

## АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ СТАБИЛОМЕТРИЧЕСКИХ ТЕСТОВ СО СТУПЕНЧАТЫМ ВОЗДЕЙСТВИЕМ С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ МЕХАНИКИ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

© 2019 г. П.А. Кручинин

*Механико-математический факультет Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, 119991, Москва, Ленинские горы, 1*

*E-mail: pkruch@mech.math.msu.su*

Поступила в редакцию 01.07.2019 г.

После доработки 19.07.2019 г.

Принята к публикации 24.07.2019 г.

Рассмотрены задачи оптимального управления для модели движения человека при выполнении стабиллометрических тестов, в которых он меняет позу при ступенчатом воздействии. Характерной особенностью стабиллограмм для этих тестов является наличие отчетливо выраженных на траектории центра давления «размаха» и «перерегулирования». В статье используется математическая модель однозвенного перевернутого маятника. Тестам ставится в соответствие решение задач управления изменением положения маятника с помощью момента, приложенного в опорной точке. Рассмотрены задача быстрогодействия и задача оптимальной стабилизации с квадратичным критерием качества. Проведено сравнение решения оптимальных задач с результатами стабиллометрических тестов. Предложен модифицированный алгоритм обработки показаний стабиллоанализатора. Показано, что рассматриваемое движение носит характер устойчивого двигательного штампа, а «размах» и «перерегулирование» соответствуют этапам разгона и торможения.

*Ключевые слова: изменение вертикальной позы, стабиллометрия, тест со ступенчатым воздействием, оптимальное управление.*

DOI: 10.1134/S0006302919050259

При анализе изменения человеком вертикальной позы под действием различных ступенчатых воздействий на его сенсорные входы часто используется стабиллоанализатор (силовая платформа) [1–8]. При этом в показаниях стабиллоанализатора при быстром изменении позы часто наблюдается характерная картина, показанная на рис. 1, отображающая совершенное движение. Характеристики этого движения рассчитываются в программном обеспечении стабиллоанализатора «Стабилан» (ЗАО ОКБ «РИТМ», Таганрог, Россия) [2], однако в большинстве случаев из этих характеристик анализируют латентный период и время выполнения движения [6–8]. Значимой с диагностической точки зрения, возможно, является скорость перемещения центра давления и размахи совершаемого движения, снижение которых отмечено при болезни Паркинсона [4,5]. Анализу качественного характера переходного процесса уделяют меньше внимания. Подробный анализ этого движения не проводился.

Отмеченное движение несет следы двигательного штампа и, предположительно, может быть использовано для анализа функционирования

системы управления движениями человека и в алгоритмах прогнозирования движений при построении сред виртуальной реальности. В связи с этим представляется полезным анализ указанного движения на основе теоретико-механических и управленческих моделей. Отдельные элементы этого анализа приведены ранее в работах [9,10]. Настоящая статья представляет собой обобщение этих результатов и обсуждение их соответствия результатам стабиллометрических обследований. Не нарушая общности, будем рассматривать движение человека в сагиттальной плоскости, учитывая, что в силу моделей из работы [11] полученные результаты с известной степенью приближения могут быть перенесены и на случай движений во фронтальной плоскости.

### МЕХАНИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ДВИЖЕНИЯ

Для описания колебаний человека в сагиттальной плоскости примем традиционную модель перевернутого маятника, изображенную на рис. 2. Предполагаем, что тело человека в ходе теста допустимо моделировать недеформируемым стерж-

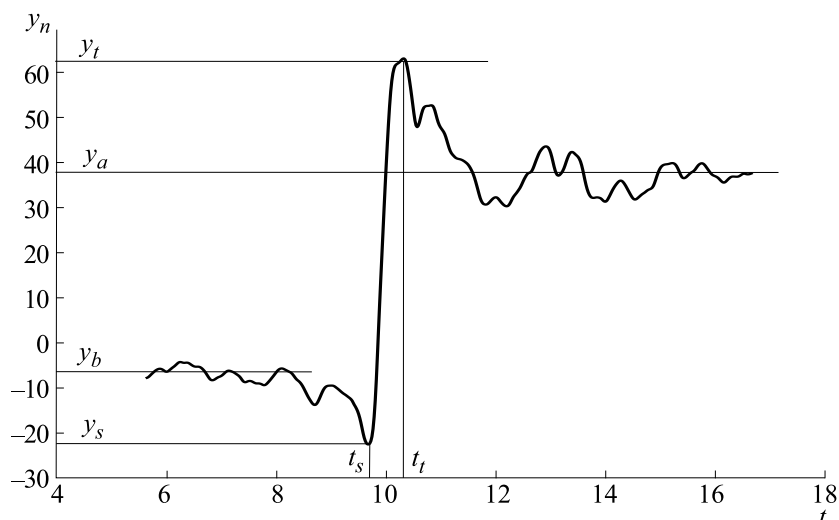


Рис. 1. Характерный вид сагиттальной стабилотоммы при выполнении теста со ступенчатым воздействием.

нем массы  $m_p$ , закрепленным шарнирно в точке  $O$ , соответствующей голеностопному суставу. Центр масс стержня расположен в точке  $C$ , удаленной от точки  $O$  на расстояние  $l$ . Момент инерции стержня относительно фронтальной оси, проходящей через точку  $O$ , равен  $J$ . Отклонение стержня от вертикали опишем углом  $\theta$ . Через  $M$  обозначим момент, создаваемый мышцами в голеностопном суставе, приложенный как показано на рис. 2. Будем считать, что его сагиттальная плоскость параллельна соответствующей оси чувствительности платформы, а его стопы неподвижны относительно платформы. Уравнения движения для малых значений угла  $\theta$  и скорости его изменения запишем в соответствии с работами [9,11] в следующем виде:

$$J\ddot{\theta} = m_p g l \theta + M. \tag{1}$$

Соотношения для сагиттальной стабилотоммы получим на основании условий равновесия системы «платформа–стопа» (см. рис. 3), из которых запишем выражение для проекции на сагиттальную ось расстояния от оси голеностопного сустава до центра давления:

$$y_n = \frac{M}{N} \left( 1 + \frac{m_p l h}{J} \right) + \frac{m_p^2 g l^2 h}{J N} \theta, \tag{2}$$

где  $h$  – высота голеностопного сустава над плоскостью чувствительности тензодатчиков платформы, а  $N$  – величина нормальной реакции опоры (вес).

Заметим, что изменение величины  $y_n$  совпадает с переменной составляющей сагиттальной стабилотоммы  $\Delta y$ . Как показано в работе [11], из выражений (1) и (2) при выполнении условия  $h/l \ll 1$  верно приближенное соотношение

$$\Delta y \approx \frac{\Delta M}{m_p g}, \tag{3}$$

где через  $\Delta M$  обозначено изменение момента в голеностопном суставе.

Соотношения (1) и (3) позволяют объяснить наличие участков стабилотоммы, названных в программном обеспечении [2] «размах» и «перерегулирование». Рассмотрим движение вперед. Считаем, что до начала движения человек, слегка

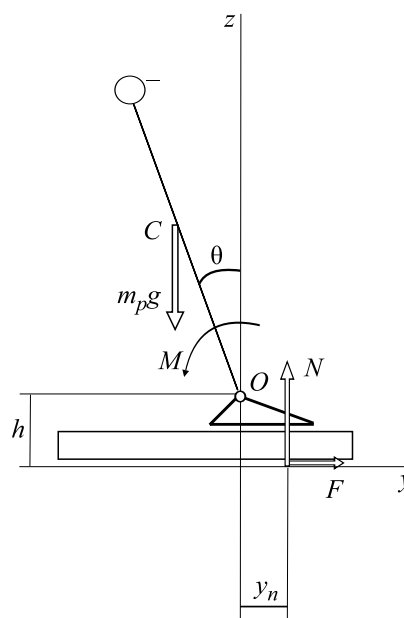


Рис. 2. Модель движений человека в сагиттальной плоскости. На рисунках показаны внешние силы, действующие на систему «человек–платформа».

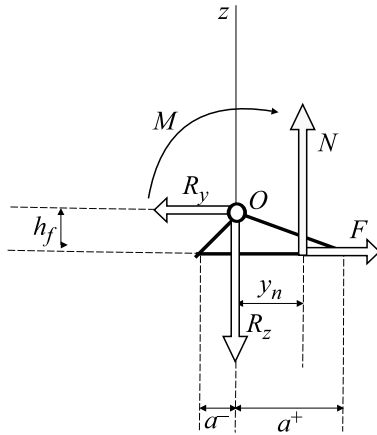


Рис. 3. Силы, действующие на стопу.

наклонившись вперед, удерживает положение равновесия  $\theta_0$  с помощью момента  $M_0$  в голеностопном суставе. Значение  $\theta_0$  при задании положительных направлений в соответствии с рис. 2 отрицательное, следовательно, имеем:

$$M_0 = -m_p g l \theta_0. \quad (4)$$

Это соответствует координате центра давления  $y_0 = -l\theta_0$ , которую, как правило, выбирают за начало отсчета.

Для начала движения момент в голеностопном суставе должен быть уменьшен для того, чтобы момент силы тяжести превысил момент в голеностопном суставе и началось движение вперед. Таким образом,  $\Delta M$ , а вслед за ним и  $\Delta u$  принимают отрицательные значения, что соответствует начальному участку стабิโลграммы на фазе «размаха». Для финального положения  $\theta_f$  также должно выполняться условие равновесия:

$$M_f = -m_p g l \theta_f, \quad (5)$$

что соответствует координате центра давления при  $y_f = -l\theta_f$ . При наклоне вперед  $\theta_f < \theta_0$ . Тогда выполнены условия  $M_f > M_0$  и  $y_f > y_0$ . На значительном участке движения и момент, и стабิโลграмма будут возрастать. Для быстрого движения характерен участок интенсивного торможения в окрестности финального положения  $\theta \approx \theta_f$ . Для такого торможения должно выполняться условия  $M > M_f$  и  $y_n > y_f$ . Такой участок будет соответствовать «перерегулированию». Таким образом, «размах» и «перерегулирование» корректнее называть «разгоном» и «торможением». Эти эффекты найдут отражение и в оптимальных алгоритмах управления.

## ПОСТАНОВКА МОДЕЛЬНОЙ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ДВИЖЕНИЕМ

Уточним постановку задачи управления, считая начальные и финальные положения равновесия неподвижными: систему в виде перевернутого маятника, описываемую уравнением (1) необходимо перевести из начального положения  $\theta = \theta_0$ ;  $\dot{\theta}_0 = 0$ ;  $M = M_0$  в положение  $\theta = \theta_f$ ;  $\dot{\theta}_f = 0$ ;  $M = M_f$ .  $M_0$  и  $M_f$  удовлетворяют условиям (4) и (5). При этом будем принимать во внимание условия ограниченности величины момента в голеностопном суставе

$$M^- \leq M \leq M^+ \quad (6)$$

и скорости его изменения

$$U^- \leq \dot{M} \leq U^+. \quad (7)$$

Для величины момента помимо чисто физиологических ограничений, связанных с ограниченностью развиваемых мышечных усилий, следует принимать во внимание возможность опрокидывания человека вследствие того, что равновесие стоп на платформе должно обеспечиваться нормальной реакцией, приложенной в области опоры  $a^- \leq y_n \leq a^+$  (см. рис. 3). Отсюда, с учетом выражения (2), следует достаточно сложное с точки зрения теории управления фазовое ограничение:

$$Na^- \leq M \left( 1 + \frac{m_p l h}{J} \right) + \frac{m_p^2 g l^2 h}{J N} \theta \leq Na^+. \quad (8)$$

С той же погрешностью, что и для соотношения (3), для малых медленных изменений угла  $\theta$  ограничения момента в голеностопном суставе приближенно можно принять равными

$$m_p g a^- \leq M \leq m_p g a^+.$$

Для дальнейшего анализа задачи представим приведенные соотношения в безразмерном виде. Для этого перейдем к новым переменным:

$$\phi = \frac{\theta - \theta_f}{\theta_*}, \quad m = \frac{M - M_f}{m_p g l \theta_*}.$$

В качестве характерного значения угла выберем разность начального и конечного значений угла в голеностопном суставе при выполнении пробы  $\theta_* = \theta_0 - \theta_f$ . Введем безразмерное время:

$$\tau = t/t_*, \quad \text{где } t_* = \sqrt{\frac{J}{m_p g l}}.$$

Управлением  $u$  будем считать скорость изменения безразмерного момента. Для этих переменных безразмерные уравнения движения примут следующий вид:

$$\phi'' = \phi + m; \quad m' = u. \quad (9)$$

Здесь через  $m'$  обозначено дифференцирование по безразмерному времени  $\tau$ . Необходимо решение системы (9) перевести из начального положения

$$\varphi(0) = 1; \varphi'(0) = 0; m(0) = -1 \quad (10)$$

в положение

$$\varphi(\tau_f) = 0; \varphi'(\tau_f) = 0; m(\tau_f) = 0 \quad (11)$$

с помощью ограниченного управления

$$u^- \leq u \leq u^+, \text{ где} \\ u^- = \frac{U^-}{m_p g l \theta_* t_*}, \quad u^+ = \frac{U^+}{m_p g l \theta_* t_*}. \quad (12)$$

Ограничения на величину момента с учетом приближения формулы (3) примут вид

$$m^- \leq m \leq m^+, \text{ где} \\ m^- = \frac{a^- + l \theta_f}{l \theta_*}, \quad m^+ = \frac{a^+ + l \theta_f}{l \theta_*}. \quad (13)$$

Такой безразмерный вид позволяет решать задачу управления с минимальным количеством параметров, что в дальнейшем позволит упростить анализ.

### ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ПРОГРАММНОГО УПРАВЛЕНИЯ

Рассмотрим две задачи оптимального управления, которые в дальнейшем будем использовать для обсуждения свойств реализаций траекторий центра давления. Для упрощения анализа будем пренебрегать условием (13), считая, что проба проводится таким образом, что это ограничение не выполняется. Также будем пренебрегать асимметрией в ограничениях скорости изменения голоночного момента

$$-u^- = u^+ = u_m. \quad (14)$$

**Оптимальное быстродействие.** Эта задача относится к хорошо исследованному классу задач оптимального быстродействия [8,9]. Ее особенность состоит в задании специфических краевых условий. Используем для решения принцип максимума Понтрягина. Рассматриваемая нами задача описывается линейной управляемой системой третьего порядка (9). В этой системе при  $u = 0$  все собственные числа действительны. Одно из них положительное, второе отрицательное и равно по модулю первому, а третье – нулевое. Подробный анализ решения этой задачи приведен в работе [9]. Изложим здесь только опорные утверждения, позволяющие выписать решение. Показано, что в этом случае оптимальное управление принимает только постоянные значения, которые с учетом выражений (12) и (14) равны  $u = \pm u_m$ . Это управ-

ление имеет не более двух переключений в моменты  $\tau_1$  и  $\tau_2$  так, что

$$u = \begin{cases} -u_m & \text{при } \tau \in [0, \tau_1] \cup [\tau_2, \tau_f] \\ +u_m & \text{при } \tau \in [\tau_1, \tau_2] \end{cases}. \quad (15)$$

Задачу можно решать, рассматривая траектории системы (9), удовлетворяющие краевым условиям (10) и (11).

Решение системы (9) для интервала времени  $\tau \in [0, \tau_1]$  с учетом начальных условий (10) имеет следующий вид:

$$\varphi_1(\tau) = -\frac{u_m}{2}(e^\tau - e^{-\tau}) + u_m \tau + 1, \\ \varphi_1'(\tau) = -\frac{u_m}{2}(e^\tau + e^{-\tau}) + u_m, \\ m_1(\tau) = -1 - u_m \tau.$$

Для интервала времени  $\tau \in [\tau_1, \tau_2]$  с учетом условий в точке первого переключения

$$\varphi(\tau_1) = \varphi_1(\tau_1), \\ \varphi'(\tau_1) = \varphi_1'(\tau_1), \\ m(\tau_1) = m_1(\tau_1)$$

решение системы (9) имеет следующий вид:

$$\varphi_2(\tau) = u_m(e^{\tau-\tau_1} - e^{-\tau+\tau_1}) - \frac{u_m}{2}(e^\tau - e^{-\tau}) - \\ - u_m(\tau - \tau_1) + 1 + u_m \tau_1, \\ \varphi_2'(\tau) = u_m(e^{\tau-\tau_1} + e^{-\tau+\tau_1}) - \frac{u_m}{2}(e^\tau + e^{-\tau}) - u_m, \\ m_2(\tau) = -1 + u_m(\tau - \tau_1) - u_m \tau.$$

Наконец, для интервала времени  $\tau \in [\tau_2, \tau_f]$  с учетом финальных условий (11) решение системы (9) имеет вид

$$\varphi_3(\tau) = -\frac{u_m}{2}(e^{\tau-\tau_f} - e^{-\tau+\tau_f}) - u_m(\tau - \tau_f), \\ \varphi_3'(\tau) = -\frac{u_m}{2}(e^{\tau-\tau_f} + e^{-\tau+\tau_f}) + u_m, \\ m_3(\tau) = -u_m(\tau - \tau_f).$$

В таком случае соотношения сопряжения решений в точке второго переключения

$$\varphi_2(\tau_2) = \varphi_3(\tau_2), \\ \varphi_2'(\tau_2) = \varphi_3'(\tau_2), \\ m_2(\tau_2) = m_3(\tau_2) \quad (16)$$

позволяют замкнуть систему уравнений для отыскания  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  и  $\tau_f$ . Для решения системы (16) введем новые переменные:

$$\begin{aligned} x &= e^{\tau_1}; \\ y &= e^{\tau_2}; \\ z &= e^{\tau_f/2}. \end{aligned} \quad (17)$$

Тогда систему (16) можно привести к следующему виду:

$$\begin{cases} \frac{y}{z^2}(z^2 - 1) = 2(\beta z - 1), \\ \frac{2y}{\beta z}(\beta z - 1) = z^2 - 1, \\ \beta x = \frac{y}{z}, \end{cases}$$

где  $\beta = e^{\frac{1}{2u_m}}$ .

Исключим из этой системы переменные  $x$  и  $y$ , которые удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{z}{\beta}}, \\ y &= \sqrt{\beta z^3}. \end{aligned} \quad (18)$$

Тогда для определения моментов времени  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  и  $\tau_f$  необходимо найти минимальное действительное решение  $z$  полиномиального уравнения

$$z^4 - 4e^{\frac{1}{2u_m}}z^3 + 6z^2 - 4e^{\frac{1}{2u_m}}z + 1 = 0,$$

удовлетворяющее условию  $z > 1$ . Моменты времени  $\tau_1$ ,  $\tau_2$  и  $\tau_f$  отыскиваются на основании соотношений (17) и (18) по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \ln \sqrt{ze^{\frac{1}{2u_m}}}, \\ \tau_2 &= \ln \sqrt{z^3 e^{\frac{1}{2u_m}}}, \\ \tau_f &= 2 \ln z. \end{aligned}$$

Отметим основные свойства этого решения:

1. Время торможения равно времени разгона:  $\tau_f - \tau_2 = \tau_1$ .
2. Величина снижения значения момента на этапе разгона относительно начального уровня равна максимальному значению на этапе торможения:

$$|1 + m_2(\tau_1)| = m_2(\tau_3).$$

В терминах работы [2] отсюда следует, что для оптимального по быстродействию управления амплитуда «размаха» равна амплитуде «перерегулирования».

3. Управление (15) носит программный характер, в то время как система (9) является неустойчивой. Этого управления недостаточно, чтобы реализовать заданное движение, так как погреш-

ности его реализации приведут к значительным ошибкам при попадании в терминальное состояние (11). Таким образом, параллельно с управлением такого типа в системе должно действовать стабилизирующее управление, которое будет искажать полученную «идеальную» траекторию.

Использование предложенного алгоритма для описания движения человека осложнено также тем обстоятельством, что автору неизвестно биологическое обоснование величины ограничения скорости изменения момента, при котором реальная траектория соотносится с модельной.

**Линейно-квадратичное управление.** Итак, наложение явных ограничений на скорость изменения момента приводит к формированию оптимальных траекторий, очевидно содержащих ярко выраженные участки разгона и торможения. Между тем принятое при расчетах значение максимальной скорости изменения момента меньше, чем реальные значения, известные из литературы [14,15]. В связи с этим рассмотрим также задачу оптимального управления, которая не требует введения явных значений ограничения величины  $u$ . К этому классу относится, например, линейно-квадратичное управление [13,16]. Подобное управление нередко используется при моделировании системы управления движениями человека [17–19] при анализе удержания человеком вертикальной позы.

Для формирования управления будем минимизировать функционал вида

$$J = \int_0^{\infty} [a\varphi^2 + (1-a)m^2 + bu^2] d\tau. \quad (19)$$

Здесь через  $a$  и  $b$  обозначены безразмерные весовые коэффициенты, отображающие вклад соответствующей величины в формирование функционала. Параметр  $b$  отвечает за снижение величины управления – скорости изменения момента. Так как реализуемые физиологические ограничения этой величины неизвестны, рассматривались значения  $b$ , при которых время движения приближенно совпадает со временем изменения позы человеком, стабิโลграмма которого приведена на рис. 1. Параметр  $a \in [0,1]$ . На одном конце этого интервала штрафуются только величины управляющего момента, а на втором – только величины отклонения от финального положения. Для этой задачи отыскивается трехмерный вектор  $\mathbf{k}$  коэффициентов в цепи обратной связи по значениям переменных состояния зада-

чи  $u = -\mathbf{k}(\varphi, \varphi', m)^T$  в соответствии со стандартным алгоритмом линейно-квадратичного управления [13,16]. Вектор  $\mathbf{k}$  коэффициентов задачи определяется через решение  $\mathbf{P}$  матричного уравнения Риккати

$$0 = \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A} + \mathbf{Q} - \mathbf{P} \mathbf{B} \mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}$$

по формуле

$$\mathbf{k} = -\mathbf{R}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{P}.$$

Для задачи (9), (19) матричные коэффициенты уравнения Риккати имеют следующий вид:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-a \end{bmatrix}, \quad \mathbf{R} = b.$$

Для формирования усилий в этом случае система регуляции движений должна определять момент, используя фильтр

$$m' + k_3 m = -k_1 \varphi - k_2 \varphi'.$$

Заметим, что здесь использован стационарный вариант линейно-квадратичного управления. В нестационарном варианте коэффициенты  $\mathbf{k}$  будут зависеть от времени, что затрудняет анализ задачи. Предварительные расчеты показали, что в этом случае основные свойства решений, удовлетворяющих условию приведения решения в малую окрестность положения равновесия, остаются неизменными.

На рис. 4 приведены зависимости от времени безразмерного угла  $\varphi$  и безразмерной координаты центра давления  $y_m = m(1 + \varepsilon) + \varepsilon \varphi$  при различных значениях весового коэффициента  $a$ . Здесь принято обозначение  $\varepsilon = m_p h / J$ .

Полученные решения асимптотически устойчивы и не требуют дополнительной стабилизации. Они не удовлетворяют финальным условиям из выражения (2), тем не менее, за характерные времена порядка времени выполнения человеком упражнения решение приходит в малую окрестность нулевого положения.

Анализ ансамбля полученных траекторий, удовлетворяющих различным значениям  $a$  и  $b$ , показывает, что подбор неизвестных параметров для отображения конкретной траектории возможен, однако не является простой задачей. Помимо этого истолкование связи этих параметров с успешностью выполняемого упражнения не представляется очевидным. Тем не менее, можно отметить некоторые важные свойства полученных траекторий:

1. Разгон на всех приведенных траекториях достаточно интенсивен и примерно одинаков. Это является следствием большого начального отклонения от стабилизируемого конечного положения, которое требуется быстро парировать для минимизации функционала (19).

2. Интенсивность торможения существенно зависит от требований к минимизации ресурсов управления. Торможение является интенсивным и «перерегулирование» велико, если критерий минимизации ресурсов управления не является

существенным. В противном случае соответствующий эффект почти пропадает.

Отметим также, что наблюдаемые траектории будут заметно искажаться при изменении начальной скорости, которая на самом деле не является нулевой. Это обстоятельство позволяет предположить, что эффекты, отмеченные в моделях оптимальных траекторий, будут неизбежно смазаны в практической реализации.

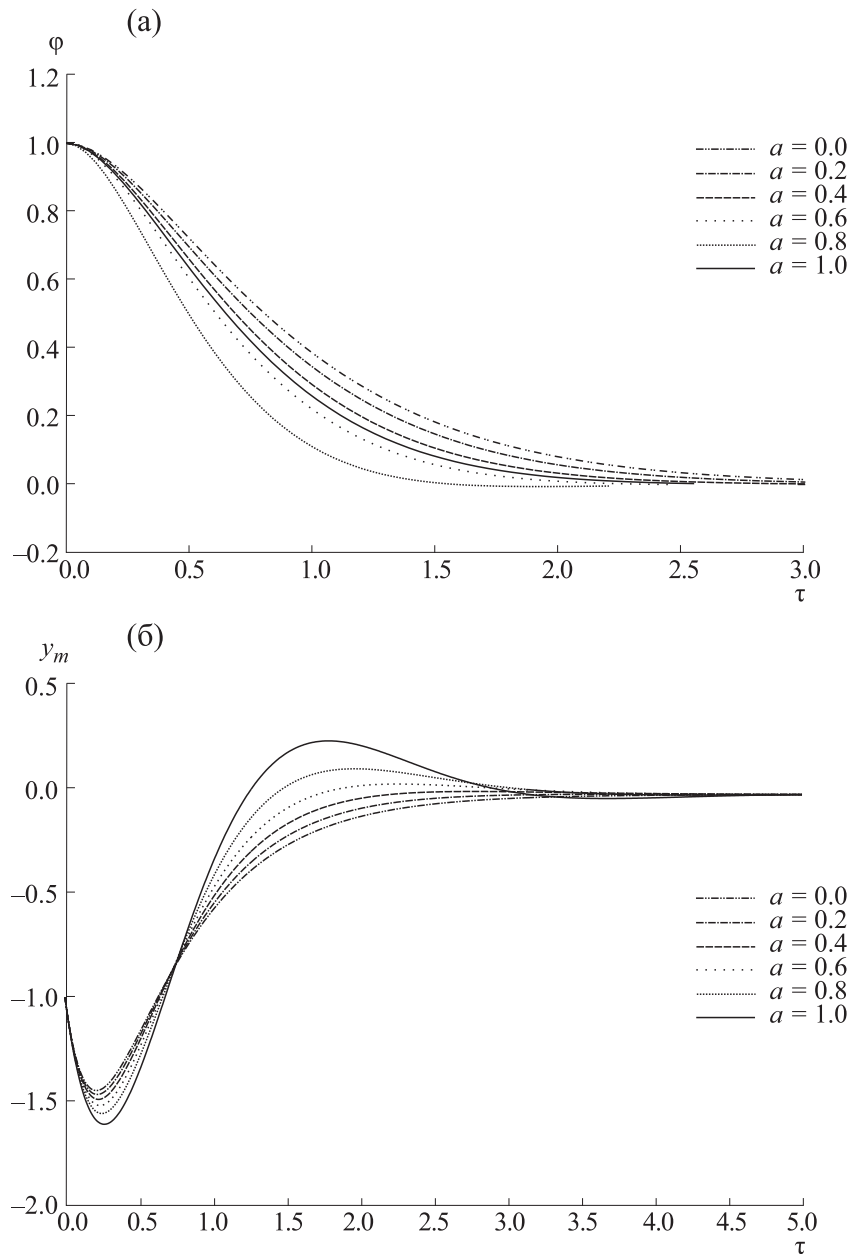
## ОСОБЕННОСТИ ПРОВЕДЕНИЯ ПРОБ

На основании данных об оптимальном решении задачи сформулируем условия проведения проб и опишем показатели, анализ которых будет использован в дальнейшем.

Регистрацию движений человека осуществляли с помощью стабиланализатора «Стабилан 2-01». Обследуемый с открытыми или закрытыми глазами стоял на платформе стабиланализатора и выполнял одну из двух проб.

**Тест со ступенчатым визуальным воздействием.** Человек стоит на платформе стабиланализатора перед экраном, на котором отображается движение его центра давления и показана мишень. В начале центр мишени совмещен со средним положением образа центра давления человека на опорной плоскости. В ходе теста производят изменение положения мишени вдоль оси экрана и человека просят быстро изменить положение туловища в сагиттальной плоскости за счет изменения угла в голеностопном суставе таким образом, чтобы совместить на экране образ центра давления с центром мишени и удерживать его в окрестности последнего. Величина смещения задается в результате предварительной калибровки в соответствии с возможностями обследуемого. Величина скачка мишени соответствовала 20, 50 или 80% от величины максимального отклонения центра давления при наклоне человека. Эти пробы получили соответственно обозначения  $a20$ ,  $a50$  и  $a80$ . Величину максимального отклонения центра давления человек задавал самостоятельно в ходе предварительной калибровки. По прошествии 15 с мишень совершает обратное движение и человека просят снова максимально быстро совместить образ центра давления с новым центром мишени. Цикл повторялся пять раз. Перед проведением записи человек совершал необходимое движение два-три раза для тренировки.

**Тест со ступенчатым отклонением.** Этот тест выполнялся в форме, отличной от предлагаемой в руководстве стабиланализатора [2]. Человек стоит на платформе стабиланализатора с закрытыми глазами. В ходе теста он должен быстро изменить положение туловища в сагиттальной



**Рис. 4.** Расчетные безразмерные зависимости от времени для угловой координаты  $\varphi$  и положения центра давления  $y_m$  в случае линейного квадратичного управления при различных значениях весового коэффициента  $a$ .

плоскости за счет изменения угла в голеностопном суставе на произвольный угол, меньший, чем максимально возможное отклонение. По прошествии 15 с человек по команде совершает обратное движение. Такой цикл также повторялся пять раз.

Продолжительность каждого теста составляла пять-десять минут. Перерыв между тестами для одного обследуемого составлял не менее трех минут.

Основное различие в выполняемых тестах заключается в следующем. В первом случае человек при виде движения мишени планирует движение, и нервная система «запускает» программу выполнения этого запланированного движения. Во время движения человек оценивает ход его выполнения, прогнозирует погрешность попадания маркера в центр мишени и корректирует движение. Во втором случае обратная связь по результатам совершенного движения отсутствует, и мы имеем

возможность анализировать реализацию запланированного программного движения.

### АЛГОРИТМ ОБРАБОТКИ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБСЛЕДОВАНИЙ

При проведении проб человек тем или иным способом получает команду на выполнение движения. После получения команды следует латентный период, в ходе которого нервная система обрабатывает информацию и принимает решение о совершении движения. Логично предположить, что за это время формируется программное управление с учетом совершенного «прицеливания». По-видимому, начальный этап движения реализуется полностью с этим управлением. Возмущения на этом этапе связаны с «погрешностью» знания начальных условий движения туловища — координат и скоростей. На завершающей стадии движения существенное влияние будет оказывать также погрешность «прицеливания», которую при наличии визуальной обратной связи человек начинает корректировать в ходе движения. Это обстоятельство для теста с визуальным ступенчатым воздействием может значительно смазывать эффекты, наблюдаемые на участках разгона и торможения.

Вследствие этого был изменен и стандартный алгоритм обработки показаний данных стабилоанализатора.

При наличии ожидаемых случайных расхождений в реализации движения в качестве маркерных показателей целесообразно использовать усредненные относительные величины, значение которых для оптимальных решений известно.

В приведенном примере в качестве указанных маркерных показателей помимо скорости совершения движения могут быть использованы отношения величин «перерегулирования» и «размаха». Параметры, описывающие «размах» и «перерегулирование», характеризуют интенсивность мышечных усилий при разгоне в начале движения и в ходе финального торможения. Использование безразмерных величин, помимо известных преимуществ [20–22], позволит сравнивать их со значениями для решений безразмерных задач оптимального управления.

Алгоритм обработки результатов обследований отличался от стандартного, принятого в программном обеспечении комплекса StabMed [2]. При обработке записей латентный период не рассматривался и одновременными считались середины интервалов времени между минимумом и максимумом стабิโลграмм при выполнении движения.

Для сравнения движений с различными амплитудами стабิโลграмму каждого конкретного движения пересчитывали к безразмерному виду.

Введем следующие обозначения. Величину экстремума стабิโลграммы (минимума для движения вперед и максимума для движения назад), предшествующего движению, обозначим  $y_s$ , а величину локального экстремума в завершающей части движения —  $y_t$ . Эти значения координата центра давления принимает в моменты времени  $t_s$  и  $t_t$  соответственно (см. рис. 1). Среднюю скорость центра давления на движении вычисляли по следующей формуле:  $v_m = \frac{y_t - y_s}{t_t - t_s}$ .

За локальное начало отсчета времени для каждого конкретного движения примем момент времени  $t_0 = (t_t + t_s)/2$ . Будем рассматривать движение с момента времени за 4 с до  $t_0$  и до момента  $t_0 + 6$  с. Для каждой стабิโลграммы выделяли участок покоя, предшествующий движению, и участок покоя или «пассивного» движения после его завершения. Средние значения координаты центра давления для этих участков обозначим  $y_a$  и  $y_b$  соответственно. Величиной смещения назовем разность  $d_y = |y_a - y_b|$ .

Новое значение безразмерной координаты и безразмерного времени для каждого единичного перемещения будем рассчитывать по формулам

$$y_m = \frac{y - y_b}{d_y}, \quad \tau_e = \frac{|v_m|}{d_y} (t - t_0).$$

Каждое движение обследуемого приводили к своим безразмерным переменным, после чего по всем циклам пробы вычисляли среднюю траекторию, как показано на рис. 5. Определяли следующие параметры этой траектории:

$A_s$  — безразмерная «амплитуда размаха» (интенсивность разгона);

$A_0$  — безразмерная «амплитуда перерегулирования» (интенсивность торможения);

$\Delta_{os} = A_0/A_s$  — отношение «амплитуд» торможения и разгона. Для решения задачи оптимального управления в случае симметрии ограничений на скорости сокращения мышц эта величина равна единице и убывает в случае экономии энергозатрат.

### РЕЗУЛЬТАТЫ ОБСЛЕДОВАНИЙ

В обследовании приняли участие 17 добровольцев обоего пола в возрасте от 19 до 60 лет. 11 из них выполняли пробу со ступенчатым визуальным воздействием  $a$ . Величина скачка мишени менялась на 20, 50 или 80% от величины максимального отклонения центра давления при наклоне. Для указанных величин скачка мишени значения  $A_s$ ,  $A_0$  и  $\Delta_{os}$  приведены в таблице. В последнем столбце таблицы приведены средние



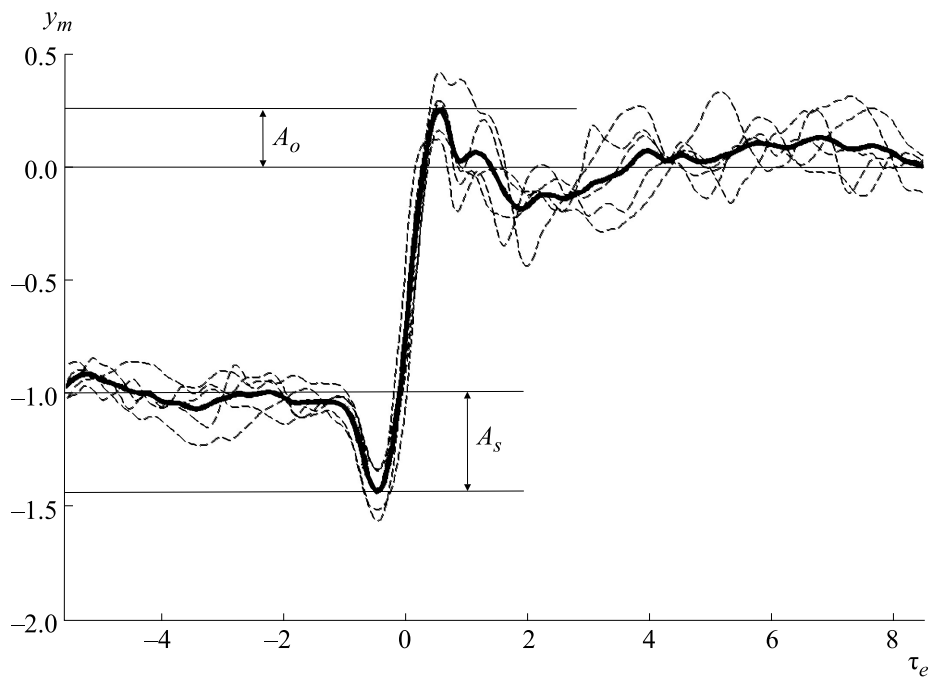


Рис. 5. Усредненный ансамбль безразмерных стабิโลграмм. Пунктирными линиями обозначены реализации, сплошной линией – усредненная стабิโลграмма.

значения разбросов координат центра давления в ходе одной пробы. Эти значения показывают, что разбросы мгновенных значений координат велики и выводы возможны только на основе статистического анализа. Также в таблице приведены средние значения скорости  $v_m$ . Разбросы этой величины достигают 70%, однако повторные обследования, проведенные для трех человек с интервалом от недели до года, показали, что средние величины скоростей отличаются на 20–30%.

Характерной особенностью приведенных данных является значительно сниженное значение  $\Delta_{os}$  для пробы  $a80$ . В подтверждение регулярности этого вывода заметим, что у 88% обследуемых при отклонении вперед в пробе  $a80$  величина  $\Delta_{os}$  составила менее 2/3. У 65% из них эта величина более чем на 30% ниже, чем ее значение в тестах с меньшими величинами смещений, и у 70% меньше чем при возвратном движении. Логично пред-

положить, что в этом случае имеет место уменьшение величины тормозящего момента по сравнению с максимальным моментом при разгоне вследствие возможного нарушения ограничения (8). Приближение к этой границе могло привести к отрыву пяток или носков от пола, что запрещалось правилами проведения теста. В то же время граница максимального отклонения центра давления устанавливалась обследуемым субъективно. В таких условиях не следовало ожидать стопроцентного результата в этом тесте. Отметим также, что в пробе  $a20$  у 75% обследуемых, а в пробе  $a50$  – у 60% обследуемых  $\Delta_{os}$  отличается от единицы менее чем на 30%. Это также косвенно подтверждает сделанный вывод.

Второй тест, выполняемый с закрытыми глазами, делали 13 обследуемых. Средние значения показателей для этого теста приведены в последней строке таблицы. Вариабельность траекторий

Средние значения характеристик движений при прохождении теста здоровыми обследуемыми

Тест	Вперед			Назад			Средняя скорость ЦД, мм/с	Погрешность
	$A_s$	$A_o$	$\Delta_{os}$	$A_s$	$A_o$	$\Delta_{os}$		
$a20$	0.6	0.54	1.18	0.56	0.41	0.86	49	0.31
$a50$	0.45	0.33	0.80	0.43	0.33	0.90	76	0.21
$a80$	0.40	0.18	0.48	0.31	0.31	1.08	110	0.19
$b$	0.37	0.40	1.42	0.32	0.36	1.29	118	0.13

при выполнении такого движения существенно меньше, как видно из последнего столбца приведенной таблицы. Значения параметров движения с закрытыми глазами сравнивали с показателями движения вперед с открытыми глазами при смещении мишени  $a50$ . При движении вперед торможение активнее разгона на 30% и более для 38% обследуемых, а на 50% и более – для 23% обследуемых. Для движения с открытыми глазами эта величина в обоих случаях была меньше 8%. В то же время при возвратном движении при закрытых глазах  $\Delta_{os}$  составляла меньше 0,7 для 8% обследуемых. При открытых глазах  $\Delta_{os} < 0,7$  наблюдалась для 38% обследуемых и  $\Delta_{os} < 0,5$  – для 23% обследуемых. Заметим, что в пробе с закрытыми глазами торможение оказалось интенсивнее разгона.

Помимо этого, в обследовании приняли участие три пожилых человека разного пола в возрасте 80–90 лет с различными нарушениями опорно-двигательной и нервной систем. Значения амплитуд и их соотношений у них лежали в пределах значений, отмеченных для здоровых обследованных. Отметим при этом, что средняя скорость  $v_m$  выполнения движения у больной с неврологическими нарушениями (болезнь Альцгеймера) оказалась, аналогично результатам, полученным в работе [6], значительно ниже средней скорости для здоровых обследованных.

### ОБСУЖДЕНИЕ

Итак, в подавляющем большинстве случаев при выполнении пробы со ступенчатым воздействием в стабиллограмме наблюдаются четко выраженные участки разгона и торможения, отображаемые на стабиллограмме интервалами попятного движения центра давления – «размаха» – и превышения финального положения маркера, отображающего положение центра давления – «перерегулирование». На первый взгляд, это утверждение противоречит данным из документации стабиллоанализаторов [2], в которых выделены типы переходных процессов, не содержащие перерегулирования. Например, для проведенного исследования в программном обеспечении Stabmed параметр «тип переходного процесса» принимает все значения от 2 до 6. Объяснение этого парадокса заключается в способе усреднения траекторий, принятом в программном обеспечении StabMed, где при усреднении данных для последующего анализа за начало отсчета принимаются моменты подачи визуального стимула. При этом «перерегулирование» описывается как «превышение» уровня стабиллограммы над уровнем, задаваемым положением мишени. В этом случае траектория значительно «размывается» за счет варибельности таких величин, как

продолжительность латентного периода, скорость выполнения движения и величина промаха с недолетом «при прицеливании». В настоящей работе ставилось целью исследование самого движения и параметры для обработки выбирали таким образом, чтобы максимальным образом отделить само движение и исключить из анализа влияние латентного периода. Такой подход позволил максимально выявить проявление механических особенностей выполняемого движения для всех обследуемых и показать, что рассматриваемое движение носит характер устойчивого двигательного штампа.

Отметим в заключение, что использование специальных математических моделей типа представленной в работе [23] позволит аккуратнее формализовать вычисление основных показателей, обсуждавшихся в настоящей статье.

### ФИНАНСИРОВАНИЕ РАБОТЫ

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 18-00-01590).

### СОБЛЮДЕНИЕ ЭТИЧЕСКИХ СТАНДАРТОВ

Все процедуры, выполненные в исследовании с участием людей, соответствовали этическим стандартам Хельсинкской декларации 1964 г. и ее последующим изменениям. От каждого из включенных в исследование участников было получено информированное добровольное согласие.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. F. B. Horak and F. J. Hlavacka, *J. Neurophysiol.* **86**, 575 (2001).
2. Г. А. Переяслов и С. С. Слива, *Изв. ТРТУ* **5** (28), 82 (2002).
3. B. N. Smetanin, K. E. Popov, and G. V. Kozhina, *Neurophysiol.* **36** (1), 58 (2004).
4. В. Ю. Шлыков, Т. Б. Киреева и Ю. С. Левик, *Изв. ЮФУ. Техн. науки* **6** (83), 112 (2008).
5. Ю. С. Левик, Т. Б. Киреева и В. Ю. Шлыков, *Альманах клин. медицины* **17-2**, 217 (2008).
6. Е. П. Муртазина, *Изв. ЮФУ. Техн. науки* **9** (98), 123 (2009).
7. Г. С. Кашеваров, О. И. Елкина и Р. Р. Касимова, *Лечебная физкультура и спортивная медицина* **4** (130), 36 (2015).
8. И. Ю. Горская, Л. Г. Харитоновна, А. А. Терещенко и О. В. Криживецкая, *Совр. проблемы науки и образования*, № 2 (2017). URL: <http://www.science-education.ru/ru/article/view?id=26193> (дата обращения: 26.06.2019).
9. П. А. Кручинин и Е. А. Касаткин, *Изв. ЮФУ. Техн. науки* **10** (159), 254 (2014).

10. П. А. Кручинин, Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика. Механика, № 2, 62 (2016).
11. П. А. Кручинин, Рос. журн. биомеханики **18** (2), 184 (2014).
12. М. Атанс и П. Фалб, *Оптимальное управление* (Машиностроение, М., 1968).
13. Я. Н. Ройтенберг, *Автоматическое управление* (Наука, М., 1971).
14. A. L. Hof, J. Biomech. **36** (7), 1031 (2003).
15. V. J. Thompson, E. D. Ryan, T. J. Herda, et al., J. Electromyogr. and Kines. **22** (6), 893 (2012).
16. В. В. Александров, С. И. Злочевский, С. С. Лемак и Н. А. Парусников, *Введение в динамику управляемых систем* (Изд-во ЦПИ при мех.-мат. ф-те МГУ, М., 1993).
17. A.D. Kuo, IEEE Trans. Biomed. Eng. **42** (1), 87 (1995).
18. S. G. Carver, T. Kiemel, N. J. Cowan, and J. J. Jeka, Biol. Cyber. **101** (1) 35 (2009).
19. P. Paoletti and L. Mahadevan, J. R. Soc. Interface **9**, 2097 (2012).
20. A. L. Hof, Gait & Posture **4** (3), 222 (1996.)
21. Л. И. Седов, *Методы подобия и размерности в механике* (Наука, М., 1977).
22. И. В. Новожилов, *Фракционный анализ* (Изд-во мех.-мат. ф-та МГУ, М., 1995).
23. А. П. Кручинина и А. Г. Якушев, Вестн. МГУ. Сер. 1, Математика. Механика, № 2, 68 (2018).

## Analyzing the Results of Stabilometric Tests under a Stepwise Input Action in the Context of Mechanics of Controlled Systems

P.A. Kruchinin

*Faculty of Mechanics and Mathematics, Lomonosov Moscow State University, Leninskiye Gory 1, Moscow, 119991 Russia*

In this paper we consider optimal control problems for a human motion model in the case of stabilometric tests when the posture of a person changes under a stepwise input action. A characteristic peculiarity of the center of pressure trajectories for these tests is the presence of prominent «swing» and «overshoot». In this work one-dimensional inverted pendulum model is used. The solution of optimal control for the inverted pendulum motion controlled by coupling torque is put in correspondence with the results of such tests. The problems of optimal speed-of-response control and linear-quadratic regulator are considered. The solution of these optimum problems is compared with the results of stabilometric tests. A modified algorithm for stabilographic data processing is proposed. It is shown that the motion under study reaches a stable motor pattern. “Swing” and “overshoot” correspond to the stages of acceleration and deceleration, respectively.

*Keywords: change of upright posture, stabilometry, tests under a stepwise input action, optimal control*