

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ОПТИМАЛЬНОГО САККАДИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ ГЛАЗА, РЕАЛИЗУЕМОГО ПАРОЙ МЫШЦ

© 2018 г. А.П. Кручинина, А.Г. Якушев

Механико-математический факультет Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова,
119991, Москва, Ленинские горы, 1

E-mail: a.kruch@moids.ru

Поступила в редакцию 20.02.16 г.

Работа посвящена моделированию саккадического движения глаза. Движение глаза полагается оптимальным по быстродействию, так как реализации саккад (быстрых содружественных движений обоих глаз) происходят несколько сотен тысяч раз за день, а зрительное восприятие окружающего мира во время саккады прерывается. Для рассматриваемого движения в трех последовательно уточняющихся предположениях построен синтез оптимального управления. В качестве управления в оптимальной задаче рассмотрены: суммарный момент, действующий на глаз со стороны глазодвигательных мышц; по отдельности моменты сил, создаваемых каждой глазодвигательной мышцей пары агонист–антагонист, и, наконец, скорости изменения каждого из этих моментов. Такая постановка задачи согласуется с существующим у физиологов мнением о том, что саккада программируется центральной нервной системой до начала движения глаза и практически не корректируется во время движения. Результаты решения оптимальной задачи и последующего численного моделирования саккадических траекторий сравнены с литературными данными. В качестве критерия для сравнения выбрана главная последовательность, выражающая зависимость между амплитудой и продолжительностью саккады, как наиболее широко распространенный и общепринятый способ описания массива саккад. Полученная по решению наиболее полной задачи оптимального управления главная последовательность хорошо согласуется с имеющимися в литературе экспериментальными данными.

Ключевые слова: математическое моделирование, саккадическое движение глаза, оптимальное управление, задача быстродействия, антагонистическое управление, парное управление.

Известно, что четкое видение рассматриваемого объекта возможно, если изображение этого объекта проецируется на *fovea* (центральную область сетчатки глаза, обладающую наибольшей плотностью фоторецепторов), находясь в конусе с углом раствора не более 2° , при этом скорость движения изображения рассматриваемого объекта относительно сетчатки глаза (ретинальное скольжение) не должна превышать $4^\circ/\text{с}$ [1]. В фундаментальной работе А.Л. Ярбуса [2] показано, что процесс зрительного восприятия организован как последовательность фиксаций взора на отдельных точках, постоянно сменяющих одна другую. Смена точки фиксации производится посредством быстрого движения глаза – саккады.

С появлением возможности записи видеосигнала с высоким временным разрешением опубликовано много работ, связанных с регистрацией саккадического движения глаза, что дало толчок для его интенсивного изучения [3–5]. Обычно саккадическую траекторию считают

достаточно простой, например, такой, что ее можно аппроксимировать косинусоидой [6] или функцией Больцмана [7]. На видео- и электроокулографических записях видно, что саккадическое движение может иметь достаточно сложную форму с пре- и постсаккадическими элементами [8]. В литературе рассматриваются и анализируются экспериментальные данные [9], проводится построение различных математических моделей. В моделях разной сложности учитывается, что на саккадическое движение глаза влияют не только свойства глазодвигательной мышцы, но и структура управляющего нервного сигнала, характеристики и свойства глазного яблока и мягких тканей глазницы [10].

Появляются публикации, рассказывающие обо все расширяющихся возможностях использования записей движений глаз в практических целях. Прежде всего, нужно упомянуть о применении окулографии в медицине и науке о человеке. Изучение движений глаз, в том числе саккадических, позволяет оценивать состояние центральной нервной системы пациента, его

вестибулярного аппарата. Проведение последовательных окулографических исследований позволяет оценить динамику течения заболевания. В некоторых случаях они используются для уточнения диагноза [11]. Отдельный интерес представляют работы, в которых изучаются возможности оценки функционального состояния человека-оператора по записям движений его глаз. Исследование движений глаз включено в пред- и послеполетное обследование космонавтов [12–14].

В отличие, например, от электрокардиограммы, автоматическая дифференцировка разных типов саккад пока что не реализована. Для обеспечения возможности автоматизации распознавания типов саккад можно опираться на математические модели саккадического движения [11]. На сегодняшний день не существует математической модели саккады, варьирование параметров которой давало бы реализации всех наблюдаемых типов саккадического движения глаза.

Процесс восприятия визуальной информации об окружающем мире, получаемой человеком, осуществляется прерывисто, на отдельных временных промежутках, называемых промежутками четкого видения, перемежающихся промежутками, в которые четкое видение отсутствует – промежутками перевода взора. Для оценки качества зрительного восприятия в работе [15] был предложен коэффициент стабилизации взора, который вычисляется как отношение суммарного времени, когда выполняются условия четкого видения, ко всему времени процесса. Данная величина позволяет сравнивать качество стабилизации взора разных людей или рассматривать разные состояния одного человека. В работах [16] и [17] приведены значения коэффициента для здоровых, больных и лиц, находящихся в состоянии алкогольного опьянения, рассчитанные на основе экспериментальных данных. Из данных работ следует, что коэффициент стабилизации взора здорового человека выше, чем у больного. В состоянии алкогольного опьянения коэффициент стабилизации взора человека существенно снижается.

Известно, что движение глазного яблока обеспечивается тремя парами мышц. Наиболее хорошо регистрируемым и широко представленным в литературе является движение глаза в горизонтальной плоскости.

В результате ряда исследований было высказано предположение, что саккадическое движение глаза близко к движению, оптимальному по быстродействию. В литературе рассматриваются критерии оптимальности различной сложности, но, как показано в ряде работ [4, 9, 18], определяющий вклад вносит часть функционала, отвечающая за быстродействие.

Глазодвигательные мышцы относятся к самым быстрым мышцам человека [10]. Саккадическое движение глаза занимает менее 0,1 с, о требуемой точности попадания взора на мишень сказано выше.

Известно, что набор или сброс напряжения мышцы не происходят мгновенно [19]. Из работы [10] известны характеристики скорости сокращения различных мышечных волокон. В данной работе скорость изменения силы, развиваемой глазодвигательной мышцей, считается известной ограниченной величиной.

Для верификации результатов и сравнения разных моделей между собой принято использовать зависимость продолжительности саккадического движения и максимальной угловой скорости, достигаемой глазом во время саккады, от его амплитуды. Эти зависимости, называемые главной последовательностью (main sequence), по сути, являются усреднением большого количества экспериментальных данных. Набор статистических данных различных экспериментов, представленный в литературе, достаточно велик. Экспериментальные данные обычно аппроксимируют степенной или логарифмической кривой [20]. Результаты разных аппроксимаций согласуются между собой. Из этого следует, что саккады одинаковых амплитуд у разных людей реализуются по стереотипным законам и демонстрируют в среднем одинаковую продолжительность и одинаковую максимальную скорость.

ЗАДАЧА БЫСТРОДЕЙСТВИЯ I

Рассмотрим задачу перевода взора на величину s радиан по горизонтали. В рамках данной работы идеализируем условия четкого видения, полагая, что угловое положение мишени и ее угловая скорость относительно сетчатки должны равняться нулю. Пусть в начальный момент времени человек смотрит прямо перед собой, назовем это положение нулевым. Глазное яблоко, приводимое в движение парой мышц, будем считать абсолютно твердым телом, движущимся согласно уравнению

$$I\ddot{\varphi} = M,$$

где φ – угол поворота глаза относительно головы, I – осевой момент инерции глаза, $M = M_1 - M_2$ – суммарный момент сил, приложенных со стороны глазодвигательных мышц, M_1 и M_2 – моменты сил каждой из мышц, агониста и антагониста.

В учебной биологической литературе, например в монографии [10], отражена традиционная точка зрения, согласно которой глазодвигательные мышцы находятся в антагонистических взаимоотношениях и напряжение одной

из них ведет к расслаблению другой, т.е. мышцы реализуют антагонистическое управление. В качестве управления в данной задаче рассмотрим разность $u = M_1 - M_2$. Выпишем следующую задачу оптимального управления:

$$\begin{aligned} I\ddot{\varphi} &= u, \quad u = M_1 - M_2, \quad M_1 M_2 = 0; \\ 0 &\leq |M_i| \leq M_*; \quad i = 1, 2, \\ \varphi(0) &= 0, \quad \varphi(T) = s, \quad \dot{\varphi}(0) = 0, \quad \dot{\varphi}(T) = 0, \\ J &= \int_0^T dt \rightarrow \min. \end{aligned} \quad (1)$$

Решение данной задачи можно получить с помощью принципа максимума Понтрягина. Оптимальное управление в этой задаче имеет одну и ту же структуру независимо от амплитуды саккады s . На рис. 1а показано оптимальное управление как функция времени, на рис. 1б оно изображено на фазовой плоскости $M_1 M_2$. На этой плоскости фазовая траектория изображается двумя точками. Первую половину времени движения система находится в точке $(M_*; 0)$, затем мгновенно переходит в точку $(0; M_*)$, в которой остается до окончания процесса движения. Оптимальная траектория движения глаза в этом случае выписывается явно и имеет следующий вид:

$$\varphi = \begin{cases} \frac{M_*}{2I} t^2 & \text{при } 0 \leq t \leq \frac{T}{2}, \quad u = M_*, \\ -\frac{M_*}{2I} (T-t)^2 + s & \text{при } \frac{T}{2} \leq t \leq T, \quad u = -M_*, \end{cases} \quad (2)$$

$$T = 2\sqrt{\frac{sI}{M_*}}.$$

Рассмотрим полученное решение (2). Прежде всего, заметим, что угловая скорость глаза оказывается кусочно-линейной функцией времени, тогда как в эксперименте регистрируется колоколообразный профиль скорости. Кроме того, длительность саккады как функция от ее амплитуды оказывается существенно меньшей, чем это предписывается главной последовательностью (см. рис. 2). Это приводит к выводу о невысоком соответствии полученного решения экспериментальным данным.

ЗАДАЧА БЫСТРОДЕЙСТВИЯ II

Уточним рассматриваемую в задаче модель движения глаза. Учтем, что в реальности сила, развиваемая мышцей, не может изменяться скачком ни в сторону напряжения, ни в сторону расслабления. В качестве двух управлений рассмотрим скорости u_1 и u_2 изменения моментов сил, развиваемых каждой из глазодвигательных

мышц. Эти скорости ограничены по модулю некоторой величиной u_0 .

Кроме того, откажемся от предположения об антагонистическом характере мышечного управления, напротив, будем полагать, что глазодвигательные мышцы реализуют парное управление.

В задаче II, как и в задаче I, ставится требование быстродействия. Однако теперь это требование уточняется. Мы потребуем, чтобы минимальной была лишь та часть времени саккадического движения глаза, когда нарушено условие четкого видения. Известно, [2,7], что от появления зрительного стимула до начала саккады проходит значительное время, обозначим его как T_0 . Считается, что это время используется для построения программы саккады. Но в этот же подготовительный период $[0; T_0]$ следует включать и ту часть времени решения оптимальной задачи, когда управления и моменты сил в системе уже изменяются, а механическое движение глаза еще не началось, т.е. начальные условия $\varphi(\tau) = 0, \dot{\varphi}(\tau) = 0$ тождественно выполняются для всех $\tau \in [0; T_0]$. Аналогичная ситуация имеет место в конце саккады, когда глаз уже направлен на мишень, его движение окончено, способность четкого видения восстановилась, но еще происходит изменение сил, развиваемых мышцами. Таким образом, на всем конечном отрезке времени тоже тождественно выполняются граничные условия $\varphi(\sigma) = s$ и $\dot{\varphi}(\sigma) = 0$ для всех $\sigma \in [T_e; T]$. Этот конечный отрезок времени также не следует учитывать в задаче быстродействия.

Получаем задачу, включающую линейную систему четвертого порядка с двумя ограниченными управлениями, с заданными начальными и конечными условиями:

$$\begin{cases} I\ddot{\varphi} = M_1 - M_2, \\ \dot{M}_1 = u_1, \\ \dot{M}_2 = u_2, \end{cases} \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \varphi(\tau) &= 0; \quad \dot{\varphi}(\tau) = 0, \quad \varphi(\sigma) = s; \quad \dot{\varphi}(\sigma) = 0, \\ M_1(0) &= M_2(0) = M_1(T) = M_2(T) = M_0, \\ M_1(\tau) &= M_2(\tau); \quad M_1(\sigma) = M_2(\sigma), \\ 0 &\leq \tau \leq T_0, \quad T_e \leq \sigma \leq T, \\ M_i &\geq 0, \quad i = 1; 2, \quad |u_i| \leq u_*, \quad i = 1; 2, \end{aligned}$$

$$J = \int_{T_0}^{T_e} dt \rightarrow \min.$$

Начальные и конечные условия на моменты сил, развиваемых мышцами, в моменты начала T_0 и окончания T_e движения глаза равны между

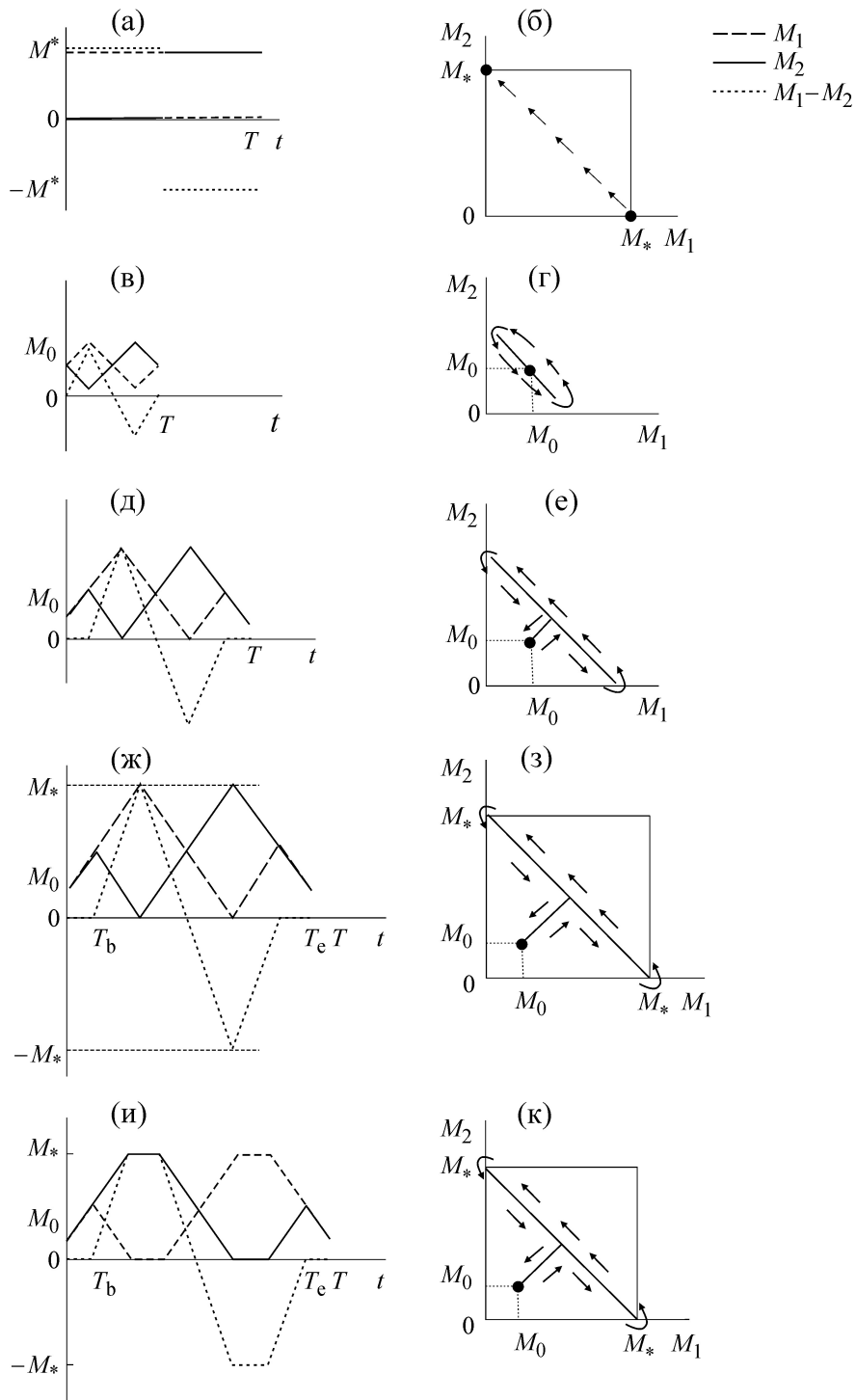


Рис. 1. (а) – Оптимальное управление движением глаз как функция времени; (б) – оптимальное управление на фазовой плоскости M_1M_2 ; (в) и (г) – решение вспомогательной задачи (4, 5); (д) и (е) – решение задачи (3, 9) при больших значениях амплитуды s ; (ж) и (з) – решение задачи (3, 9, 10) в случае, если траектория (6, 7) не выходит на ограничение $M_i = M_*$, т.е. если амплитуда саккады не превосходит некоторого значения s_2 ; (д) и (е) – решение задачи (3, 9, 10) для саккады большой амплитуды, когда $s > s_2$.

собой. В задаче имеется фазовое ограничение – условие неотрицательности моментов сил.

Упростим эту задачу, рассматривая ее подзадачу только на том интервале, когда имеется

механическое движение глаза. Начальные и конечные условия на моменты сил в подзадаче свободны: $M_1(T_0) = M_2(T_0) = M_b$ и $M_1(T_e) =$

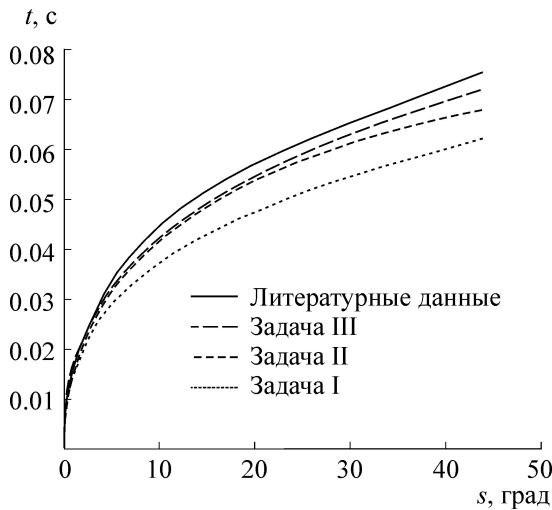


Рис. 2. Сравнение результатов численного моделирования с литературными данными.

$M_2(T_e) = M_e$. Получаем следующую постановку оптимальной задачи быстрогодействия:

$$\begin{cases} I\ddot{\varphi} = M_1 - M_2, \\ \dot{M}_1 = u_1, \\ \dot{M}_2 = u_2, \end{cases} \quad \begin{cases} \varphi(T_0) = 0; \dot{\varphi}(T_0) = 0, \varphi(T_e) = s; \dot{\varphi}(T_e) = 0, \\ M_1(T_0) = M_2(T_0) = M_b, M_1(T_e) = M_2(T_e) = M_e, \\ M_i \geq 0, i = 1; 2, |u_i| \leq u_*, i = 1; 2, \\ T_e \end{cases} \quad (4)$$

$$J = \int_{T_0}^{T_e} dt \rightarrow \min.$$

В системе дифференциальных уравнений, выписанной в (4), собственные числа системы нулевые и для нее справедлива теорема Фельдбаума (теорема об n -интервалах) [22]. На основании этой теоремы заключаем, что оптимальное управление может содержать не более четырех переключений.

Решение этой подзадачи неоднозначно: для каждого значения амплитуды саккады s существует бесконечное множество решений, доставляющих одно и то же минимальное значение функционалу J при разных начальных (M_b) и конечных (M_e) условиях на моменты сил, развиваемых мышцами. Поэтому добавим условия, исключающие неоднозначность:

$$|M_b - M_0| \rightarrow \min \text{ и } |M_e - M_0| \rightarrow \min, \quad (5)$$

где M_0 – величина момента силы глазодвигательной мышцы, развиваемой в состоянии покоя.

Теперь для каждого значения s задача имеет единственное решение. Однако структура оптимальной траектории зависит от амплитуды s .

На фазовой плоскости $M_1 M_2$ оптимальная траектория имеет вид отрезка, пройденного изображающей точкой дважды. При малых значениях s движение начинается из точки $(M_0; M_0)$ с управлениями $u_1 = u_*$ и $u_2 = -u_*$ последующим переключением на $(-u_*; u_*)$ и обратно на $(u_*; -u_*)$ и возвращением в точку $(M_0; M_0)$. Отметим, что во все время движения переменные M_1 и M_2 строго положительны.

При больших значениях амплитуды s траектория строится аналогично, только начальной и конечной точкой является точка $(M_b; M_b)$, а на концах отрезка один или другой моменты обращаются в нуль.

Решение вспомогательной задачи (4, 5) показано на рис. 1в, г. Можно выписать аналитическое решение вспомогательной задачи (4, 5) в замкнутом виде для управлений

$$\begin{aligned} u_1 = u_*, u_2 = -u_* \text{ при } t \in \left[0; \frac{P}{4}\right] \cup \left[\frac{3P}{4}; P\right], \\ u_1 = -u_*, u_2 = u_* \text{ при } t \in \left[\frac{P}{4}; \frac{3P}{4}\right] \end{aligned} \quad (6)$$

и для угла поворота глаза $\varphi(t)$:

$$\varphi = \begin{cases} \frac{t^3}{6I} u_* \text{ при } t \in \left[0; \frac{P}{4}\right], \\ -\frac{1}{48I} \left(8t^3 - 12Pt^2 + 3P^2t - \frac{P^3}{4}\right) u_* \\ \text{при } t \in \left[\frac{P}{4}; \frac{3P}{4}\right], \\ \frac{1}{6I} (t - P)^3 u_* + \frac{P^3}{32I} u_* \text{ при } t \in \left[\frac{3P}{4}; P\right]. \end{cases} \quad (7)$$

Здесь буквой P обозначено время саккадического движения глаза: $P = T_e - T_0 = \sqrt[3]{\frac{s}{2u_*}}$.

Доказательство оптимальности решения (6, 7) задачи (4, 5) можно осуществить с помощью принципа расширения [21]. Для этого рассмотрим задачу без фазового ограничения:

$$\begin{cases} I\ddot{\varphi} = M, \\ \dot{M} = u, \end{cases} \quad \begin{cases} \varphi(T_0) = 0; \dot{\varphi}(T_0) = 0, \varphi(T_e) = s; \dot{\varphi}(T_e) = 0, \\ M(T_0) = M(T_e) = 0, |u| \leq 2u_*, \\ T_e \end{cases} \quad (8)$$

$$J = \int_{T_0}^{T_e} dt \rightarrow \min.$$

Ее решение, очевидно, имеет вид релейного управления, и время движения в точности сов-

падает с величиной P , введенной в (6, 7). Но множество управлений в задаче (8), считая $u = u_1 - u_2$, не меньше множества управлений в (4, 5), поэтому совпадение экстремальных значений функционалов в силу упомянутого выше принципа расширения доказывает оптимальность решения (6,7). Следовательно, решение не может содержать движение по границе, показанное на рис. 3.

Теперь можно вернуться к оптимальной задаче (3). Ее решение совпадает с решением (6, 7) при малых s и получается доопределением решения (6, 7) на интервалах времени $[0; T_0]$ и $[T_e; T]$ при больших значениях s . Это опять можно сделать бесконечным числом способов, поэтому для обеспечения однозначности введем условия, аналогичные условиям (5):

$$T_0 \rightarrow \min \text{ и } T - T_e \rightarrow \min. \quad (9)$$

Решение задачи (3, 9) при больших значениях амплитуды s показано на рис. 1д, е.

Нетрудно записать времена движения глаза для задачи I и задачи II:

$$\begin{aligned} \text{I: } T &= 2\sqrt{\frac{sI}{M_*}}, \\ \text{II, } s < s_1: P &= 4\sqrt[3]{\frac{sI}{2u_*}}, \\ \text{II, } s \geq s_1: T &= 2\frac{M_b - M_0}{u_*} + 4\sqrt[3]{\frac{sI}{2u_*}}, \end{aligned}$$

где s_1 – амплитуда, при которой оказывается выгоден выход на значение M_b , начальное для быстрого движения.

Решение задачи II – задачи (3, 9) – значительно лучше соответствует экспериментальным наблюдениям. Форма графика угловой скорости глаза приблизилась к колоколообразной и представляет собой состыкованные участки трех парабол. Результаты решения достаточно точно описывают движение глаза при малых саккадах, до 10° . Это подтверждается хорошим соответствием главных последовательностей. Однако при саккадах на большие углы время движения в задаче (3, 9) опять оказывается существенно меньше, чем в эксперименте. Это отличие объясняется тем, что в этой постановке не было учтено ограничение на величину максимального момента силы, развиваемой экстраокулярной мышцей.

ЗАДАЧА БЫСТРОДЕЙСТВИЯ III

Уточним задачу (3), учитывая в ней упомянутое выше ограничение. Получаем наиболее полную постановку задачи быстрого действия с фазовыми ограничениями

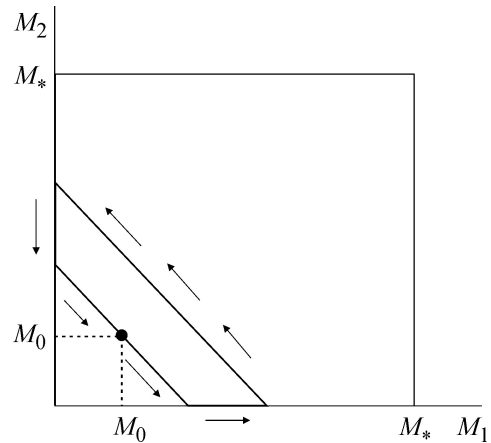


Рис. 3. Движение глаз по границе траектории.

$$\begin{cases} I\ddot{\varphi} = M_1 - M_2, \\ \dot{M}_1 = u_1, \\ \dot{M}_2 = u_2, \end{cases} \quad (10)$$

$$\begin{aligned} \varphi(\tau) = 0; \quad \dot{\varphi}(\tau) = 0, \quad \varphi(\sigma) = s; \quad \dot{\varphi}(\sigma) = 0, \\ M_1(0) = M_2(0) = M_1(T) = M_2(T) = M_0, \\ M_1(\tau) = M_2(\tau); M_1(\sigma) = M_2(\sigma), \\ 0 \leq \tau \leq T_0, T_e \leq \sigma \leq T, \\ 0 \leq M_i \leq M_*, i = 1, 2, |u_i| \leq u_*, i = 1, 2, \\ J = \int_{T_0}^{T_e} dt \rightarrow \min. \end{aligned}$$

Решение задачи (3, 9, 10), очевидно, совпадает с решением (3, 9), если траектория (6, 7) не выходит на ограничение $M_i = M_*$, т.е. если амплитуда саккады не превосходит некоторого значения s_2 . Доказательство этого факта совпадает с приведенным выше рассуждением, опирающимся на решение задачи (8). Решение показано на рис. 1ж,з.

Рассмотрим случай саккады большой амплитуды, когда $s > s_2$. Изучим оптимальность решения, при котором изображающая точка будет находиться в углу квадрата на фазовой плоскости M_1M_2 . Для рассмотрения задачи с помощью принципа максимума Понтрягина в форме Гамкредидзе для задач с фазовыми ограничениями [23] сгладим границу. Зададим ее кривой Ламе порядка $2n$. Тогда внутри суперэллипса решение задачи совпадает с решением задачи II. При выходе на границу происходит движение по границе. По мере увеличения порядка суперэллипса точки прихода на границу и схода с нее стремятся к сглаженному углу. Получается, что единственно возможная ситуация выхода оптимальной траектории на ограничение – приход изображающей точки в углы

$(M_*, 0)$ и $(0; M_*)$, как в задаче II, и стояние в этих точках. Время стояния изображающей точки в этих углах определяется амплитудой саккады. Начальное значение M_b для момента силы для этапа движения глаза составляет величину $M_b = \frac{M_*}{2}$ – половину максимально возможного момента силы.

При этом время, затрачиваемое на саккаду, можно вычислить следующим образом:

$$T = 2 \frac{M_b - M_0}{u_*} + 4 \sqrt[3]{\frac{sI}{2u_*}} + 2t_{гр},$$

где $t_{гр}$ – время стояния изображающей точки в углу квадрата.

Решение задачи для больших амплитуд показано на рис. 1и,к.

Моменты переключений для саккад каждой амплитуды $s > s_2$ находились в задаче (3, 9, 10) численно. Сравнение результатов численного моделирования с главной последовательностью, приведенной в [9], показывает качественное совпадение зависимости длительности саккады от ее амплитуды на всем рассмотренном диапазоне амплитуд (см. рис. 2).

ВЫВОДЫ

В работе горизонтальное саккадическое движение глаза рассматривается как управляемое движение, реализуемое с помощью двух экстраокулярных мышц. Традиционно предполагается, что парные глазодвигательные мышцы находятся в антагонистических отношениях. Однако если саккада осуществляется парой мышц, которые реализуют собственные, но синергически согласованные программы, длительность саккады может быть существенно уменьшена или, в силу принципа двойственности, движение при той же продолжительности может быть реализовано при более строгом ограничении на управляющий момент.

Показано, что решение задачи быстродействия с учетом ограничений на максимальную величину и на скорость изменения момента силы, развиваемой каждой мышцей, качественно согласуется с движением, наблюдаемым в эксперименте. Вывод о совпадении саккадических траекторий сделан по результатам сравнения профилей угловой скорости глаза при саккаде и сравнения зависимости длительности саккады от ее амплитуды.

Во многих случаях саккады сопровождаются пре- и постсаккадами – дополнительными пиками разных направлений на начальном и конечном участках саккады. Их появление не нашло пока никакого объяснения в научной

литературе. В рамках полученных в данной работе решений задачи быстродействия можно предположить, что эти пики свидетельствуют о наличии начального и конечного этапов реализации саккады, когда обе мышцы одновременно сокращаются или расслабляются; возникающие при этом ошибки реализации программы ведут к появлению асимметрии, которая и проявляется в виде пре- и постсаккад.

Предложенная в работе гипотеза о синергической работе экстраокулярных мышц во время саккады может быть проверена с помощью миографических записей.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 14-50-00029).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. D. C. Burr and J. Ross, *Vision Res.* **28**, 479 (1982).
2. А. Л. Ярбус, *Роль движений глаз в процессе зрения* (Наука, М., 1965).
3. В. А. Филин, *Автоматия саккад* (Изд-во МГУ, М., 2002).
4. M. R. Clark and L. Stark, *IEEE Trans. Automatic Control* **20**, 345 (1975).
5. E. Burdette, R. Osu, D. W. Franklin, et al., *Nature* **414**, 446 (2001).
6. Т. Ю. Боков, А. Ф. Сучалкина, Е. В. Якушева и др., *Рос. журн. биомеханики* **18** (1), 48 (2014).
7. А. Г. Якушев, Д. А. Напалков, П. О. Ратманова и др., *Рос. журн. биомеханики* **15** (1), 99 (2011).
8. H. Nakahara, K. Nakamura, and O. Hikosaka, *Neural networks* **19** (8), 1027 (2006).
9. H. Tanaka, J. W. Krakauer, and N. Qian, *Neurophysiology* **95**, 3875 (2006).
10. Р. Шмидт и Г. Тевс, *Физиология человека* (Мир, М., 2005), т. 3.
11. A. T. Bahil and B. T. Troost, *Neurology* **29** (8), 1150 (1979).
12. L. N. Kornilova, I. A. Naumov, D. O. Glukhikh, et al., *Human Physiol.* **39** (5), 462 (2013).
13. L. N. Kornilova, S. V. Sagalovitch, V. V. Temnikova, et al., *J. Vestibular Res.* **17** (5–6), 217 (2007).
14. L. N. Kornilova, V. V. Temnikova, S. V. Sagalovitch, et al., *Physiol. J.* **93** (2), 128 (2007).
15. О. Ю. Штефанова и А. Г. Якушев, *Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика. Механика*, № 4, 63 (2008).
16. А. Г. Якушев, В. И. Доценко, Л. А. Кулакова и др., *Функциональная диагностика*, № 4, 41 (2010).
17. А. Г. Якушев и А. А. Якушев, *Изв. ЮФУ. Технические науки*, № 8, 210 (2010).
18. В. Нарпее, *Biol. Cybernetics* **66**, 357 (1992).
19. E.N. Marieb and K. Hoehn, *Human anatomy and physiology*, 8th ed. (Benjamin Cummings, San Francisco, 2010).

20. A. C. Smit, J. A. M. Van Gisbergen, and A. R. Cools, *Vision Research* **27** (10), 1745 (1987).
21. В.И. Гурман, *Принцип расширения в задачах управления*, 2-е изд. (Наука, Физматлит, М., 1997).
22. А. А. Фельдбаум, *Основы теории оптимальных автоматических систем*, 2-е изд. (Наука, М., 1966).
23. A. Arutyunov, D. Karamzin, and F. R. V. Pereira, *Dokl. Mathematics* **83** (1), 131 (2011).

A Mathematical Model of Optimal Saccadic Eye Movement Realized by Pairs of Muscles

A.P. Kruchinina and A.G. Yakushev

*Mechanical and Mathematical Faculty, Lomonosov Moscow State University,
Leninskie Gory 1, Moscow, 119991 Russia*

In this paper we present a work for modeling a saccadic eye movement. Eye movements are ballistic, since saccades (rapid, concurrent movements of both eyes) occur several hundred thousand times per day, and visual perception of the surrounding environment is interrupted by a saccade. For the considered motion in three consecutively refined assumptions the synthesis of an optimal control is constructed. The resultant forces of extraocular muscles used to move the eye; and separately the force exerted on the eye by each pair of the oculomotor muscle of the agonist-antagonist muscles, and finally, the rate of change of the velocity produced by each of these forces were considered as control. Such an approach is consistent with the existing view among physiologists that the saccade is programmed by the central nervous system before the beginning of eye movement and almost not adjusted during saccade. The results of the solution of the optimal control problem and of the subsequent numerical modeling of saccadic trajectories are compared with the published literature data. As a criterion for comparing the saccadic trajectories, a consistent relationship between the amplitude and duration of the saccade known as the main sequence was used as the most widely applied and commonly accepted way of describing saccade sizes. The main sequence of saccades obtained through the solution of optimal control problem formulated in the most complete form is found to be in good agreement with published experimental results.

Keywords: mathematical modeling, saccadic eye movement, optimal control, time optimal control problem, antagonistic control, paired control