовлетворительным.

Таким образом, в рамках данной работы динамико-стохастическая модель многолетних колебаний стока Волги имеет вид

$$\begin{cases} q_t = 0.34q_{t-1} + 0.66(p_t - e_t) \\ p_t = 0.1p_{t-1} + n_{p,t} \\ e_t = -0.1e_t + n_{e,t} \end{cases}, \quad (26)$$

статистические параметры осадков и испарения задаются значениями из табл. 2. Сток Волги в данном случае моделируется компонентой трехкомпонентного марковского процесса.

Модель (26) описывает многолетние колебания осадков, испарения и стока Волги как стационарные случайные процессы. Однако при необходимости модель (26) может быть адаптирована к моделированию нестационарных процессов посредством, например, включения трендов в осадках и испарении. В этом случае, моделируя ансамбли реализаций соответствующих нестационарных входных процессов, можно оценить статистические характеристики нестационарного процесса многолетнего стока. Ансамбли реализаций осадков и испарения могут быть образованы на основе учета модельных сценариев изменения климата [14, 35].

ВЫВОДЫ

Разработана динамико-стохастическая модель многолетних колебаний стока с водосбора, позволяющая учитывать отрицательную автокоррелированность входных процессов – осадков и испарения. Эта модель представляет собой систему из трех линейных негауссовых стохастических разностных уравнений. Показано, что модель устойчива к малым возмущениям этих параметров.

На основе разработанной модели показана возможность отрицательности коэффициентов автокорреляции и асимметрии стока при некоторых соотношениях статистических параметров испарения и осадков.

Проведена проверка соответствия оценок статистических характеристик стока, полученных по аналитическим зависимостям, отвечающим динамико-стохастической модели многолетних колебаний стока с водосбора, и выборочных оценок, полученных по имитационной модели стока. Показано хорошее совпадение этих оценок.

Применительно волжскому водосбору показано, что разработанная модель удовлетворительно воспроизводит основные статистические характеристики многолетних колебаний стока Волги.

Представляется, что разработку предложенной стационарной линейной динамико-стохастической модели можно рассматривать как необходимый шаг к созданию нестационарных и нелинейных моделей многолетних колебаний речного стока, способных адекватно учитывать влияние климатических изменений на сток с водосборов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Батталов Ф.З.* Многолетние колебания атмосферных осадков и вычисление норм осадков. Л.: Гидрометеоиздат, 1968. 183 с.
2. *Бокс Д., Дженкинс Г.* Анализ временных рядов. Прогноз и управление. М.: Мир, 1974. Вып. 1. 406 с. Вып. 2. 197 с.
3. *Георгиевский М.В.* Особенности гидрометеорологического режима в бассейне Каспия в период повышения его уровня в 1978–1995 гг. // Гидрометеорологические аспекты проблемы Каспийского моря и его бассейна. СПб.: Гидрометеоиздат, 2003. С. 24–34.
4. *Гусев Е.М., Бусарова О.Е., Насонова О.Н.* К вопросу построения стохастических моделей колебаний испарения с поверхности суши // Вод. ресурсы. 1996. Т. 23. № 1. С. 5–11.
5. *Голубев В.С., Сперанская Н.А., Цыценко К.В.* Суммарное испарение в бассейне Волги и его изменчивость // Гидрометеорологические аспекты проблемы Каспийского моря и его бассейна. СПб.: Гидрометеоиздат, 2003. С. 35–53.
6. *Давыдов Л.К.* Водоносность рек СССР ее колебания и влияние на нее физико-географических факторов. Л.: Гидрометеоиздат,1947. 162 с.
7. *Добровольский С.Г.* Климатические изменения в системе “гидросфера–атмосфера”. М.: ГЕОС, 2002. 231 с.
8. *Долгоносов Б.М.* Нелинейная динамика экологических и гидрологических процессов. М.: Книжный дом “ЛИБРОКОМ”, 2008. 438 с.
9. *Исмайылов Г.Х., Федоров В.М.* Межгодовая изменчивость и взаимосвязь элементов водного баланса бассейна р. Волги // Вод. ресурсы. 2008. Т. 35. № 3. С. 259–276.
10. *Крицкий С.Н., Менкель М.Ф.* Гидрологические основы управления водохозяйственными системами. М.: Наука, 1982. 271с.
11. *Кучмент Л.С., Гельфан А.Н.* Динамико-стохастические модели формирования речного стока. М.: Наука, 1993. 104 с.
12. *Малахов А.Н.* Кумулянтный анализ негауссовых случайных процессов. М.: Сов. радио, 1978. 562 с.
13. *Монин А.С.* Прогноз погоды как задача физики. М.: Наука, 1969. 183 с.
14. *Мохов И.И., Семенов В.А., Хон В.Ч.* Региональные вариации гидрологического режима в XX веке и модельные сценарии их изменений в XXI веке // Глобальные изменения климата и их последствия для России / Под ред. Голицына Г.С., Израэля Ю.А. М.: МНиТ РФ, 2002. С. 310333.
15. *Музылев С.В., Фролов А.В.* Статистическое моделирование многомерного гидрологического процесса // Вод. ресурсы. 1978. № 3. С. 14–21.
16. *Найденов В.И., Швейкина В.И.* Динамика многолетних колебаний речного стока и климат // Водные проблемы на рубеже веков. М.: Наука, 1999. С. 28–54.
17. Пространственно-временные колебания стока рек СССР / Под ред. Рождественского. А.В. Л.: Гидрометеоиздат, 1988. 376 с.
18. *Раткович Д.Я.* Закономерности чередования маловодных и многоводных лет как основа расчетов регулирования речного стока // Тр. ГГИ. 1970. Вып. 180. С. 179–293.
19. *Раткович Д.Я.* Актуальные проблемы водообеспечения. М.: Наука, 2003. 352 с.
20. *Раткович Д.Я., Болгов М.В.* Стохастические модели колебаний составляющих водного баланса речного бассейна. М.: ИВП РАН, 1997. 262 с.
21. *Румянцев В.А., Бовыкин И.В.* Пространственно-временные закономерности колебаний стока Евразии. Л.: Наука, 1985. 148 с.
22. *Стратонович Р.Л.* Избранные вопросы теории флюктуаций в радиотехнике. М.: Сов. радио, 1961. 558 с.
23. *Тихонов В.И., Миронов М.А.* Марковские процессы. М.: Сов. радио, 1977. 488 с.
24. *Фролов А.В.* Динамико-стохастические модели многолетних колебаний уровня проточных озер. М.: Наука, 1985. 103 с.
25. *Фролов А.В.* Динамико-стохастическое моделирование многолетних колебаний речного стока // Вод. ресурсы. 2006. Т. 33. № 5. С. 1–11.

26. *Христофоров А.В.* Возможности статистического анализа при выявлении антропогенных изменений в режиме элементов гидрологического цикла // Вод. ресурсы. 1995. Т 22. № 3. С. 324–329.
27. *Fiering M.B.* Streamflow synthesis. Mass: Harvard Univer. Press, 1967. 265 p.
28. *Klemeš V.* Negatively skewed distribution of runoff // IASH Publ. 1970. № 96. P. 219–236.
29. *Klemeš V.* Physically based stochastic hydrologic analisis // Advances in Hydroscience. 1978. V. 11. P. 285–356.
30. *Klemeš V.* The essence of mathematical models of reservoir storage // Canadian journal of civil engineering. 1982. V. 9. № 4. P. 624–635.
31. *Klemeš V.* Conceptualization and scale in hydrology // J. of Hydrology. 1983. V. 65. № 1/2. P. 1–23.
32. *Lee C.-C., Tan Y.-C., Chen C.-C., Yeh T.-C.J.* Stochastic series lumped rainfall-runoff model for a watershed in Taiwan // J. of Hydrology. 2001. V. 249. № 1/2. P. 30–45.
33. *Salas I.L., Smith R.A.* Physical bases of stochastic models of annual flows//Water Resour. Res. 1982. V. 18. № 3. P. 331–334.
34. *Unny T.E.* Solutions to nonlinear stochastic differential equations in catchment modelling // Stochastic Hydrology / Eds. MacNeil I.B., Umphrey G.J. N.Y., 1987. P. 87–111.
35. *Xu C.-Y., Singh V.P.* Review on regional water resources assessment models under stationary and changing climate// Water resources management. 2004. V. 8. P. 591–612.