

ГИДРОФИЗИЧЕСКИЕ ПРОЦЕССЫ

УДК 556.556.4;556.555.5

СЕЙШИ ПОДО ЛЬДОМ¹

© 2011 г. В. Н. Зырянов

Институт водных проблем Российской академии наук

119333 Москва, ул. Губкина, 3

Поступила в редакцию 04.05.2010 г.

Рассмотрен замкнутый водоем, покрытый льдом, с однородной по плотности водой. На нижней границе льда и на дне для скорости течения поставлены условия прилипания. На боковой границе водоема рассмотрены два варианта граничных условий — либо имеется твердая вертикальная стенка с конечной глубиной жидкости, либо жидкость выклинивается до нулевых значений глубины. Лед либо жестко припаян к берегу, либо отделяется от берега польшей. Выведено основное уравнение 4-го порядка на амплитуду колебаний льда. Учет трения приводит к возникновению редуцированной глубины. Для нахождения периодов сейш решается задача на собственные значения. Для случая, когда жидкость выклинивается на берегу, основное уравнение становится сингулярным на границах водоема. Рассмотрено озеро, продольный разрез глубин которого можно аппроксимировать параболой. Решение найдено методом сращиваемых асимптотических разложений. Во внутренней области вне пограничных слоев уравнение сведено к уравнению Лежандра, которое дает новую зависимость для спектра сейшевых колебаний как при наличии льда, так и для открытой воды в озере с переменной глубиной. На краях озера, где жидкость выклинивается, возникают пограничные слои, в которых найдено решение.

Ключевые слова: лед, озеро, длинные волны, сейши, редуцированная глубина, формула Мериана, уравнение Лежандра.

Динамика вод в озерах в зимний период, когда озеро покрыто льдом, и в период открытой воды существенно различается. Причина заключается в том, что лед, как твердая крышка, экранирует водную толщу от прямого воздействия ветра и солнечной радиации на поверхность воды. При наличии льда исчезает и такой интенсивный источник турбулентности и перемешивания как ветровое волнение. Однако сказанное не означает, что в зимний период гидродинамические процессы подо льдом прекращаются. Ледовый покров не является абсолютно жесткой крышкой. Упругость льда, процессы сжатия и расширения ледового покрова, а также силы плавучести способствуют передаче импульса от атмосферы к нижележащим слоям воды. Течения подо льдом в озерах присутствуют и в зимний период, но скорости течений порой становятся такими малыми, что их с трудом удается зафиксировать приборами. В проточных озерах наиболее интенсивный источник подледных течений — транзитные потоки, обусловленные впадающими и вытекающими реками. В бессточных озерах, когда отсутствуют транзитные потоки, физическими причинами возникновения подледных течений становятся процессы, проявление которых в период открытой воды пренебрежимо мало. Начинают работать такие эффекты как неравномерное проникновение

солнечной радиации сквозь лед или теплообмен с донными осадками.

В [19] на основе экспериментального исследования подледных течений в Канаде в озерах Васкесью и в зал. Вьюпау Южно-Индианского оз. было показано, что подо льдом имеются течения со скоростями ~0.3–1 см/с. Причина возникновения этих течений в том, что на одних и тех же горизонтах температура воды в литорали оказывается выше, чем в глубоководной части. А так как температура воды <4°C, то более теплая вода оказывается тяжелее. В результате возникает градиент плотности воды, который приводит к адвекции воды из литоральной области в глубоководную часть озера. Такая неравномерность температуры объясняется разным проникновением солнечной радиации сквозь лед.

В [17] рассматривается перемешивание вод в озере подо льдом, вызываемое транзитным течением, колебаниями ледяного покрова, конвективными течениями, индуцируемыми потоком тепла от осадков на литорали, неравномерным проникновением солнечной радиации сквозь лед. Течения от тепла донных осадков идут вдоль берегового склона в глубоководную часть. Возникают они от того, что донные осадки ближе к берегу имеют более высокую температуру и подогревают воду. Этот процесс происходит всю зиму, но с очень малыми скоростями. Конвекция, вызванная проникновением солнечной радиации через лед, более эффективная, но

¹ Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 09-05-00651).

она обычно становится существенной в последние месяцы зимы перед вскрытием льда. Этот тип течений экспериментально исследовался в оз. Эркен в Швеции [16, 18] с помощью трассеров. Было обнаружено, что трассеры уходили от побережья вдоль свала глубин со скоростью 5×10^{-2} см/с (наклон берега составлял 1 : 10).

Отдельные аспекты подледных течений изучались во многих работах. Турбулентность подо льдом рассматривалась, например, в [3–5]. В частности, в [3] было показано, что кинематический коэффициент вертикального турбулентного обмена для подледного течения, несмотря на малые скорости течений, может составлять $50\text{--}75$ см²/с.

Однако изучению собственных колебаний водной массы озер в зимний период, а именно — сейшевых колебаний подо льдом, посвящено мало работ. Хотя история исследований сейшевых колебаний озер насчитывает 120 лет, начиная с наблюдений Ф.А. Фореля за колебаниями уровня Женевского оз. в 1890 г., вопрос о влиянии льда на сейши остается совершенно неизученным. По всей видимости, первыми, кто указал на существование сейш подо льдом, были В.Н. Соловьев и В.Б. Шостакович [13]. Ими в 1926 г. в результате наблюдений на оз. Байкал было обнаружено, что сейши не прекращаются и в зимний период, хотя, казалось бы, метровый байкальский лед должен был гасить их генерацию. Выяснилось, что в зимний период сейши подо льдом из-за отсутствия ветрового воздействия имеют более правильную периодичность. Попытка более детального анализа особенностей сейш подо льдом в оз. Байкал была предпринята в [10]. Было показано, что периоды одноузловой и двухузловой сейш подо льдом в оз. Байкал такие же, как для открытой воды, — соответственно 4 ч 37 мин и 2 ч 33 мин. А вот амплитуда первой гармоники при наличии льда существенно уменьшается (в 2 и более раз), амплитуды же второй и последующих гармоник существенно возрастают. Механизм, с помощью которого энергия колебаний смещается по спектру от низших к более высоким гармоникам при наличии льда, остался тогда не ясен. Аналогичный вывод о существенном уменьшении энергии первой гармоники, т.е. одноузловой сейши, при наличии льда был получен в [2]. Интересная особенность была обнаружена в повторяемости сейшевых гармоник [2, 13] — наибольшую повторяемость за год в Байкале имеют первая гармоника (84%) и, как ни странно, четвертая (46%). На долю второй приходится только 7, а третьей и остальных — по 1% и меньше. Детальный обзор результатов по сейшам в озерах в безледный период приведен в [1].

В [20] описываются результаты исследований колебаний уровня на четырех озерах Финляндии — Инари, Пиелинен, Пяйанне и Саймаа. Было обнаружено, что короткопериодные флуктуации уровней озер имеют место всегда, даже когда они

покрыты толстым слоем льда. Наблюдаемые осцилляции уровня некоторое время были хорошо периодичными, затем периодичность сбивалась, но через некоторое время восстанавливалась вновь. Анализ показал, что это были сейши с периодами 80 и 45 мин, первая — одноузловая, вторая — двухузловая. В диапазоне периодов от 20 до 120 мин в данной работе были построены зависимости частоты появления того или иного периода колебаний уровня для открытой воды и для зимнего периода. Из графика следует, что в открытой воде имеют место более короткопериодные колебания (~22 мин), а при наличии льда — более долгопериодные (~27–28 мин). Это означает, что лед увеличивал периоды колебаний. Распределение частот возникновения того или иного периода имело бимодальную структуру — при наличии льда четко выделялось два пика — первая и вторая мода сейш. Интересно, что первая мода подо льдом ~80–82 мин, а для открытой воды период уменьшался до 60–65 мин. Для открытой воды оба пика по ширине были сильно размазаны. Выявлена связь между появлением сейшевых колебаний и прохождением атмосферных барических возмущений. Кроме того, было отмечено, что сейши могут быть причиной различия в структуре льда в разных частях озера.

Экспериментальные работы на оз. Торн Траск на севере Швеции детально описаны в [18], где также указывается на сейши подо льдом. В [17] генерация сейшевых колебаний связывается с воздействием ветра. Показано, что сейшевые колебания — наиболее эффективный механизм горизонтального перемешивания. Коэффициент горизонтального обмена составлял ~100 см²/с. Экспериментальные исследования в оз. Эркен описаны в [16]. Это озеро имеет длину 9 км, ширину 3 км, максимальную глубину 20 м. Зафиксированы колебания льда и положений буев (буи опускались в полынью, которую сверху закрывали тентом от воздействия ветра) с периодами 20–22 мин. Остаточные течения составляли 0.05–0.3 см/с.

В [19] отмечено расхождение между измеренным периодом сейш подо льдом и вычисленным по формуле Мериана. Спектральным анализом из записей температуры был выделен период 42.9 мин. Однако формула Мериана дает период 48.9 мин. Вероятнее всего, это первая мода баротропной сейши, период которой надо было вычислять с учетом льда.

Теоретических работ по сейшам подо льдом практически нет. В [11] рассматривается задача о влиянии внутренних волн на колебания ледяного покрова. Теоретически показано, что внутренние волны могут проявляться в колебаниях ледяного покрова, причем максимум прогиба льда наблюдается на частотах, близких к частоте Вайсяля–Брента. Единственное, пожалуй, основательное теоретическое исследование сейш подо льдом в последнее время было сделано в работе [14]. Были изучены

сейшевые колебания жидкости в двумерном водоеме постоянной глубины. Показано, что собственные функции при наличии льда и без него очень близки. Значительное отличие имеет место только при условии жесткого (припайного) крепления льда к берегу, но только на расстоянии ~100 м от берега. Показано, что учет силы Кориолиса мало влияет на частоты и собственные функции. Максимальное значение прогибов льда отмечается только в случае припая и, причем, вблизи берега. Здесь возможно взламывание припая сейшами. Движущиеся барические возмущения вызывают генерацию сейш, причем, не всегда. Если скорость движения барического возмущения меньше скорости длинных гравитационных волн в открытой воде \sqrt{gH} примерно в 3.5 раза, то генерация сейш наблюдается. При более медленных перемещениях барического возмущения генерация сейш практически незаметна. Это связано, по-видимому, с резонансным возбуждением сейш, но причина именно такого соотношения скоростей остается неясной.

В последние годы проблема сейшевых волн подо льдом стала одним из направлений исследований Института водных проблем Севера (ИВПС) КарНЦ РАН на Карельских озерах. Начиная с 1994 г. ИВПС КарНЦ РАН планомерно ведет экспериментальные исследования на оз. Вендюрском в зимний период [12]. Оз. Вендюрское имеет длину 7 км, ширину 2 км, максимальную глубину 13.4 м, среднюю глубину 5.3 м. Получение репрезентативных данных стало возможным благодаря появлению в последнее время высокоточной аппаратуры, позволяющей измерять малые значения скоростей течений и колебаний льда. Были зафиксированы колебания скоростей течений с периодами 26–29 мин и 5–6 мин [12]. Первые соответствуют первой моде продольной сейши, а вторые – первой моде поперечной сейши. Основной период продольных колебаний, определенный спектральным анализом, составлял 26.9 мин.

Проведенный обзор исследований сейшевых колебаний озер показывает, что проблема сейш подо льдом совершенно не изучена, особенно теоретически. Как было видно, имеется целый ряд гидродинамических явлений в озерах в зимний период, не имеющих до сих пор теоретических объяснений.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим замкнутый водоем, покрытый льдом, вода предполагается однородной по плотности. Скорости течения подо льдом обычно бывают малыми, поэтому нелинейностью в уравнениях движения можно пренебречь. Так как периоды сейш намного меньше инерционного периода, ускорением Кориолиса можно также пренебречь. Тем более, что в [14] было показано, что учет ускорения Кориолиса

мало влияет на периоды и форму сейш. В результате исходная система уравнений принимает вид

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial x} + A \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (1)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial y} + A \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \quad (2)$$

$$g\rho_0 = \frac{\partial P}{\partial z}, \quad (3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad (4)$$

где u, v – горизонтальные составляющие скорости течения соответственно по осям X и Y , w – вертикальная составляющая скорости течения, P – давление в жидкости, g – ускорение свободного падения, ρ_0 – плотность воды (принимается постоянной), A – коэффициент вертикального турбулентного обмена (константа). Ось Z направлена вертикально вниз. Начало координат расположено на невозмущенной поверхности водоема (нижняя граница льда). Пока будем считать, что ледовый покров жестко прикреплен к берегам.

Граничные условия

На нижней границе льда $z = \zeta(x, y, t)$ и на дне $z = H(x, y)$ ставятся условия прилипания

$$\begin{aligned} u|_{z=\zeta} = v|_{z=\zeta} = 0; \quad w|_{z=\zeta} = \frac{\partial \zeta}{\partial t}; \\ u|_{z=H} = v|_{z=H} = w|_{z=H} = 0, \end{aligned} \quad (5)$$

на боковой границе водоема $L(x, y)$ – равенство нулю интегрального расхода (полного потока) по нормали \vec{n} к границе

$$(\vec{S}, \vec{n}) = 0, \quad \text{где } \vec{S} = \int_{\zeta}^H \vec{U} dz, \quad \vec{U} = (u, v). \quad (6)$$

Интегрируя уравнение гидростатики (3) от верхней границы жидкости $z = \zeta(x, y, t)$ до горизонта z , получим для давления в жидкости

$$P(x, y, z, t) = P|_{z=\zeta} + g\rho_0(z - \zeta). \quad (7)$$

Давление $P|_{z=\zeta}$ на нижней поверхности льда равно атмосферному давлению P_a плюс добавка P_{ice} за счет изгиба льда, его сжатия–расширения и сил плавучести. Лед моделируется упругой пластиной толщиной h_{ice} . Давление на нижней границе такой пластины имеет выражение [11]

$$P_{ice} = \rho_0 \left(\tilde{S} \Delta^2 \zeta + Q \Delta \zeta + M \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} \right),$$

где

$$\tilde{S} = \frac{Eh_{\text{ice}}^3}{12(1-\mu^2)\rho_0}, \quad Q = \frac{\tilde{k}h_{\text{ice}}}{\rho_0}, \quad M = \frac{\rho_{\text{ice}}h_{\text{ice}}}{\rho_0},$$

\tilde{S} – цилиндрическая жесткость льда, E – модуль Юнга, μ – коэффициент Пуассона, \tilde{k} – коэффициент сжатия (растяжения) льда, ρ_{ice} – плотность льда, h_{ice} – толщина льда, $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ – оператор Лапласа.

Характерные значения этих коэффициентов при толщине льда 1 м [11] – $\tilde{S} \approx 5 \times 10^6$ м⁵/с², $Q \approx 10^3$ м³/с², $M \approx 0.9$ м. Приводя к безразмерному виду выражение P_i при характерных значениях длины волны ~1 км и периоде ~10 мин, получим для безразмерных коэффициентов значения $\tilde{S} \sim 5 \times 10^{-6}$, $Q \sim 10^{-3}$, $M \sim 3 \times 10^{-6}$. Таким образом, доминирующим членом в давлении P_{ice} будет член с оператором Лапласа

$$P_{\text{ice}} = \rho_0 Q \Delta \zeta. \quad (8)$$

Этот вывод можно было получить и из других соображений. Действительно, давление P_{ice} должно выражаться через кривизну изгиба льда и силы инерции Даламбера за счет его вертикальных ускорений. Принимая, что вертикальные движения ледяного покрова малы, пренебрежем составляющей давления из-за его вертикального ускорения. Тогда будем иметь

$$P_{\text{ice}} = \tilde{T} \left[\frac{\zeta_{xx}}{(1+\zeta_x^2)^{3/2}} + \frac{\zeta_{yy}}{(1+\zeta_y^2)^{3/2}} \right], \quad (9)$$

где \tilde{T} – коэффициент пропорциональности, зависящий от физических свойств льда.

Нижний индекс в (9) означает дифференцирование по переменной. В силу того, что уклоны льда ζ_x и ζ_y малы по сравнению с единицей, знаменатели в (9) можно заменить единицей и выражение (9) упростить

$$P_{\text{ice}} = \tilde{T} \Delta \zeta. \quad (10)$$

Таким образом, приходим к тому же выражению для P_{ice} . Сравнивая (10) и (8), получим связь коэффициентов $\tilde{T} = \tilde{k}h_{\text{ice}}$. Для \tilde{k} характерное значение составляет 10^6 Н/м². Из (8) следует, что основной вклад в давление P_{ice} вносят силы растяжения-сжатия льда, возникающие при его изгибных деформациях.

ОСНОВНОЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ УРОВНЯ ВОДОЕМА, ПОКРЫТОГО ЛЬДОМ

Подставляя (10) в (7) и далее в (1) и (2), получим

$$\frac{\partial u}{\partial t} = g \frac{\partial \zeta}{\partial x} - \frac{\tilde{T}}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial x} \Delta \zeta + A \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (11)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} = g \frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\tilde{T}}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial y} \Delta \zeta + A \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}. \quad (12)$$

Будем искать волновые решения системы (11), (12) в виде

$$u = \bar{u} e^{i\omega t}, \quad v = \bar{v} e^{i\omega t}, \quad (13)$$

где \bar{u} и \bar{v} – амплитуды волновых колебаний скорости, ω – частота волны.

Далее ограничимся выкладками только для первого уравнения (11), для уравнения (12) все вкладки проводятся аналогично. Подставляя (13) в (11) и полагая $\zeta = \bar{\zeta} e^{i\omega t}$, получим

$$i\omega \bar{u} = g \bar{\zeta}_x - \frac{\tilde{T}}{\rho_0} \Delta \bar{\zeta}_x + A \bar{u}_{zz}. \quad (14)$$

Интегрируя линейное уравнение (14) по z с учетом условий (5) относительно \bar{u} , найдем общее решение

$$\bar{u} = \frac{1}{i\omega} \left(g \bar{\zeta}_x - \frac{\tilde{T}}{\rho_0} \Delta \bar{\zeta}_x \right) \times \left(1 + \frac{e^{-\lambda H} - 1}{e^{\lambda H} - e^{-\lambda H}} e^{\lambda z} + \frac{1 - e^{\lambda H}}{e^{\lambda H} - e^{-\lambda H}} e^{-\lambda z} \right), \quad (15)$$

где $\lambda = \sqrt{\frac{i\omega}{A}}$. Интегрируя (15) от 0 до H , получим комплексное выражение для амплитуды полного потока по x

$$\bar{S}_{(x)} = \int_0^H \bar{u} dz = \frac{1}{i\omega} \left(g \bar{\zeta}_x - \frac{\tilde{T}}{\rho_0} \Delta \bar{\zeta}_x \right) \left[H - \frac{2}{\lambda} \text{th} \left(\frac{\lambda H}{2} \right) \right], \quad (16)$$

где th – гиперболический тангенс.

Нижняя граница интегрирования в (16) снесена с поверхности $z = \zeta$ на $z = 0$ в силу малости вертикальных смещений поверхности льда ζ по отношению к общей глубине водоема H .

Проинтегрировав уравнение неразрывности (4) по z от $z = \zeta$ до $z = H$ с учетом граничных условий (5), получим уравнение неразрывности в полных потоках

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = \frac{\partial S_{(x)}}{\partial x} + \frac{\partial S_{(y)}}{\partial y} \quad (17)$$

или для амплитуд

$$i\omega \bar{\zeta} = \frac{\partial \bar{S}_{(x)}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{S}_{(y)}}{\partial y}. \quad (18)$$

Подставляя в (18) выражение (16) и аналогичное выражение для $\bar{\zeta}_{(y)}$, получим основное уравнение для амплитуды колебаний льда

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[\left(g\bar{\zeta}_x - \frac{\tilde{T}}{\rho_0} \Delta \bar{\zeta}_x \right) \tilde{H} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\left(g\bar{\zeta}_y - \frac{\tilde{T}}{\rho_0} \Delta \bar{\zeta}_y \right) \tilde{H} \right] + \omega^2 \bar{\zeta} = 0, \quad (19)$$

где

$$\tilde{H} = H - \frac{2}{\lambda} \operatorname{th} \left(\frac{\lambda H}{2} \right). \quad (20)$$

Ограничимся далее анализом одномерного варианта уравнения (19)

$$\frac{d}{dx} \left[\left(g\bar{\zeta}_x - \frac{\tilde{T}}{\rho_0} \bar{\zeta}_{xxx} \right) \left(H - \frac{2}{\lambda} \operatorname{th} \left(\frac{\lambda H}{2} \right) \right) \right] + \omega^2 \bar{\zeta} = 0. \quad (21)$$

Итак, в случае водоема, покрытого льдом, для описания колебаний льда имеем уравнение 4-го порядка в отличие от уравнения 2-го порядка для водоема с открытой поверхностью.

Для нахождения решения уравнения (21) в ограниченном бассейне должна ставиться задача на собственные колебания. Порядок уравнения требует задания четырех граничных условий – по два на каждом конце бассейна. Первые два граничных условия следуют из требования припайности льда на берегу

$$\bar{\zeta}|_{x=0} = \bar{\zeta}|_{x=L} = 0. \quad (22)$$

Вторые два граничных условия вытекают из требования равенства нулю интегрального расхода по нормали к берегу. Исходя из вида выражения для полного потока (16), это приводит к двум типам граничных условий

граничное условие у вертикальной береговой стенки, когда $\tilde{H} \neq 0$,

$$\left(\bar{\zeta}_x - \frac{\tilde{T}}{\rho_0} \bar{\zeta}_{xxx} \right) \Big|_{x=0, x=L} = 0, \quad (23)$$

граничное условие на наклонном берегу, когда жидкость выклинивается и глубина при подходе к берегу стремится к нулю $H|_{x=0} = H|_{x=L} = 0$.

Кроме условий (22), (23) должно выполняться условие постоянства объема воды в водоеме

$$\iint_{SF} \bar{\zeta}(x, y) dx dy = 0, \quad (24)$$

где SF – площадь поверхности водоема. В одномерном случае двойной интеграл переходит в одинарный по x от 0 до L .

Во втором случае граничных условий видно, что уравнение (21) становится сингулярным на обеих границах области и его ограниченные решения мо-

гут не существовать. В конце статьи эта проблема будет рассмотрена детально.

Отметим существенные различия свободных колебаний в задачах для открытого водоема и для водоема, покрытого льдом. В первом случае на берегу также ставится условие непротекания для интегрального расхода, но из-за отсутствия условия неподвижности поверхности воды на берегу (22) это условие равносильно условию Неймана $\frac{\partial \zeta}{\partial x} \Big|_{x=0, L} = 0$. Именно это условие и дает формулу Мериана для периодов сейш в озере длины L и глубины H

$$T_n = \frac{2L}{n\sqrt{gH}}, n = 1, 2, 3, \dots$$

При наличии закрепленного по берегам льда условие $\frac{\partial \zeta}{\partial x} \Big|_{x=0, L} = 0$ не выполняется, и поэтому использование формулы Мериана для сейш подо льдом должно вызывать сомнения. По крайней мере, в случае припайного льда сразу видно основное отличие от сейш для открытой воды – первая мода сейшевых колебаний для открытого водоема одноузловая, а для водоема с припайным льдом – трехузловая, так как два узла обязательно должны быть на берегу.

ДЛИННЫЕ ВОЛНЫ ПОДО ЛЬДОМ В НЕОГРАНИЧЕННОМ БАССЕЙНЕ. ДИСПЕРСИОННОЕ СООТНОШЕНИЕ

Параметр λ в (21) – комплексное число

$$\lambda = \sqrt{\frac{i\omega}{A}} = \sqrt{\frac{\omega}{2A}}(1+i) = \alpha(1+i), \text{ где } \alpha = \sqrt{\frac{\omega}{2A}}. \quad (25)$$

Наличие мнимой составляющей в (21) – следствие учета в уравнениях (1), (2) турбулентного трения. Это приводит к появлению декремента затухания в волновых движениях. Найдем дисперсионное соотношение для волновых колебаний ледовой поверхности в неограниченном бассейне. Подставляя в (21) $\bar{\zeta} = \zeta_0 e^{ikx}$, где k – волновое число, получим дисперсионное соотношение для волн в водоеме, покрытом льдом,

$$\left(gk^2 + \frac{\tilde{T}}{\rho_0} k^4 \right) \tilde{H}(\omega) = \omega^2. \quad (26)$$

В отсутствие вязкости $A = 0$ будет $\tilde{H}(\omega) = H$, и в случае открытой воды уравнение (26) дает классическое дисперсионное соотношение для длинных гравитационных волн на поверхности жидкости

$$\frac{\omega}{k} = \sqrt{gH}. \quad (27)$$

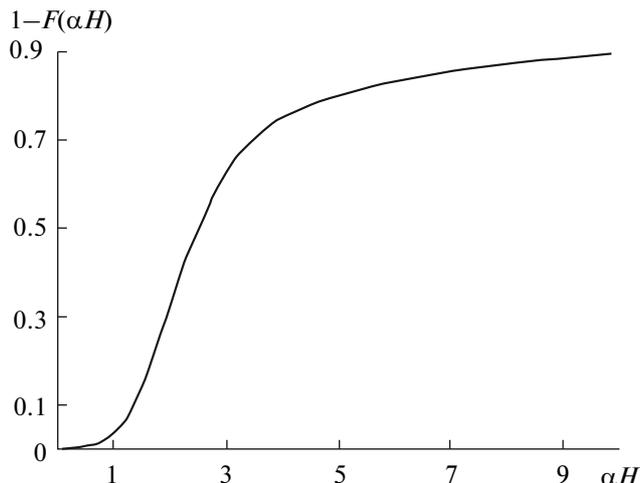


Рис. 1. График функции $1 - F(\alpha H)$ в выражении для редуцированной глубины $H_{red} = H[1 - F(\alpha H)]$.

Если при наличии льда пренебречь вязкостью, то дисперсионное соотношение будет

$$\omega = \sqrt{gHk} \left(1 + \frac{\tilde{T}}{g\rho_0} k^2 \right)^{1/2}. \quad (28)$$

Из (28) видно, что в отличие от открытой воды наличие льда приводит к дисперсности длинных волн, когда фазовая скорость зависит от длины волны.

Для определения связи частоты, волнового числа и декремента затухания отделим действительную и мнимую части в выражении для \tilde{H} в (20). Будем иметь с учетом (25)

$$\text{th}\left(\frac{\lambda H}{2}\right) = \frac{\text{th}\left(\frac{\alpha H}{2}\right) + itg\left(\frac{\alpha H}{2}\right)}{1 + itg\left(\frac{\alpha H}{2}\right)\text{th}\left(\frac{\alpha H}{2}\right)}, \quad (29)$$

где tg – тригонометрический тангенс. С учетом (29) получим

$$\tilde{H} = H - H_1 - iH_2 = H[1 - F(\alpha H) - iG(\alpha H)], \quad (30)$$

где

$$F(\alpha H) = \frac{\sin \alpha H + \text{sh} \alpha H}{2\alpha H \left(\text{ch}^2 \frac{\alpha H}{2} - \sin^2 \frac{\alpha H}{2} \right)}, \quad (31)$$

$$G(\alpha H) = \frac{\sin \alpha H - \text{sh} \alpha H}{2\alpha H \left(\text{ch}^2 \frac{\alpha H}{2} - \sin^2 \frac{\alpha H}{2} \right)},$$

где sh и ch – гиперболический синус и косинус.

Принимая во внимание (30), можно написать дисперсионное соотношение (26) в виде

$$\omega = \sqrt{gH[1 - F(\alpha H)]} k \left(1 + \frac{\tilde{T}}{g\rho_0} k^2 \right)^{1/2}. \quad (32)$$

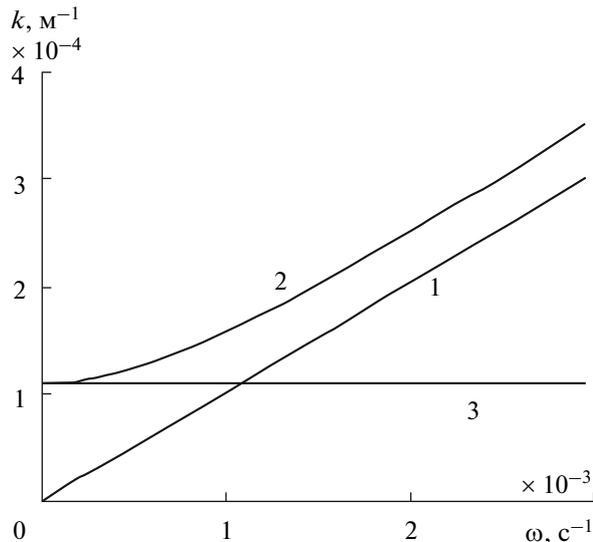


Рис. 2. Дисперсионные кривые $k(\omega)$ при $r = 10^3 \text{ м}^2$, $A = 10^{-2} \text{ м}^2/\text{с}$, $H = 10 \text{ м}$. 1 – для открытой воды (27), 2 – для водоема, покрытого льдом (33), 3 – предельное значение волновых чисел (34).

Будем в дальнейшем величину $H_{red} = H[1 - F(\alpha H)]$ под корнем в (32) называть приведенной или редуцированной глубиной водоема. Так как $\alpha = \sqrt{\omega/2A}$, то редуцированная глубина зависит от частоты ω . На рис. 1 приведен график функции $1 - F(\alpha H)$, который показывает, что чем больше глубина озера или величина α , тем ближе к единице значение этого поправочного множителя в выражении для H_{red} .

Решая биквадратное уравнение (26) относительно волнового числа k , получим

$$k(\omega) = \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 + \frac{4r\omega^2}{gH_{red}(\omega)}}}{2r}}, \quad (33)$$

где $r = \tilde{T}/g\rho_0$. На рис. 2 приведен график зависимости k от ω по (33) и для сравнения график зависимости (27). Из рисунка видно, что при $\omega \rightarrow 0$ функция $k(\omega)$ стремится к конечному пределу, отличному от 0. Это означает, что существует максимальная длина волны, больше которой волны существовать не могут. Для нахождения этого предела разложим входящие в $F(\alpha H)$ функции до четвертого порядка. Проводя вычисления, получим

$$\lim_{\omega \rightarrow 0} k(\omega) = \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 + \frac{16rA^2}{gH^5 \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{5!} \right)}}}{2r}}. \quad (34)$$

В (34) 5! означает факториал.

При $r = 10^3 \text{ м}^2$, $A = 10^{-2} \text{ м}^2/\text{с}$, $H = 10 \text{ м}$ выражение (34) дает предельное значение $k(\omega)$, равное $1.1 \times 10^{-4} \text{ м}^{-1}$. Это соответствует предельной длине волны 57 км.

Итак, лед приводит к существенным отличиям выражения (26) от классического дисперсионного соотношения для длинных гравитационных волн на открытой поверхности безграничного водоема

СЕЙШИ В ОЗЕРЕ ПОДО ЛЬДОМ

Сейши возникают как собственные колебания замкнутых или полужамкнутых водоемов. Параметры сейш находятся из решения краевой задачи определения спектра собственных колебаний для уравнения (21) с граничными условиями (22) и (23). В случае переменного рельефа дна уравнение (21) можно решить только численно, за исключением, может быть, нескольких частных случаев распределения глубин водоема. Однако при постоянной глубине водоема спектр собственных частот можно получить аналитически.

При $H = H_0 = \text{const}$ будем иметь из (21)

$$-\frac{\tilde{T}}{\rho_0} \bar{\zeta}_{xxxx} + g \bar{\zeta}_{xx} + \frac{\omega^2}{H_{\text{red}}(\omega)} \bar{\zeta} = 0. \tag{35}$$

Характеристическое уравнение для (35) будет

$$-\frac{\tilde{T}}{\rho_0} \tau^4 + g \tau^2 + \frac{\omega^2}{H_{\text{red}}(\omega)} = 0,$$

корни которого даются выражением

$$\tau_{1, 2, 3, 4} = \pm \sqrt{\frac{-1 \pm \sqrt{1 + \gamma}}{-2r}}, \tag{36}$$

где

$$\gamma = \frac{4\tilde{T}\omega^2}{g^2 \rho_0 H_{\text{red}}(\omega)}, \quad r = \tilde{T}/(g\rho_0).$$

Общее решение уравнения (35) запишется в виде

$$\bar{\zeta} = C_1 \text{ch}(\tau_1 x) + C_2 \text{sh}(\tau_1 x) + C_3 \cos(\tau_2 x) + C_4 \sin(\tau_2 x), \tag{37}$$

где

$$\tau_1 = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 + \gamma}}{2r}}, \quad \tau_2 = \sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 + \gamma}}{2r}}. \tag{38}$$

Сейши в озере с припайным льдом

Подставляя (37) в граничные условия (22) и (23), получим однородную систему четырех уравнений для определения неизвестных констант C_i

$$B\vec{C} = 0, \tag{39}$$

где $\vec{C} = (C_1, C_2, C_3, C_4)^{TR}$, TR означает транспонирование. Матрица B равна

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ \text{ch}(\tau_1 L) & \text{sh}(\tau_1 L) & \cos(\tau_2 L) & \sin(\tau_2 L) \\ 0 & \delta_1 & 0 & \delta_2 \\ \delta_1 \text{sh}(\tau_1 L) & \delta_1 \text{ch}(\tau_1 L) & -\delta_2 \sin(\tau_2 L) & \delta_2 \cos(\tau_2 L) \end{pmatrix}, \tag{40}$$

где $\delta_1 = \tau_1 - r\tau_1^3$, $\delta_2 = \tau_2 + r\tau_2^3$.

Нетривиальное решение системы (39) возможно только при нулевом значении детерминанта матрицы B

$$\det B = 0. \tag{41}$$

Равенство (41) дает дисперсионное соотношение для сейшевых колебаний подо льдом. В отличие от безграничного случая (31), где спектр непрерывен, в ограниченном бассейне спектр собственных колебаний дискретен, т.е. возникает первая, вторая и так далее моды сейшевых колебаний.

Вычислим детерминант (41). Разлагая матрицу B по первой строке на миноры 3-го порядка и вычисляя их определители, получим

$$\det B = -2\delta_1 \delta_2 (1 - \text{ch}(\tau_1 L) \cos(\tau_2 L)) - (\delta_1^2 - \delta_2^2) \text{sh}(\tau_1 L) \sin(\tau_2 L). \tag{42}$$

В результате дисперсионное соотношение будет иметь вид

$$\frac{\text{sh}(\tau_1 L) \sin(\tau_2 L)}{1 - \text{ch}(\tau_1 L) \cos(\tau_2 L)} = \frac{2\delta_1 \delta_2}{\delta_2^2 - \delta_1^2}. \tag{43}$$

Подставляя в правую часть уравнения (43) выражения (38) для τ_1 и τ_2 , получим простое выражение для правой части

$$\frac{2\delta_1 \delta_2}{\delta_2^2 - \delta_1^2} = -\gamma^{1/2}. \tag{44}$$

Графическое решение уравнения (43) при $r = 10^2 \text{ м}^2$, $A = 0.5 \times 10^{-2} \text{ м}^2/\text{с}$, $H = 7.3 \text{ м}$, $L = 7 \text{ км}$ приведено на рис. 3. Нулям функции на графике соответствуют периоды сейш T_1, T_2, \dots

Проведем упрощения дисперсионного соотношения (43). По экспериментальным данным параметр $r = \tilde{T}/g\rho_0$ имеет порядок $\sim 10^2 \div 10^3 \text{ м}^2$ при толщине льда $\sim 1 \text{ м}$. Тогда величина $\omega^2 r / g^2 \tilde{H}$ для волн с периодом порядка 10 мин при глубине водоема $\tilde{H} \sim 10 \text{ м}$ будет иметь порядок $\sim 10^{-4}$. Нетрудно видеть, что величина $\tau_1 L$ уже при L , равном 1 км, будет составлять ~ 30 . При таком показателе гиперболические функции в (43) будут очень большими величинами. Чтобы избежать деления больших величин в левой части (43), поделим числитель и знаменатель

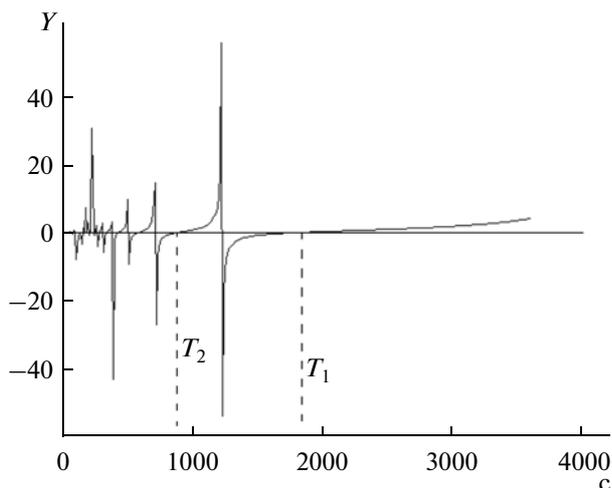


Рис. 3. Спектр периодов сейшевых колебаний (нули функции) в озере постоянной глубины, покрытом льдом, по дисперсионному соотношению (43) при $r = 10^{-2} \text{ м}^2$, $A = 0.5 \times 10^{-2} \text{ м}^2/\text{с}$, $H = 7.3 \text{ м}$, $L = 7 \text{ км}$.

левой части (43) на $e^{\tau_1 L}$ и, учитывая, что величина $e^{-\tau_1 L}$ малая, получим

$$\frac{\text{sh}(\tau_1 L) \sin(\tau_2 L)}{1 - \text{ch}(\tau_1 L) \cos(\tau_2 L)} = \frac{(1 - e^{-2\tau_1 L}) \sin(\tau_2 L)}{2e^{-\tau_1 L} - (1 + e^{-2\tau_1 L}) \cos(\tau_2 L)} \approx -\text{tg}(\tau_2 L). \quad (45)$$

Принимая во внимание (44) и (45), дисперсионное соотношение (43) с большой точностью сводится к простому трансцендентному уравнению

$$\text{tg} \left(\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 + \gamma} L}{2r}} \right) = \sqrt{\gamma}. \quad (46)$$

Для малых γ можно приближенно написать

$$B_1 = \begin{pmatrix} \tau_1^2 & 0 & -\tau_2^2 & 0 \\ \tau_1^2 \text{ch}(\tau_1 L) & \tau_1^2 \text{sh}(\tau_1 L) & -\tau_2^2 \cos(\tau_2 L) & -\tau_2^2 \sin(\tau_2 L) \\ 0 & \delta_1 & 0 & \delta_2 \\ \delta_1 \text{sh}(\tau_1 L) & \delta_1 \text{ch}(\tau_1 L) & -\delta_2 \sin(\tau_2 L) & \delta_2 \cos(\tau_2 L) \end{pmatrix}. \quad (53)$$

Вычисляя детерминант матрицы (53) и приравнявая его нулю, получим дисперсионное соотношение

$$\frac{\text{sh}(\tau_1 L) \sin(\tau_2 L)}{1 - \text{ch}(\tau_1 L) \cos(\tau_2 L)} = -\frac{\gamma^{3/2}}{4 + 3\gamma}. \quad (54)$$

Из (54), аналогично (46), получим трансцендентное уравнение для собственных значений спектра сейш

$$\text{tg} \left(\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 + \gamma} L}{2r}} \right) = -\frac{\gamma^{3/2}}{4 + 3\gamma}. \quad (55)$$

$$\sqrt{\frac{-1 + \sqrt{1 + \gamma} L}{2r}} \approx n\pi + \sqrt{\gamma}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (47)$$

Разлагая корень в левой части в ряд Тейлора по γ , получим

$$\frac{\omega L}{\sqrt{g\tilde{H}}} \approx n\pi + \sqrt{\gamma}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (48)$$

После подстановки γ из (36) условие (48) примет вид

$$\frac{\omega L}{\sqrt{gH_{\text{red}}(\omega)}} \approx n\pi + \omega \sqrt{\frac{4\tilde{T}}{g^2 \rho_0 H_{\text{red}}(\omega)}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (49)$$

Для периодов сейш из (49) получим

$$T_n \approx \frac{2(L - 2\sqrt{\tilde{T}/g\rho_0})}{n\sqrt{gH_{\text{red}}(\omega_n)}}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (50)$$

Сейши в озере со свободно плавающим ледяным покровом

Пусть водоем покрыт льдом, который не припаян жестко к берегу. Такая ситуация, например, возникает весной, когда лед отделяется от берега подтаявшей полыньей. В Ладожском оз. такая полынья идет вдоль изобаты 20 м и существует почти всю зиму [15]. В этом случае граничное условие (23) остается в силе, но условие припайности льда (22) уже не имеет места. Его необходимо заменить условием свободно плавающего конца ледового покрова, в котором нет изгибных напряжений, т.е.

$$\zeta_{xx}|_{x=0, L} = 0. \quad (51)$$

Подставляя решение (37) в граничные условия (23) и (51), получим, аналогично (39), уравнение

$$B_1 \vec{C} = 0, \quad (52)$$

где матрица B_1 равна

Для малых γ можно приближенно написать выражение для корней уравнения (55), аналогично (47) и (48)

$$\frac{\omega L}{\sqrt{g\tilde{H}}} \approx n\pi - 2\omega^3 \left(\frac{\tilde{T}}{g^2 \rho_0 \tilde{H}} \right)^{3/2}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (56)$$

Итак, для нахождения собственных частот сейш имеем кубическое уравнение (56). Для его решения используем асимптотические методы. С этой целью запишем уравнение (56) в безразмерной форме, вво-

для частоты замену $\omega = \omega_0 \tilde{\omega}$, где $\tilde{\omega}_0$ — характерное значение частоты. Уравнение (56) запишем в виде

$$\mu_1 \tilde{\omega}^3 + \mu_2 \tilde{\omega} = n\pi, \quad (57)$$

$$\text{где } \mu_1 = 2\omega_0^3 \left(\frac{\tilde{T}}{g^2 \rho_0 \tilde{H}} \right)^{3/2}, \quad \mu_2 = \frac{L\omega_0}{\sqrt{g\tilde{H}}}.$$

Оценки показывают, что параметр μ_1 — величина малая, поэтому решение (57) можно искать в виде асимптотического ряда по μ_1

$$\tilde{\omega} = \tilde{\omega}_0 + \mu_1 \tilde{\omega}_1 + \dots \quad (58)$$

Ограничимся поиском первых двух членов ряда (58). Заметим, что кубическое уравнение (57) имеет три корня, а разложение (58) даст только один. Однако продифференцировав (57) по $\tilde{\omega}$, нетрудно убедиться, что точек экстремумов у кубической параболы (57) нет. Следовательно, уравнение (57) имеет один действительный корень и два комплексно сопряженных. Отсюда следует, что процедура поиска корня в виде разложения (58) в действительной области корректна.

Подставляя (58) в уравнение (57), получим

$$\tilde{\omega}_0 = \frac{n\pi}{\mu_2}, \quad \tilde{\omega}_1 = -\frac{\tilde{\omega}_0^3}{\mu_2}. \quad (59)$$

Возьмем в качестве характерного значения $\omega_0 = \sqrt{g\tilde{H}}/L$, тогда $\mu_2 = 1$ и из (58) с учетом (59) получим в размерном виде выражение для частот сейш

$$\frac{\omega_n L}{\sqrt{gH_{\text{ред}}(\omega_n)}} = n\pi \left[1 - \frac{2n^2 \pi^2}{L^3} \left(\frac{\tilde{T}}{g\rho_0} \right)^{3/2} \right].$$

Для периодов сейш получим выражение

$$T_n = \frac{2L}{n\sqrt{gH_{\text{ред}}(\omega_n)} \left[1 - 2n^2 \pi^2 L^{-3} \left(\tilde{T}/g\rho_0 \right)^{3/2} \right]}, \quad (60)$$

$n = 1, 2, 3, \dots$

СЕЙШИ В ОЗЕРЕ ПЕРЕМЕННОЙ ГЛУБИНЫ

Аппроксимация реального озера водоемом с постоянной глубиной — довольно грубое приближение. В этой ситуации никак не учитывается, что жидкость к берегу выклинивается и глубина водоема стремится к нулю. В природе замкнутые водоемы часто имеют на продольном вертикальном разрезе форму чаши. Самый простой многочлен для аппроксимации такой чаши — парабола. В связи со сказанным, рассмотрим бассейн, продольный разрез глубин которого можно аппроксимировать параболой

$$H(x) = H_{\text{max}} \left[1 - \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right], \quad (61)$$

где l — полудлина водоема, H_{max} — максимальная глубина водоема. Начало координат располагается симметрично в центральной точке водоема. Глубина H_{max} в (61) находится через аппроксимацию продольного разреза глубин озера выражением (61) посредством метода наименьших квадратов. При глубине водоема (61) теперь не надо ставить условие (23) на производные от уровня. В силу того, что глубина обращается в нуль на берегу, полный поток независимо от производной от уровня будет обращаться в нуль, поэтому достаточно только условия (22). Уравнение (21) будет иметь вид

$$\frac{d}{dx} \left\{ \left[\bar{\zeta}_x - \frac{\tilde{T}}{g\rho_0} \bar{\zeta}_{xxx} \right] [1 - (x/l)^2] \right\} + \frac{\omega^2}{gH_{\text{max}}} \bar{\zeta} = 0. \quad (62)$$

Введем безразмерные переменные с волной $\tilde{x} = x/l$, $\tilde{\zeta} = \bar{\zeta}/H_{\text{max}}$, тогда уравнение (62) перепишется в безразмерном виде (волну у безразмерных переменных опускаем) на отрезке $[-1, 1]$

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) (\zeta_x - \varepsilon \zeta_{xxx}) \right] + \lambda \zeta = 0, \quad (63)$$

$$\text{где } \lambda = \frac{\omega^2 l^2}{gH_{\text{max}}}, \quad \varepsilon = \frac{\tilde{T}}{g\rho_0 l^2}.$$

Как уже указывалось ранее, при постановке граничных условий 2-го типа с обращением в нуль толщины жидкости на берегу уравнение для уровня приобретает сингулярность на границах водоема при $x = \pm 1$ и недостающими граничными условиями для него будет требование ограниченности решений при $x = \pm 1$.

Учитывая, что $\tilde{T} = Q\rho_0$ и $Q \approx 10^3 \text{ м}^3/\text{с}^2$, оценка параметра ε в (63) дает $\varepsilon \approx 10^{-6}$, т.е. это величина малая. Таким образом, уравнение (63) — обыкновенное уравнение с малым параметром при старшей производной. Решение уравнения можно искать методом сращиваемых асимптотических разложений (САР). Теория метода САР хорошо разработана. Подробное изложение можно найти, например, в [7]. Из теории САР применительно к уравнению (63) следует, что на краях водоема при $x = \pm 1$ будут образовываться пограничные слои, а в основной области водоема вне этих пограничных слоев решение надо искать в виде регулярного асимптотического ряда по малому параметру ε

$$\zeta = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon^n \zeta_n(x). \quad (64)$$

Подставляя (64) в (63), получим в первом приближении при $n = 0$ уравнение во внутренней области вне пограничных слоев для $\zeta_0(x)$

$$\frac{d}{dx} \left[(1 - x^2) \frac{d\zeta_0}{dx} \right] + \lambda \zeta_0 = 0. \quad (65)$$

Уравнение (65) является уравнением Лежандра. Как известно, условию ограниченности решения на интервале $-1 < x < 1$ отвечают только многочлены Лежандра $P_k(x)$, которые соответствуют собственным значениям $\lambda = \lambda_k = k(k+1)$, где $k = 0, 1, 2, 3, \dots$. Значения λ_k образуют спектр собственных значений, а $P_k(x)$ — соответствующие собственные функции, которые после нормировки на $\sqrt{k+1/2}$ образуют полную ортонормированную систему функций на отрезке $[-1, 1]$.

Многочлены Лежандра с нечетными индексами — нечетные функции, а с четными индексами — четные функции. При $x = 1$ все многочлены Лежандра принимают значение, равное 1, при $x = -1$ нечетные многочлены равны -1 , а четные $+1$. Для многочленов Лежандра при $k > 0$ выполняется соотношение

$$\int_{-1}^{+1} P_k(x) dx = 0$$

и, таким образом, они автоматически удовлетворяют условию постоянства объема воды в озере (24). Учитывая выражение (63) для λ и то, что $l = L/2$ — полудлина водоема, можем написать дисперсионное соотношение для сейш подо льдом в озере с продольным рельефом дна в виде параболы (61)

$$\frac{\omega_k^2 L^2}{4gH_{\max}} = k(k+1), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (66)$$

Для периодов сейш будем иметь

$$T_k = \frac{\pi}{\sqrt{k(k+1)}} \frac{L}{\sqrt{gH_{\max}}}, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (67)$$

Отметим, что при учете турбулентного трения в формулах (66) и (67) вместо H_{\max} необходимо использовать его редуцированное значение $H_{\text{ред}}^{(\max)}$ (ω).

ПОГРАНИЧНЫЕ СЛОИ У БЕРЕГОВ

Ограничимся нахождением решения в пограничном слое у правой границы $x = 1$. У левой границы решение находится аналогично. Введем координату $\eta = 1 - x$, тогда уравнение (63) запишется в виде

$$\frac{d}{d\eta} [\eta(2-\eta)(\zeta_\eta - \varepsilon\zeta_{\eta\eta})] + \lambda\zeta = 0. \quad (68)$$

Введем локальную координату пограничного слоя $\eta = \varepsilon^\alpha \xi$ и, подставляя ее в (68), получим, что для уравновешивания по порядку ε старших членов необходимо положить $\alpha = 1/2$. Последнее означает, что у границы $x = 1$ образуется пограничный слой

толщиной $\sqrt{\varepsilon}$ и локальная координата пограничного слоя будет

$$\xi = \eta/\sqrt{\varepsilon}. \quad (69)$$

Подставляя (69) в (68), получим в первом приближении в пограничном слое уравнение

$$\frac{d}{d\xi} [(\zeta_\xi - \varepsilon\zeta_{\xi\xi})\xi] = 0. \quad (70)$$

Интегрируя уравнение (70) один раз, получим

$$\zeta_\xi - \varepsilon\zeta_{\xi\xi} = \frac{\tilde{C}}{\xi}. \quad (71)$$

Исходя из требования ограниченности решения в пограничном слое и его производных при $\xi \rightarrow \infty$, получим $\tilde{C} = 0$. Интегрируя оставшееся уравнение, будем иметь решение

$$\zeta = \tilde{C}_1 + \tilde{C}_2 e^{-\xi} + \tilde{C}_3 e^\xi. \quad (72)$$

Исходя из требования ограниченности решения при $\xi \rightarrow +\infty$, получим $\tilde{C}_3 = 0$. Для того, чтобы написать равномерно пригодное асимптотическое решение на всем отрезке, надо решение в пограничном слое выразить в виде погранслоевой добавки, которая в сумме с решением в основной области удовлетворяла бы граничному условию припайности льда (22) при $x = 1$. Отсюда следует, что надо положить в (72)

$$\tilde{C}_1 = 0, \quad \tilde{C}_2 = -P_k(1) = -1. \quad (73)$$

Для пограничного слоя у левой границы $x = -1$ аналогично вводим локальную координату $\eta = -1 + x$. Получим уравнение

$$\frac{d}{d\eta} [-\eta(2+\eta)(\zeta_\eta - \varepsilon\zeta_{\eta\eta})] + \lambda\zeta = 0. \quad (74)$$

Далее аналогично вводим растянутую переменную пограничного слоя и получаем уравнение (70). Пропуская все те же выкладки, получаем для левого пограничного слоя вместо (73) в (72) значения с учетом нечетности полиномов Лежандра при нечетных индексах

$$\tilde{C}_1 = 0, \quad \tilde{C}_2 = -P_k(-1) = (-1)^{k+1}. \quad (75)$$

Суммируя решения в пограничных слоях и в основной области, можем написать равномерно пригодное во всей области асимптотическое разложение

$$\zeta_k(x) = P_k(x) - e^{-\frac{1-x}{\sqrt{\varepsilon}}} + (-1)^{k+1} e^{-\frac{x-1}{\sqrt{\varepsilon}}} + O(\varepsilon). \quad (76)$$

Заметим, что решение (76) для нечетных индексов k будет точно удовлетворять условию постоянства объема воды подо льдом, а для четных индексов — только с точностью до $O(\sqrt{\varepsilon})$ из-за того, что слагаемые от пограничных слоев в (76) будут одного знака. Отсюда следует, что, по-видимому, для спектра собственных колебаний водоема подо льдом предположительно будут в (76) и (77) нечетные индексы.

На рис. 4 приведены графики первых четырех мод сейшевых колебаний, вычисленных по соотношению (76).

ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Полученные результаты показывают, что лед действительно оказывает существенное влияние на сейшевые колебания.

Во-первых, а случае припайного льда одноузловая сейша не может существовать, так как два узла должны быть обязательно на берегу. С другой стороны, из результатов последнего раздела следует, что в случае припайного льда первая мода — трехузловая сейша, вдали от берегов близка по форме к одноузловой. Существенные отличия возникают в прибрежной зоне в узких пограничных слоях у берега. Аналогичный вывод приводится в [14]. Это объясняет тот факт, что формула Мериана, несмотря на некорректность с математической точки зрения ее использования для сейш подо льдом, дает вполне приемлемый результат.

Во-вторых, существенный момент влияния ледового покрова на движения жидкости — усиление роли трения. Из-за турбулентного трения в уравнении для амплитуд (19) и в выражениях для периодов сейш появляется приведенная или редуцированная глубина водоема, которая всегда меньше реальной. Причем, чем меньше глубина озера, тем больше редуцированная глубина отличается от реальной. Возникает вопрос, при каких глубинах озера становится существенным турбулентное трение и необходимо принимать в расчетах редуцированную глубину? Ответ на этот вопрос дает понятие критической глубины, введенное в [8]. В этой работе показано, что трение становится существенным, когда глубина водоема становится меньше критической $h_{cr} = \sqrt{AT_0}$, где A — коэффициент вертикального турбулентного обмена, T_0 — характерный период изменчивости течений, в данном случае — сейшевых колебаний. Лед приводит к тому, что значение критической глубины удваивается [8]. В [3, 5] показано, что коэффициент вертикального турбулентного обмена в течениях подо льдом имеет порядок $\sim 10^2$ см²/с. Заметим, что определение коэффициента вертикального турбулентного обмена, особенно в зимний период подо льдом, — далеко не тривиальная задача, поэтому оценка значений критической глубины довольно приближенная. Для оз. Вендюрского можно сделать оценку коэффициента вертикального турбулентного обмена непосредственно из результатов измерений скоростей подледных течений, приведенных в работе [12]. Будем исходить из баланса членов уравнения (1). Из результатов измерений эпюр скорости течения подо льдом ([12], рис. 7) можно получить оценку для второй производной от скорости $\partial^2 u / \partial z^2 \sim 10^{-6} \div 10^{-8}$ мм⁻¹ с⁻¹. Для производной

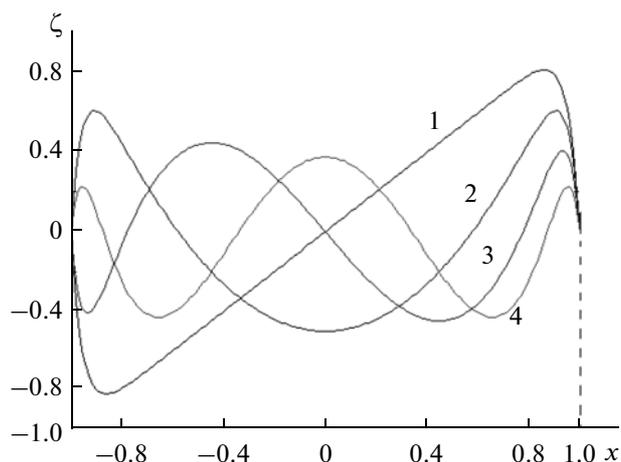


Рис. 4. Первые безразмерные моды (1–4) сейшевых колебаний в озеро с припайным льдом и рельефом дна в виде чаши (61), вычисленные по формуле (76) ($k = 1-4$) при $\varepsilon = 0.002$.

по времени получим оценку $\partial u / \partial t \sim 4 \times 10^{-3}$ мм/с² ([12], рис. 2). Откуда для A будем иметь оценку $A \sim (\partial u / \partial t) / (\partial^2 u / \partial z^2) \sim (4 \times 10) \div 10^3$ см²/с. Итак, принятая оценка $A \sim 10^2$ см²/с — вполне приемлемая. Полученные оценки показывают, что малые скорости течения, которые наблюдаются, в частности, в подледных течениях на оз. Вендюрском, совсем не означают автоматически малые значения коэффициентов турбулентного обмена.

Если период первой моды сейш равен 5 ч, то для критической глубины будем иметь оценку $h_{cr} \approx 13.4$ м. Отсюда следует, что для сейш подо льдом с таким периодом трение будет существенным при глубинах <27 м. Для оз. Вендюрского первая мода сейш по данным измерений имеет период 26.9 мин [12]. Учитывая это, получим $h_{cr} \approx 4$ м. Удваивая эту величину, будем иметь для оз. Вендюрского критическую глубину ~ 8 м. Средняя глубина озера составляет 5.3 м, следовательно, для этого озера в формуле (50) трение надо учитывать.

Влияние льда на периоды сейш неоднозначное — в случае неприкрепленного к берегам ледового покрова из (60) видно, что лед всегда увеличивает период сейш по сравнению с открытой водой. В случае же припайного льда, как следует из формулы (50), для глубокого озера с глубиной больше критической будем иметь $H_{red}(\omega) = H_{cr}$, где H_{cr} — средняя глубина озера, лед уменьшает реальную длину озера на величину $2\sqrt{T/g\rho_0}$, и поэтому период уменьшится. Для мелкого озера, глубина которого меньше критической, величина $H_{red}(\omega)$ становится $< H_{cr}$ и период сейш будет увеличиваться по сравнению с открытой водой. Как видно из формул (50), (60) и (67), в выражения для периодов сейш входит реду-

цированная глубина $H_{\text{red}}(\omega_n)$, которая сама зависит от периода. Таким образом, получается, что формулы (50) и (60) — на самом деле неявные выражения для периода. На практике поправку для периодов на редуцированную глубину надо учитывать последовательным приближением — сначала по формуле Мериана оценить предварительно период сейши, затем с учетом значения для коэффициента вертикального турбулентного обмена найти по графику на рис. 1 редуцированную глубину и уже для нее вычислить периоды сейш.

Периоды сейш и соотношения между ними в озере переменной глубины по (67) отличаются от тех, что дает формула Мериана. Например, период второй гармоники по формуле Мериана будет ровно в два раза меньше периода первой, а по формуле (67) — только в $\sqrt{3}$ раз. Именно такое соотношение периодов приводится в [20], где указывается, что первая мода в озере подо льдом имела период 80 мин, а вторая — 45 мин, т.е. меньше в 1.7 раза. Аналогичная ситуация с сейшами в оз. Байкал: первая мода — 4 ч 37 мин, а вторая — 2 ч 33 мин [2, 10], т.е. меньше в 1.8 раза.

Заметим, что если лед не припайный, а свободно плавающий, то формула (67) для периодов сейш в озере с переменной глубиной также справедлива. Отличия возникнут только в форме сейш в прибрежных пограничных слоях. Формула (67) справедлива и для открытой воды, надо только иметь в виду, что для открытой воды критическая глубина $h_{\text{cr}} = \sqrt{AT_0}$ будет в два раза меньше h_{cr} для ледового случая. Это означает, что поправочный множитель на трение $1 - F(\alpha H)$ в $H_{\text{red}}^{(\max)}(\omega)$ для открытой воды будет ближе к единице и влияние трения на сейши будет меньше проявляться. Как уже указывалось, из (67) следует, что период второй моды будет в $\sqrt{3}$ раз меньше первой, а период третьей — в $\sqrt{2}$ раз меньше периода второй. Такое соотношение действительно находит подтверждение. Например, на Ладожском оз. было установлено в результате наблюдений [9], что период первой моды продольной сейши в летний период был равен 5 ч 40 мин, второй — 2 ч 11 мин. Но была также обнаружена сейша с периодом 3 ч 15 мин, существование которой не нашло объяснения [9]. Этот период никак не укладывался в теорию Мериана. На самом деле, формула (67) проясняет эту ситуацию. Из нее следует, что сейша с периодом 3 ч 15 мин — это вторая мода, так как ее период в 1.74 раза меньше периода первой моды. А сейша с периодом 2 ч 11 мин никак не может быть второй модой, это третья мода, ее период в ~ 1.4 раза меньше периода второй моды, т.е. в $\sqrt{2}$ раз, как это и должно быть по соотношению (67).

Для оз. Вендюрского формула Мериана дает период сейши ~ 31 мин при средней глубине 5.3 м и длине озера 7 км. Аппроксимация продольного раз-

реза глубин озера параболой (61) дает $H_{\text{max}} \approx 9.3$ м. Эта глубина больше критической для оз. Вендюрского, поэтому в (67) можно принять $H_{\text{red}}^{(\max)}(\omega) = H_{\text{max}}$. Подставляя это значение в формулу (67), получим для периода первой сейши $T_1 \approx 27$ мин, т.е. существенно ближе к наблюдаемому значению 26.9 мин, чем дает формула Мериана.

С сейшами связана важная проблема в озерах — трещиноватость льда [10, 14, 15]. На Байкале и на Ладоге из года в год наблюдается одинаковая картина трещин во льду. В работах [10, 15] это явление связывается с сейшами. Действительно, трещины в ледовом покрове могут возникать в пучностях сейш. Из-за того, что, как было показано в данной статье, длины волн подо льдом ограничены и не могут превышать критического значения, проявляться будут более высокие гармоники сейш, длины которых не будут превышать критического значения. Такая картина, в частности, была обнаружена в оз. Байкал [2, 10]. Следовательно, трещины могут формироваться под действием не первых, а более высоких гармоник. В Ладожском оз. [15], например, ледовый покров имеет четко выраженные три трещины поперек и три вдоль озера. Это говорит о том, что трещины во льду Ладожского оз. формируются под действием четвертой моды в соответствии с рис. 4. В озерах с припайным льдом наибольшие изгибы льда возникают в береговой зоне в пограничных слоях (рис. 4), и именно в этой зоне лед будет ломаться в первую очередь. Аналогичный вывод был получен в работе [14].

Надо также иметь в виду дополнительные причины, которые могут способствовать возникновению трещин в ледовом покрове в озерах. Дело в том, что пресноводный лед после замерзания при дальнейшем понижении температуры сжимается. Его коэффициент теплового расширения положителен, в отличие от морского льда. Для морского льда коэффициент теплового расширения до -15°C отрицателен. Это означает, что морской лед при понижении температуры до -15°C будет расширяться и только ниже этой температуры начнет сжиматься. Итак, пресноводный лед при понижении температуры будет находиться в напряженном состоянии на разрыв, поэтому достаточно небольших изгибов льда в пучностях сейш, чтобы он треснул. Это объясняет, почему сейши, несмотря на свои малые амплитуды, приводят к появлению трещин во льду в озерах.

В заключение отметим, что сейши в зимний период — единственный механизм передачи импульса от атмосферы вглубь озера. До недавнего времени считалось, что сейши не генерируют остаточные течения. Однако, как было показано экспериментально в недавней работе [6], стоячие волны, к которым относятся сейши, генерируют остаточные нисходящие течения в пучностях стоячих волн. В узловых линиях сейш будут возникать компенса-

онные восходящие потоки. Это означает, что сейши в озерах в зимний период играют немаловажную, а может быть, и основную роль в перемешивании вод подо льдом.

ВЫВОДЫ

Как было показано, уже в случае безграничного водоема лед приводит к существенным отличиям динамики длинных гравитационных волн подо льдом от динамики волн на открытой поверхности

во-первых, из-за дополнительного трения о лед становится существенным турбулентное трение, в результате вместо обычной глубины водоема H необходимо использовать приведенную глубину $H_{\text{ред}}$, которая всегда меньше H и, кроме того, зависит от частоты волны ω ;

во-вторых, деформация льда порождает появление дополнительного множителя в (32), зависящего от физических свойств льда при его сжатиях—растяжениях при изгибных деформациях \tilde{T} и от волнового числа k , в результате чего волны подо льдом становятся дисперсными;

в-третьих, трение о лед и его сопротивление изгибным деформациям приводят к ограничению длин волн сверху, т.е. существует максимальная длина волны, больше которой волны существовать подо льдом не могут.

Сейши возникают как собственные колебания замкнутых или полужамкнутых водоемов, и лед оказывает существенное влияние на эти колебания. При наличии припайного льда первая мода сейшевых колебаний для открытого водоема одноузловая, а для водоема с припайным льдом — трехузловая, так как два узла обязательно должны быть на берегу.

Влияние льда на периоды сейш неоднозначное — в случае неприкрепленного к берегам ледового покрова лед всегда увеличивает период сейш по сравнению с открытой водой. В случае же припайного льда для глубокого озера с глубиной больше критической $h_{\text{кр}} = 2\sqrt{AT_0}$ периоды сейш уменьшаются. Для мелкого озера с глубиной меньше критической периоды сейш будут увеличиваться по сравнению с открытой водой.

Для озер переменной глубины, когда жидкость выклинивается на береговой черте, получено новое соотношение (67) для периодов сейш, которое дает более точные значения для мод сейшевых колебаний, нежели известная формула Мериана.

Автор выражает благодарность С.В. Музылеву (Ин-т океанологии РАН) за внимательное прочтение рукописи статьи и сделанные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арсеньева Н.М., Давыдов Л.К., Дубровина Л.Н., Конкина Н.Г.* Сейши на озерах СССР. Л.: Изд-во ЛГУ, 1963. 184 с.
2. *Верболов В.И.* О байкальских сейшах // Сейши на озерах, поверхностные и внутренние. Л.: Наука, 1970. С. 50–52.
3. *Дебольская Е.И., Зырянов В.Н.* Вертикальная турбулентная структура течений в мелком море // Вод. ресурсы. 1994. Т. 21. № 6. С. 581–589.
4. *Дебольский В.К., Зырянов В.Н., Мордасов М.А.* О турбулентном обмене в приливном устье при наличии ледяного покрова // Динамика и термика рек и водохранилищ. М.: Наука, 1984. С. 279–290.
5. *Долгополова Е.Н.* Коэффициент вертикального переноса в природных водотоках // Вод. ресурсы. 2008. Т. 35. № 4. С. 429–437.
6. *Ермакова О.С., Мальков Ю.А., Сергеев Д.А., Троицкая Ю.И.* Лабораторное исследование нелинейных течений, возбуждаемых стоячими поверхностными волнами в жидкости // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2009. Т. 45. № 6. С. 846–853.
7. *Зырянов В.Н.* Теория установившихся океанических течений. Срачиваемые асимптотические разложения: основы теории и приложения к задачам динамики океана. Л.: Гидрометеоиздат, 1985. 248 с.
8. *Зырянов В.Н.* Топографические вихри в динамике морских течений. М.: ИВП РАН, 1995. 240 с.
9. *Малинина Т.И.* Сейши Ладожского озера // Гидрологический режим и водный баланс Ладожского озера. Л.: Изд-во ЛГУ, 1966. С. 229–246.
10. *Милс Д., Радок Р.* О сейшах и приливах озера Байкал // Сейши на озерах, поверхностные и внутренние. Л.: Наука, 1970. С. 53–55.
11. *Музылев С.В.* Внутренние волны под ледяным покровом // Докл. РАН. 2008. Т. 418. № 3. С. 397–400.
12. *Петров М.П., Тержевик А.Ю., Здоровеннов Р.Э., Здоровеннова Г.Э.* Движения воды в мелководном озере, покрытом льдом // Вод. ресурсы. 2007. Т. 34. № 2. С. 131–140.
13. *Соловьев В.Н., Шостакович В.Б.* Сейши озера Байкал // Тр. Иркутской магнитной и метеорологической обсерватории. 1926. № 1. С. 58–84.
14. *Стурова И.В.* Влияние ледяного покрова на колебания жидкости в замкнутом бассейне // Изв. РАН. Физика атмосферы и океана. 2007. Т. 43. № 1. С. 128–135.
15. *Филатов Н.Н.* Гидродинамика озер. СПб.: Наука, 1991. 196 с.
16. *Bengtsson L.* Dispersion in ice-covered lakes // Nordic Hydrology. 1986. V. 17. P. 151–170.
17. *Bengtsson L.* Mixing in ice-covered lakes // Hydrobiologia. 1996. V. 322. № 1–3. P. 91–97.
18. *Dynamic studies in lakes 1973–1975. Report of IHD Swedish Lake Research Group. Swedish National Research Council. Stockholm, 1975. 254 p.*
19. *Kenney B.C.* Physical limnological processes under ice // Hydrobiologia. 1996. V. 322. № 1–3. P. 85–90.
20. *Simojoki H.* On short period fluctuations of water level of an ice-covered lake // Geophysica. 1966. V. 9. № 3. P. 251–257.