

ВЛИЯНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ НЕОДНОРОДНОСТИ РОГОВИЦЫ НА ДЕФОРМАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ГЛАЗНОГО ЯБЛОКА И РЕЗУЛЬТАТЫ АППЛАНАЦИОННОЙ ТОНОМЕТРИИ ПО МАКЛАКОВУ

© 2017 г. И.Н. Моисеева, А.А. Штейн

Институт механики Московского государственного университета имени М.В. Ломоносова, 117899, Москва, Мичуринский просп., 1

E-mail: moiseeva.ir@yandex.ru, stein.msu@bk.ru

Поступила в редакцию 31.08.17 г.

На основе двухкомпонентной модели глазного яблока, в которой роговица представляется безмоментной деформируемой линейно-упругой поверхностью, а склеральная область – упругим элементом, откликающимся изменением объема на изменения внутриглазного давления, исследуется влияние пространственной неоднородности распределения эффективной жесткости роговицы на механические свойства глаза. Эффективная жесткость роговицы в рамках модели характеризует как упругие свойства роговицы, так и ее толщину. Изучаются различные осесимметричные формы ее распределения с монотонным возрастанием по длине дуги, соединяющей точку на поверхности роговицы с ее верхушкой (апексом). Рассмотренные распределения моделируют как естественную неоднородность, так и ослабление апикальной области вследствие хирургических операций. В результате численных расчетов получены зависимости от изменений внутриглазного давления параметров, характеризующих деформационные свойства как роговицы (смещение апекса), так и глазного яблока в целом (изменение внутриглазного объема). При умеренной неоднородности они незначительно отличаются от тех же зависимостей для однородной роговицы с эффективной жесткостью, равной среднему значению для соответствующего неоднородного распределения, и лишь когда амплитуда эффективной жесткости очень велика (в два и более раз превышает ее среднее значение), неоднородность роговицы приводит к заметному увеличению интегрального отклика роговицы и глазного яблока в целом на изменения давления. Изучено влияние неоднородности на результаты тонометрических измерений плоским штампом по Маклакову. И в этом случае разность между тонометрическим (в нагруженном глазу) и истинным (до нагружения) давлениями (тонометрическая разность) зависит в основном от средней жесткости роговицы, существенно возрастающая лишь при ее очень больших амплитудах. Апикальное ослабление роговицы приводит к увеличению, хотя и не слишком значительному, тонометрической разности.

Ключевые слова: глаз, упругие свойства, пространственная неоднородность роговицы, тонометрия по Маклакову, математическое моделирование.

Оценка параметров, характеризующих деформацию роговицы и глазного яблока в целом под действием внутриглазного давления и внешней нагрузки, необходима для решения многих практически важных задач, в том числе для корректной интерпретации результатов офтальмологических измерений. Механические свойства роговицы, склеры и других тканей глазного яблока сложны [1–3] и сильно меняются от индивидуума к индивидууму, в том числе при патологиях [3,4], поэтому попытки их максимально полного учета приводят к созданию громоздких, трудных в расчете и мало применимых к практике моделей. Нами разработан подход [5], позволяющий избежать избыточного

усложнения модели, но сохраняющий возможность изучать основные свойства системы. Такой подход эффективен в приложении к широкому классу задач, в первую очередь к задачам тонометрии [5–8]. Многие из ограничений, использованных в первоначальной версии модели [5], могут быть сняты при сохранении основных допущений: роговица рассматривается как безмоментная поверхность, а склеральная область – как элемент, характеризующийся только связанным с давлением объемом.

В предлагаемой работе модель [5] обобщается на случай пространственно неоднородной роговицы. Учет этого фактора необходим в связи с двумя группами вопросов. Во-первых,

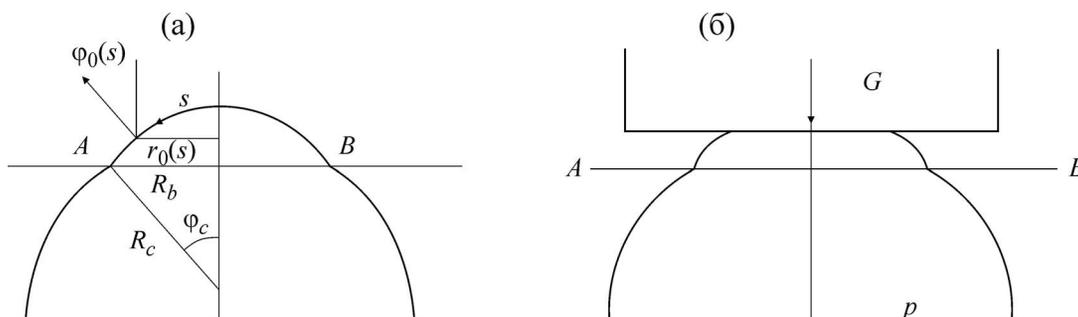


Рис. 1. К постановке задачи: (а) – глазное яблоко до нагружения извне; (б) – роговица, нагруженная плоским штампом (тонометром Маклакова). Обозначения в тексте.

хорошо известно, что реальная роговица глаза неоднородна по толщине, структуре и упругим свойствам [9–11]. Между тем эффективная жесткость роговицы, единственная величина, характеризующая в рамках модели все эти параметры, до сих пор считалась в наших расчетах константой для данного глаза. Влияние такой «естественной» неоднородности должно быть корректно оценено. Кроме того, дополнительная («искусственная») неоднородность возникает в результате хирургических операций [12,13], при которых может удаляться или ослабляться слой (круговой или кольцевой), прилегающий к внешней поверхности роговицы, т.е. из области, максимально ответственной за ее прочностные свойства [14]. Есть данные, что разные тонометрические техники по-разному чувствительны к наличию послеоперационных изменений [15], однако этот вопрос не вполне исследован и нуждается в корректном механическом анализе. В работе изучается влияние такого рода неоднородностей на результаты тонометрических измерений по Маклакову.

МОДИФИКАЦИЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ И МЕТОДИКА РАСЧЕТОВ

Как и в работах [5–8], будем рассматривать глазное яблоко как заполненную несжимаемой жидкостью с давлением p оболочку, состоящую из двух частей – роговицы (на рис. 1а выше плоскости AB) и склеральной области, включающей склеру и прилегающие к ней ткани (ниже плоскости AB). Роговица рассматривается как материальная поверхность, т.е. слой нулевой толщины, а склеральная область – как упругий элемент, деформация которого характеризуется только объемом находящейся в нем жидкости.

Рассмотрим сначала уравнения, определяющие деформацию роговицы. Пусть при некотором внутреннем (внутриглазном) давлении p_0 (начальное состояние) не нагруженная извне

роговица имеет форму, задаваемую следующей параметрической зависимостью (рис. 1а):

$$r = r_0(s), \quad \varphi = \varphi_0(s), \quad (1)$$

где r – расстояние точки поверхности, представляющей роговицу, от оси, φ – угол между нормалью к этой поверхности и осью симметрии, s – длина дуги образующей роговицы, отмеряемая от точки пересечения роговицы с осью симметрии (апекса). Далее величина s (длина дуги в начальном состоянии) рассматривается как сопутствующая координата и играет роль независимой переменной.

Будем, как и в работе [5], полагать роговицу упруго деформируемой изотропной безмоментной (мягкой) двумерной поверхностью, а деформации геометрически малыми (при учете конечности перемещений). Для такой поверхности остаются справедливыми следующие уравнения равновесия и связи деформаций с геометрическими параметрами, использованные в работе [5] и практически (за вычетом некоторых переобозначений) совпадающие с полученными в работе [16] для трехмерной изотропной безмоментной оболочки постоянной толщины:

$$\begin{aligned} (r_0 T_1)' - T_2 \cos \varphi &= 0, \\ -T_2 \sin \varphi - r_0 \varphi' T_1 + \lambda r_0 p &= 0, \\ r' &= \lambda \cos \varphi, \quad \lambda = 1 + \varepsilon_1, \quad \varepsilon_2 = \frac{r}{r_0} - 1. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь независимым параметром считается длина дуги в начальном состоянии s ; T_1 и T_2 – касательные усилия в меридиональном и перпендикулярном к нему (окружном) направлениях; ε_1 и ε_2 – деформации в направлениях главных осей, отсчитываемые от начального состояния (1). Угол φ считается положительным, если нормаль направлена во внешнюю относительно оси сторону. Непосредственно в форме, полученной в работе [16], такую систему

уравнений применяли при моделировании роговицы в работе [17].

Считая поверхность, моделирующую роговицу, линейно упругой и изотропной, выпишем для нее соотношения, выражающие закон Гука

$$\begin{aligned}\varepsilon_1 &= \frac{1}{E_c^*}[(T_1 - T_{10}) - \nu_c(T_2 - T_{20})], \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E_c^*}[(T_2 - T_{20}) - \nu_c(T_1 - T_{10})],\end{aligned}\quad (3)$$

где E_c^* и ν_c – соответственно модуль растяжения и коэффициент Пуассона роговицы как двумерной упругой поверхности, а T_{10} и T_{20} – значения усилий T_1 и T_2 в начальном состоянии. Все эти четыре параметра теперь полагаем функциями сопутствующей координаты s . Таким образом, предполагается, что распределение упругих констант симметрично относительно оси, что позволяет рассматривать задачу как сферически симметричную.

При моделировании дополнительно нагруженных состояний роговицы распределения упругих констант $E_c^*(s)$ и $\nu_c(s)$, а также параметров начального состояния $r = r_0(s)$, $\varphi = \varphi_0(s)$, $T_1 = T_{10}(s)$ и $T_2 = T_{20}(s)$ должны быть заданы, причем таким образом, чтобы удовлетворять системе (2) при $p = p_0$ и $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$. Выбор начальных параметров может быть, однако, достаточно произволен с учетом того, что деформации малы и, следовательно, при нагружении только внутреннем давлением малы также смещения; поэтому разные формы в этом случае близки одна к другой и к сферическому сегменту некоторого свойственного данному глазу радиуса R_c . Поэтому удобно брать в качестве начальной форму роговицы в виде сферического сегмента с таким радиусом. Тогда $T_1 = T_2 = T_0 = p_0 R_c / 2$, и уравнения (1) и (3) принимают в точности ту же форму, что и в работе [5]:

$$\begin{aligned}r_0 &= R_c \sin \varphi_0, \quad \varphi_0 = \frac{s}{R_c}, \\ \varepsilon_1 &= \frac{1}{E_c^*}[T_1 - \nu_c T_2 - T_0(1 - \nu_c)], \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E_c^*}[T_2 - \nu_c T_1 - T_0(1 - \nu_c)],\end{aligned}$$

но теперь с упругими константами E_c^* и ν_c , зависящими от s .

Выбранное начальное состояние выглядит для неоднородной роговицы искусственным. От него можно отказаться, если выполнить мысленный эксперимент. Выберем в качестве на-

чального состояние роговицы с постоянными упругими модулями, соответствующими средним по s значениям. Будем полагать форму роговицы при $p = p_0$ теперь уже в этом состоянии сферической с радиусом R_c . Затем подвергнем ее мысленной деформации в результате изменения однородного распределения констант на требуемое неоднородное при том же давлении и будем рассматривать это состояние (уже с неоднородным распределением усилий) как новое начальное. Малость отклонений формы от сферической в отсутствие внешней нагрузки делает оба подхода равноценными, что подтверждено расчетами.

В настоящей работе решаются задачи двух типов. Во-первых, будет рассматриваться зависимость внутреннего объема глазного яблока и расстояния апекса роговицы от плоскости AB , проходящей через ее границу со склерой (эту границу называют лимбом), от внутриглазного давления при отсутствии внешних нагрузок. Во-вторых, будет рассмотрена задача о тонометрии по Маклакову, т.е. при симметричном наложении широкого плоского штампа на область роговицы и постоянном объеме внутриглазной жидкости. Во втором случае необходимы еще уравнения для деформации роговицы под штампом, где система (2) остается справедливой за исключением второго уравнения, которое с учетом свободного проскальзывания заменяется уравнением геометрической связи $\varphi = 0$.

В силу симметрии решение задачи ищется в области $0 \leq s \leq s_*$, где $s_* = \varphi_c R_c$ – значение координаты s в лимбе. В качестве граничных условий на концах области принимаем (см. работу [5]) условие $r(s_*) = R_b$, соответствующее закреплению роговицы на склере, деформации и смещения которой считаются малыми, и условие ограниченности усилия T_1 в точке пересечения с осью симметрии. Последнее принимает форму асимптотического соотношения при $s \rightarrow 0$: $r \sim s[1 + ((1 - \nu_c(0))/E_c^*(0))(T_1(0) - T_0)]$ [5]. В точке $s = 0$ при отсутствии груза принимается еще условие $\varphi = 0$. При наличии груза дополнительное условие в этой точке не нужно из-за понижения порядка уравнений под грузом по сравнению со свободной роговицей; вместо этого формулируются, аналогично работе [5], условия на границе штампа и свободной роговицы: непрерывность усилия T_1 и координат φ и r , причем на этой границе выполняется соотношение

$$G = \pi r^2 p, \quad (4)$$

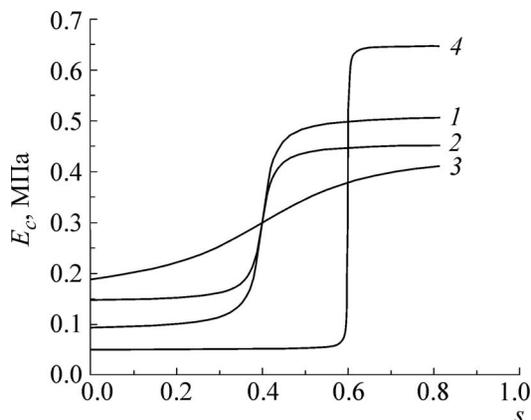


Рис. 2. Общий вид зависимостей эффективной жесткости роговицы E_c от характеризующего положение на роговице безразмерного параметра s при одинаковом среднем значении 0,3 МПа (кривые 1–3) и при радикальном ослаблении апикальной зоны в первоначально однородной роговице (кривая 4).

где G – вес груза.

Сформулированные уравнения и граничные условия дают возможность вычислять геометрические характеристики роговицы, в том числе приращение ΔV_c подроговичного объема (часть внутриглазного объема над плоскостью AB). Приращение объема ΔV_c связано с приращением всего заполненного жидкостью внутриглазного объема ΔV соотношениями

$$\Delta V_s = K(p - p_0), \quad \Delta V = \Delta V_c + \Delta V_s,$$

где ΔV_s – приращение «склерального» объема (под AB), K – интегральная константа, определяющая упругое поведение склеральной области.

Для удобства сравнения с данными других авторов упругие константы модели далее переопределены (см. работу [5]) по формулам $E_c^* = \delta E_c$, $K = (\zeta E_s)^{-1}$, где $\delta = 0,5$ мм – средняя в норме толщина роговицы, а $\zeta = 1,44 \cdot 10^{-5}$ мм⁻³. Константа E_s и функция $E_c(s)$ имеют размерность упругого модуля (и давления) и далее именуется жесткостями: склеральной и роговичной соответственно. Роговичная жесткость E_c имеет смысл жесткости материала роговицы, усредненной по ее условной (нормальной) толщине $\delta = 0,5$ мм. Чтобы подчеркнуть интегральный характер жесткости роговицы E_c , зависящей не только от средней по толщине жесткости, но и от самой реальной толщины, иногда будем ее называть эффективной жесткостью. Склеральная жесткость E_s – средняя по толщине склеры жесткость ее материала при выборе специальной, заведомо грубой, геомет-

рической модели склеральной области [5]. Полагаем $R_c = 8$ мм, $R_b = 5,8$ мм, что соответствует стандартным для человеческого глаза значениям. Далее будем обезразмеривать независимую переменную s (длину дуги образующей) по радиусу роговицы R_c , сохраняя для этой величины прежнее обозначение. При принятых значениях геометрических параметров роговицы $s_* \approx 0,8$.

Далее исследуются задачи, для которых нагружения роговицы близки к изотропным. Поэтому решения в основном определяются одним ее упругим модулем – коэффициентом поверхностного растяжения $E_{cs} = E_c / (1 - \nu_c)$ [5]. Это позволяет не варьировать коэффициент Пуассона, для которого в расчетах принято значение $\nu_c = 0,45$.

Склеральную жесткость во всех расчетах принимали равной ее среднему для нормальных глаз человека значению $E_s = 10$ МПа [5], тогда как жесткость роговицы $E_c(s)$ варьировали в диапазоне 0,1–0,9 МПа в предположении монотонного возрастания E_c от апекса к лимбу. Рассматривали случаи как медленного изменения функции $E_c(s)$, соответствующего естественной неоднородности, так и резкого ее изменения, близкого к кусочно-однородному распределению, что соответствует моделированию последствий ослабляющей апикальную область операции. При расчетах функцию $E_c(s)$ брали в виде

$$E_c(s) = a_1 + a_2 \arctan[a_3(s - a_4)]. \quad (5)$$

Выбирая различные наборы констант a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , зависимостью вида (5) можно моделировать разнообразные монотонные распределения. Физически существенные характеристики распределения $E_c(s)$, влияние которых будет исследоваться: среднее интегральное значение жесткости по длине дуги $\langle E_c \rangle$; амплитуда жесткости $\Delta E_c = E_c(s_*) - E_c(0)$, т.е. разница между ее значениями на границе со склерой ($s = s_*$) и в апексе ($s = 0$), и крутизна перехода между этими значениями. Для распределений с большой крутизной перехода (например, кривая 4 на рис. 2), которые моделируют разделенность роговицы на две области с разными жесткостями, будет изучаться также влияние локализации этого перехода, соответствующей разному расположению границы между названными областями.

Известно, что в норме толщина роговицы возрастает от апекса к периферии [10]. Отмечается также возрастание в этом направлении собственно жесткости, по крайней мере, ее окружной компоненты [3,9–11]. Оба эти фактора

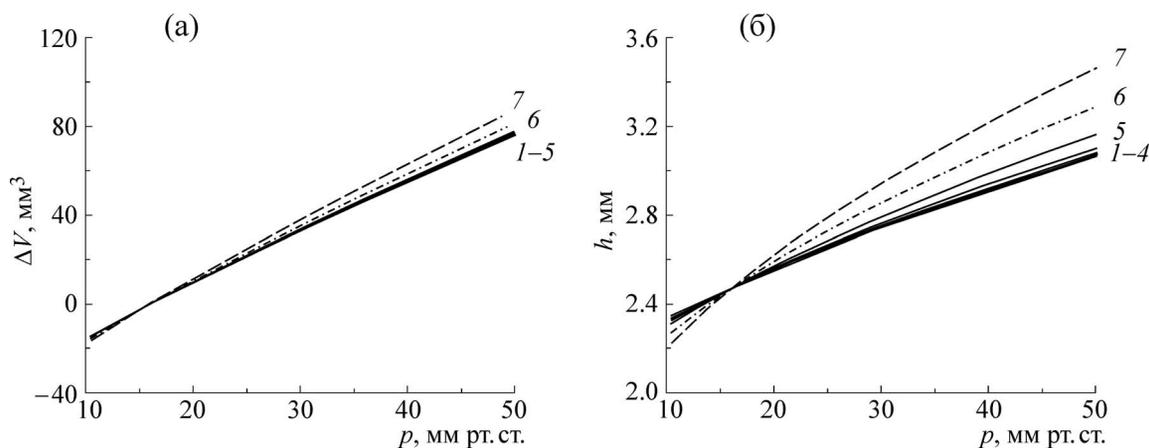


Рис. 3. Зависимости $\Delta V(p)$ и $h(p)$, рассчитанные для $\langle E_c \rangle = 0,3$ МПа и $a_4 = s_*/2$: 1 – $E_c = \text{const} = 0,3$ МПа; 2–5 – $\Delta E_c = 0,15\text{--}0,3$ МПа при различных значениях a_3 ; 6 – $\Delta E_c = 0,4$ МПа, $a_3 = 50$; 7 – $\Delta E_c = 0,5$ МПа, $a_3 = 50$.

в рамках модели проявляются в росте эффективной жесткости от апекса к периферии, т.е. в возрастании функции $E_c(s)$. Ослабление апикальной области при операциях характеризуется уменьшением эффективной жесткости в окрестности апекса, что также позволяет описывать подобное воздействие возрастающей функцией $E_c(s)$. Вместе с тем при некоторых патологиях и ряде операционных техник, ослабляющих роговицу вне апикальной области, монотонность может нарушаться. Нами проведены отдельные расчеты для немонотонных распределений, результаты которых будут далее упомянуты.

Методика численного решения приведена в работе [5].

ВЛИЯНИЕ НЕОДНОРОДНОСТИ РОГОВИЦЫ НА ДЕФОРМАЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ГЛАЗНОГО ЯБЛОКА ПРИ ИЗМЕНЕНИИ ДАВЛЕНИЯ В ОТСУТСТВИЕ ВНЕШНЕЙ НАГРУЗКИ

Рассмотрим сначала деформирование роговицы и глазного яблока в целом при отсутствии внешней нагрузки – только под воздействием изменений внутреннего давления. Такие изменения могут быть связаны как с изменениями в гидравлической системе глаза, так и с введением дополнительных объемов жидкости при инъекциях.

Пусть распределение жесткости роговицы антисимметрично относительно центра дуги, соединяющей апекс и лимб, т.е. в зависимости (5) $a_4 = s_*/2$. В этом случае коэффициент a_1 имеет смысл средней по длине дуги жесткости роговицы: $a_1 \equiv \langle E_c \rangle$.

При расчетах начальное (отсчетное) давление выбирали равным $p_0 = 16$ мм рт. ст. и определяли зависимости от внутриглазного давления p приращения объема жидкости в глазном яблоке ΔV и расстояния от апекса до плоскости лимба h , т.е. функции $\Delta V(p)$ и $h(p)$. Результаты расчетов проиллюстрированы на рис. 3 и 4.

Рассчитанные функции $\Delta V(p)$ и $h(p)$, как и в случае пространственно однородной роговицы, близки к линейным. В широком диапазоне параметров, соответствующих одним и тем же значениям $\langle E_c \rangle$, и при небольших значениях амплитуды (0,15–0,3 МПа) эти функции для разных распределений жесткости почти совпадают, различаясь при давлении $p = 32$ мм рт. ст. не более чем на 1 мм³ и 0,01 мм соответственно. Расхождение несколько увеличивается с возрастанием давления, возрастая до 3 мм³ и 0,02 мм при очень высоких давлениях (50 мм рт. ст.). Таким образом, деформационные свойства роговицы и глазного яблока оказываются практически нечувствительными к особенностям распределения эффективной жесткости роговицы, определяясь в основном ее средним по длине дуги значением. Однако при значительном увеличении амплитуды распределения (более чем до 0,4 МПа) обе функции уже заметно поднимаются над линией, соответствующей однородному распределению.

Сказанное особенно убедительно проиллюстрировано на рис. 4, на котором представлены расчетные точки, соответствующие фиксированным значениям амплитуды ΔE_c при $a_4 = s_*/2$ и разных значениях параметров распределения, соответствующих разным значениям крутизны кривой. При каждом давлении эти точки

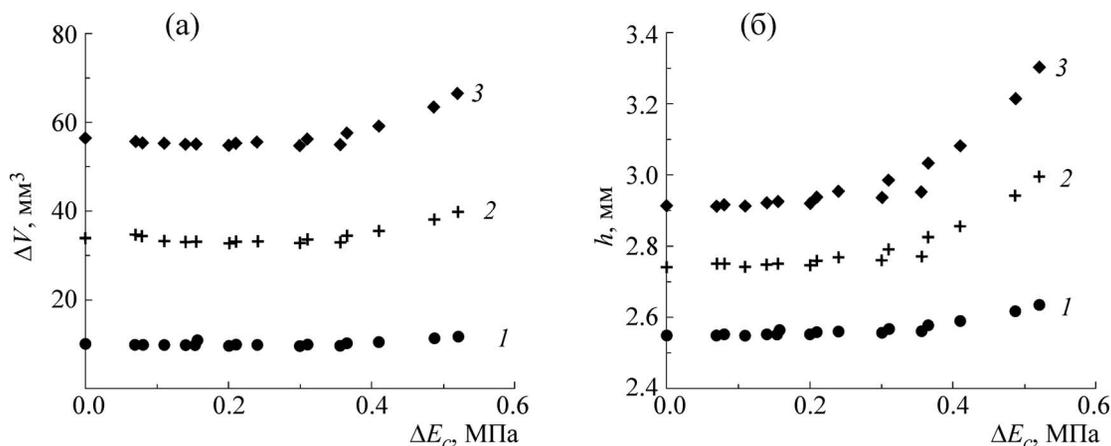


Рис. 4. Зависимости $\Delta V(\Delta E_c)$ и $h(\Delta E_c)$ при разных значениях внутреннего давления: 1 – $p = 20$ мм рт. ст.; 2 – 30 мм рт. ст.; 3 – 40 мм рт. ст.; $a_4 = s_*/2$, $\langle E_c \rangle = 0,3$ МПа. Точки соответствуют разной крутизне кривой $E_c(s)$.

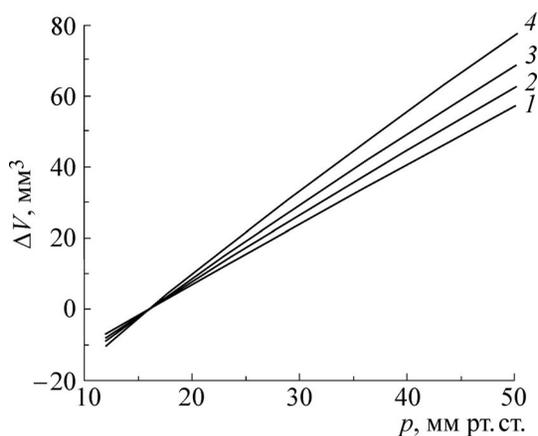


Рис. 5. Зависимости $\Delta V(p)$ для $E_c(s_*) = 0,8$ МПа: 1 – $E_c = \text{const} = 0,8$ МПа; 2 – $E_c(0) = 0,4$ МПа, $a_4 = 0,4$ ($\langle E_c \rangle = 0,6$ МПа); 3 – $E_c(0) = 0,4$ МПа, $a_4 = 0,6$ ($\langle E_c \rangle = 0,4$ МПа); 4 – $E_c(0) = 0,2$ МПа, $a_4 = 0,6$ ($\langle E_c \rangle = 0,6$ МПа).

образуют узкое облако. Из рисунка видно, что влияние неоднородности на деформационные свойства роговицы и глазного яблока при умеренных амплитудах жесткости и давлениях незначительно, однако усиливается при возрастании этих величин. При этом растяжимость роговицы, характеризующаяся смещением апекса, может вырасти существенно, тогда как объемная растяжимость всего глазного яблока и в этом случае растет незначительно ввиду определяющего влияния на этот параметр упругих свойств склеральной области.

На рис. 5 приведены результаты расчетов, иллюстрирующие влияние параметров ΔE_c и a_4 на функцию $\Delta V(p)$, для зависимостей $E_c(s)$, моделирующих искусственно созданную неоднородность роговицы – ослабление первоначаль-

но однородной роговицы в апикальной области. Выбираются зависимости $E_c(s)$, соответствующие резкому переходу от области, прилегающей к склере (со значением $E_c = E_c(s_*) = 0,8$ МПа), к области со значительно меньшим значением $E_c(s) = E_c(0)$. Эта ситуация соответствует случаю первоначально однородной роговицы с жесткостью $E_c = 0,8$ МПа, подвергнутой в апикальной области осесимметричному операционному воздействию (например, частичному удалению материала роговицы), которое привело к уменьшению эффективной жесткости. Далее для определенности будем называть ослабленную область областью выреза. Кривая 1 соответствует вырезу до середины дуги (при $s = s_*/2$) с ослаблением роговицы в области выреза вдвое, кривые 2 и 3 – вырезу, занимающему $3/4$ длины дуги (до точки $s = 3/4s_*$), с ослаблением области выреза в два и четыре раза. Сравнение полученных результатов с расчетами для однородной роговицы с $E_c = 0,8$ МПа показывает, что изменение на некоторую величину объема глаза с ослабленной роговицей приводит к уменьшенному по сравнению с исходным однородным случаем внутриглазному давлению, причем эта разница тем заметнее, чем более ослаблена апикальная зона. Как показывают расчеты, и в этом случае при умеренной амплитуде ($\Delta E_c = 0,4$ МПа) практически такая же зависимость объема от давления имеет место в случае однородной роговицы, жесткость которой равна средней жесткости соответствующего неоднородного распределения. Соответствующие кривые для однородной роговицы на рис. 5 не приведены, поскольку они визуальнo совпадают с кривыми для неоднородной роговицы с тем же средним.

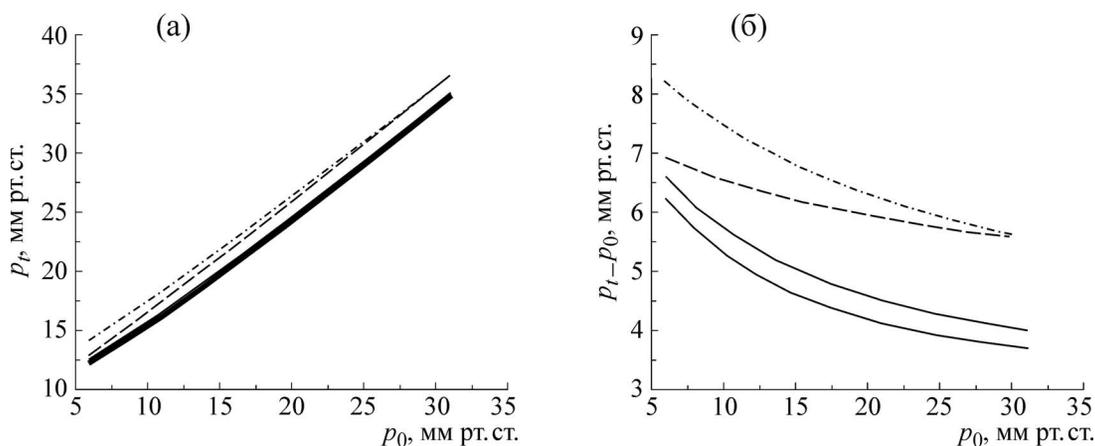


Рис. 6. Зависимости тонометрического давления p_t (а) и тонометрической разности $\Delta p = p_t - p_0$ (б) от истинного давления p_0 : пунктирные кривые – $\langle E_c \rangle = 0,3$ МПа, $a_4 = 0,6$, $\Delta E_c = 0,9$ МПа; штрих-пунктирные кривые – $\langle E_c \rangle = 0,5$ МПа, $a_4 = 0,4$, $\Delta E_c = 0,9$ МПа; сплошные кривые – $\langle E_c \rangle = 0,3$ МПа, $a_4 = 0,4$, $\Delta E_c = 0-0,4$ МПа. Значению $\Delta E_c = 0$ соответствует нижняя кривая, значению $0,4$ МПа – верхняя кривая. На рис. 6а эти кривые практически сливаются.

При значительной амплитуде ($\Delta E_c = 0,6$ МПа) растяжимость глазного яблока уже заметно возрастает за счет неоднородности (сравним кривые 4 и 2).

ВЛИЯНИЕ НЕОДНОРОДНОСТИ РОГОВИЦЫ НА ДАННЫЕ ТОНОМЕТРИИ ПО МАКЛАКОВУ

При тонометрии по Маклакову осуществляется нагружение роговицы широким плоским штампом, достаточно длительное, чтобы рассматривать задачу как статическую, и достаточно кратковременное, чтобы пренебречь изменением внутриглазного объема из-за перестройки притока и оттока жидкости [5,18]. Таким образом, при моделировании процедуры тонометрии возможно принять условие $\Delta V = 0$.

При анализе механического смысла результатов тонометрии, как и в предыдущем разделе, будем как сравнивать неоднородное распределение жесткости роговицы с однородным при том же среднем значении, так и исследовать влияние ослабления первоначально однородной роговицы в осесимметричной апикальной области. Если специально не оговорено, далее вес груза равен 5 Г.

На рис. 6 представлены зависимости тонометрического давления p_t (устанавливающегося в глазу под действием нагрузки) от истинного давления p_0 (до нагружения) при неоднородном распределении жесткости роговицы. Видно, что при распределениях, имеющих одинаковое среднее значение и параметр $a_4 = 0,4$ (т.е. распределение жесткости антисимметрично относи-

тельно центральной точки дуги $s = s_*/2$), но различные умеренные (0–0,4 мм рт. ст.) амплитуды ΔE_c , кривые $p_t(p_0)$ практически совпадают. Разница между ними не превышает 0,4 мм рт. ст. и монотонно нарастает с увеличением амплитуды (рис. 6б). Основное влияние на величину тонометрической разности оказывает средняя жесткость: ее не слишком значительное увеличение приводит к заметному подъему тонометрической кривой (штрих-пунктир на рис. 6). Влияние неоднородности становится более ощутимым при очень больших амплитудах (на рис. 6 при $\Delta E_c = 0,9$ МПа, пунктирная линия). При отклонении от антисимметричного распределения ($a_4 = 0,6$) отклонение тонометрической разности от соответствующей однородному распределению с тем же средним значением заметно возрастает с давлением: оно порядка 1 мм рт. ст. при $p_0 = 7$ мм рт. ст. и порядка 2 мм рт. ст. при $p_0 = 30$ мм рт. ст., т.е. кривая $\Delta p(p_0)$ убывает более полого, чем при однородном распределении.

Рис. 7 иллюстрирует влияние параметров неоднородности распределения жесткости роговицы в случае значительного ослабления жесткости в области, прилегающей к апексу. Для всех кривых, представленных на рис. 7, распределение жесткости близко к кусочно-однородному с резким переходом между меньшим значением в концентрической апикальной области и существенно большим во внешней по отношению к ней зоне, примыкающей к лимбу. Такое распределение моделирует распределение эффективной жесткости в результате ослабляю-

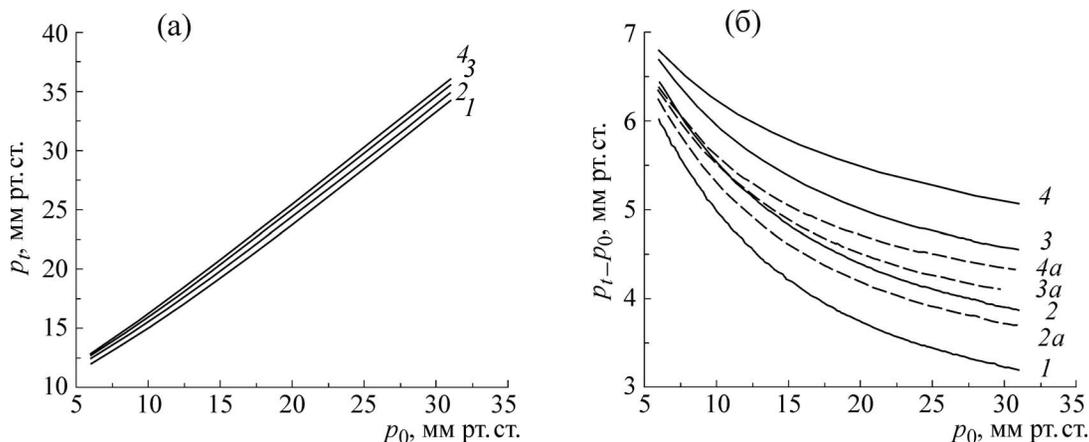


Рис. 7. Зависимости тонометрического давления p_t (а) и тонометрической разности $\Delta p = p_t - p_0$ (б) от истинного давления p_0 в случае радикального ослабления апикальной жесткости при $a_4 = 0,6$ и $E_c(s_*) = 0,8$ МПа: 1 – $E_c = \text{const} = 0,8$ МПа; 2 – $\langle E_c \rangle = 0,5$ МПа, $\Delta E_c = 0,41$ МПа; 3 – $\langle E_c \rangle = 0,36$ МПа, $\Delta E_c = 0,59$ МПа; 4 – $\langle E_c \rangle = 0,28$ МПа, $\Delta E_c = 0,78$ МПа. Пунктирные кривые на рис. 7б, помеченные цифрой и буквой *a*, соответствуют однородным распределениям жесткости с тем же средним значением, что и распределение, представленное сплошной кривой и обозначенное той же цифрой.

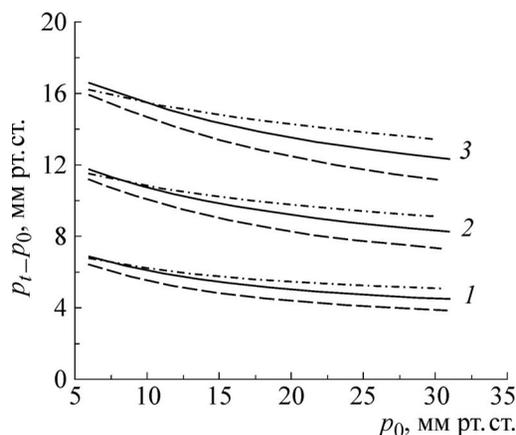


Рис. 8. Зависимости тонометрической разности $\Delta p = p_t - p_0$ от истинного давления p_0 под действием тонометров весом 5 (кривые 1), 10 (кривые 2) и 15 Г (кривые 3) в случае радикального ослабления апикальной жесткости при $a_4 = 0,6$, $\langle E_c \rangle = 0,5$ МПа, $\Delta E_c = 0,41$ МПа (пунктирные кривые); $\langle E_c \rangle = 0,2$, $\Delta E_c = 0,4$ (сплошные кривые); $\langle E_c \rangle = 0,28$, $\Delta E_c = 0,78$ (штрих-пунктирные кривые).

шей апикальную область операции. На всех приведенных кривых $a_4 = 0,6$, что приблизительно соответствует локализации ослабленной области во многих операциях по коррекции зрения (например, *LASIK*). Остальные параметры распределения подобраны так, чтобы продемонстрировать влияние амплитуды и среднего значения при сохранении величины E_c в области, примыкающей к склере, которую можно интерпретировать как жесткость до операции.

Из представленных на рис. 7 кривых видно, что разница между тонометрическим и истинным давлениями умеренно возрастает при ослаблении в апикальной области – тем больше, чем выше давление и больше падение жесткости апикальной области, достигая величины около 2 мм рт. ст. при истинном давлении 30 мм рт. ст. и $\Delta E_c = 0,78$ МПа. Однако если вычислить изменившееся из-за ослабления апикальной зоны среднее значение роговичной жесткости, оказывается, что изменение $\Delta p = p_t - p_0$ определяется в основном изменением этого среднего. Отклонение от значения этой разности для однородного распределения с тем же средним несколько возрастает с увеличением давления и ΔE_c , достигая при $p_0 = 30$ мм рт. ст. и $\Delta E_c = 0,78$ МПа почти 1 мм рт. ст.

На рис. 8 представлено несколько тонометрических кривых для трех разных весов, используемых при тонометрии по Маклакову. Видно, что взаимное расположение кривых, соответствующих каждому распределению жесткости роговицы, с увеличением веса груза не меняется, лишь расстояние между аналогичными кривыми незначительно увеличивается. Таким образом, полученные выше для веса 5 Г результаты остаются справедливыми и при больших весах.

При собственно тонометрии, т.е. при определении в клинике внутриглазного давления, возникает проблема определения, вообще говоря, двух зависимостей – тонометрического давления по непосредственно измеряемым геометрическим параметрам деформирования ро-

говицы и истинного давления (до нагружения) по тонометрическому. Для плоского штампа в рамках принятой модели первая из этих зависимостей задается формулой (5), позволяющей определять тонометрическое давление по радиусу пятна контакта тонометра и роговицы, и, таким образом, для ее установления не требуется специальных расчетов. Однако использование этой модели, допустимое в случае тонометра Маклакова, становится неправомерным при размере пятна контакта порядка и меньше толщины роговицы, что имеет место для тонометра Гольдмана. Для тонометра Гольдмана проблема определения тонометрического давления становится основной [19], и эта величина зависит теперь от множества параметров, характеризующих особенности распределения упругих свойств роговицы вблизи апекса по ее толщине.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Разработанный нами метод исследования деформации роговицы и глазного яблока под внешними и внутренними нагрузками, основной особенностью которого является моделирование роговицы безмоментной деформируемой поверхностью, а склеральной области – нульмерным элементом, состояние которого характеризуется только объемом и давлением содержащейся в этом объеме жидкости, позволил эффективно исследовать влияние неоднородности роговицы на деформационные свойства глаза.

В первоначальной формулировке модели [5–8] поверхность, моделирующая роговицу, считалась линейно упругой, изотропной и пространственно однородной. Для реальной роговицы эти свойства не выполняются, но отказ от перечисленных допущений привел бы к введению множества, вообще говоря, специфичных для конкретного глаза, параметров и к ограниченности и даже невозможности использования модели в практических целях. Поэтому важно понимать, в какой степени упрощения искажают результаты расчетов и в каких случаях связанные с ними искажения могут приводить к заметным ошибкам. В настоящей работе рассмотрено влияние пространственной неоднородности роговицы.

В рамках развиваемого подхода неоднородность роговицы характеризуется распределением одного параметра – ее эффективной жесткости. Этот параметр возрастает как с ростом среднего по толщине модуля растяжения, так и с увеличением самой этой толщины: и модуль растяжения, и толщина, как правило, возрас-

тают к периферии роговицы, что приводит и к возрастанию эффективной жесткости. Важными особенностями упругого поведения роговицы являются еще анизотропия, проявляющаяся в различии растяжимостей в окружном и меридиональном направлениях, и нелинейность упругого отклика [10,11]. Участие этих факторов в настоящей работе не рассмотрено, однако соответствующее исследование может быть в дальнейшем проведено в рамках развиваемого нами подхода.

Выполненные расчеты показывают, что как объемная растяжимость глазного яблока, так и смещение центральной точки роговицы (апекса) под действием изменений внутреннего давления определяются в основном средним по большой дуге роговицы значением эффективной жесткости и в малой степени зависят от других характеристик ее пространственного распределения. Неоднородность начинает заметно сказываться лишь при очень значительных амплитудах этого распределения, т.е. при очень большой разности между значениями эффективной жесткости в апексе и на границе со склерой. Таким образом, деформативность глазного яблока под воздействием изменений давления обладает высокой устойчивостью к неоднородности упругих свойств роговицы, и лишь значительное ослабление ее жесткости в апикальной области приводит к существенному повышению деформируемости роговицы и не столь значительному, но все же заметному возрастанию деформируемости глазного яблока в целом. Неучет пространственной неоднородности роговицы практически всегда оправдан, поскольку замена неоднородного распределения жесткости на однородное с тем же средним не приводит к существенным ошибкам. Только очень значительная, сильно отклоняющаяся от нормы, неоднородность может заметно повлиять на деформационные свойства глазного яблока.

Аналогичная картина имеет место при тонометрии по Маклакову. Более того, кривая зависимости тонометрического давления от истинного, степень знания которой определяет точность оценки внутриглазного давления в ненагруженном глазу (истинного), даже при очень значительных амплитудах эффективной жесткости отклоняется от кривой, соответствующей ее среднему значению, весьма умеренно, давая ошибку при амплитуде в 0,9 МПа не более чем 2 мм рт. ст. Использование, как это принято в практической офтальмологии, данных, соответствующих «среднему» глазу без учета реальной индивидуальной жесткости об-

следуемого глаза, может приводить к более значительным ошибкам [5].

В условиях широкого применения хирургических операций, существенно ослабляющих прочностные свойства апикальной области роговицы, встает важнейший вопрос об интерпретации тонометрических измерений в таких глазах. В рамках реализуемого подхода прооперированная роговица моделируется наличием осесимметричной области со значительно уменьшенной эффективной жесткостью. Результаты тонометрии сравнивались с данными тонометрии для однородной роговицы до операции при размере ослабленной области, характерном для ряда широко применяемых операций по коррекции зрения. Оказывается, что и в этом случае тонометрическая разность (между тонометрическим и истинным давлениями) возрастает не более чем на 2 мм рт. ст. Ошибку можно значительно уменьшить, если удастся оценить среднюю жесткость после операции, которая практически и определяет тонометрическую кривую: отклонения от кривой, соответствующей такому среднему значению, ничтожны, достигая значений порядка 1 мм рт. ст. лишь при высоких давлениях.

Таким образом, тонометрия по Маклакову оказывается вполне применимой для глаз, подвергшихся апикальному ослаблению роговицы, и при оценке истинного давления этим методом требуются лишь небольшие поправки, если есть необходимость увеличить точность. Что касается других способов тонометрии, применимость каждого из них к оперированным глазам должна оцениваться отдельно. Метод Гольдмана, к примеру, дает результаты, не интерпретируемые надежно, что связано с его чувствительностью к распределению упругих характеристик в апикальной области, в том числе по толщине. Применимость к глазам с апикально ослабленной роговицей тонометрии по Шиотцу нуждается в дополнительном исследовании.

Основной результат – определяющая роль средней жесткости при определении важных интегральных деформационных характеристик и существенность неоднородности лишь при очень значительных отклонениях от однородного распределения – имел место и в исследо-

ванных случаях немонотонного распределения жесткости.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 17-01-00380).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Corneal Biomechanics and Refractive Surgery*, Ed. by F. A. Guarnieri (Springer, New York, 2015).
2. B. Coudrillier, J. Pijanka, J. Jefferys, et al., *ASME: J. Biomech. Eng.* **137** (4), 041006 (2015).
3. Е. Н. Иомдина, С. М. Бауэр и К. Е. Котляр. *Биомеханика глаза: Теоретические аспекты и клинические приложения* (Реал Тайм, М., 2015).
4. I. G. Pallikaris, G. D. Kymionis, H. S. Ginis, et al., *Invest. Ophthalmol. Vis. Sci.* **46** (2), 409 (2005).
5. И. Н. Моисеева и А. А. Штейн, *Изв. РАН. Механика жидкостей и газа*, № 5, 3 (2011).
6. Г. А. Любимов, И. Н. Моисеева и А. А. Штейн, *Изв. РАН. Механика жидкостей и газа*, № 6, 5 (2014).
7. И. Н. Моисеева и А. А. Штейн, *Росс. журн. биомех.* **19** (3), 243 (2015).
8. И. Н. Моисеева, А. А. Штейн и Г. А. Любимов, *Биофизика* **61** (6), 1219 (2016).
9. E. Reichel, D. Miller, E. Blanco, and R. Mastanduno, *Ann. Ophthalmol.* **21**, 205 (1989).
10. J. Ø. Hjortdal, *J. Biomech.* **29** (7), 931 (1996).
11. T. J. Shin, R. P. Vito, L. W. Johnson, and B. E. McCarey, *J. Biomech.* **30** (5), 497 (1997).
12. Л. И. Балашевич. *Рефракционная хирургия* (Изд. дом СПбМАПО, СПб, 2002).
13. С. Э. Аветисов, *Вестн. офтальмологии*, № 1, 3 (2006).
14. C. Fernandez, A. M. Niazy, R. M. Kurtz, et al., *J. Biomed. Optics* **10** (6), 1 (2005).
15. С. М. Бауэр, Л. А. Карамшина и А. Б. Качанов, *Росс. журн. биомеханики* **16** (3), 25 (2012).
16. С. А. Кабриц, Е. И. Михайловский, П. Е. Товстик и др., *Общая нелинейная теория оболочек* (Изд-во С.-Петербург. ун-та, СПб, 2002).
17. С. М. Бауэр, Г. А. Любимов и П. Е. Товстик, *Изв. РАН. Механика жидкостей и газа*, № 1, 24 (2005).
18. А. П. Нестеров, Ф. Я. Бунин и Л. А. Кацнельсон. *Внутриглазное давление. Физиология и патология* (Наука, М., 1974).
19. A. Elsheikh, D. Wang, A. Kotecha, et al., *Ann. Biomed. Eng.* **34** (10), 1628 (2006).

Effect of Spatial Inhomogeneity of the Cornea on the Deformation Properties of the Eyeball and the Results of Maklakoff Applanation Tonometry

I.N. Moiseeva and A.A. Stein

Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Michurinsky prosp. 1, Moscow, 117899 Russia

By using a two-component model of the eyeball, in which the cornea is represented by a momentless deformable, linearly elastic surface and the scleral region by an elastic element that responds to changes in intraocular pressure via changes in volume, the effect of spatial inhomogeneity of the effective corneal stiffness distribution on the mechanical properties of the eye is investigated. Within the framework of the model, the effective corneal stiffness, on the basis of the model, characterizes both the elastic properties of the cornea and its thickness. Various axisymmetric distributions of this quantity, monotonically increasing with the length of the arc between a point at the surface of the cornea and its top (apex), are studied. The distributions considered reproduce both natural inhomogeneity and the weakening of the apical region owing to surgical operations. The dependences of parameters, that characterize deformation properties of both the cornea (apex displacement) and the eyeball as a whole (change in intraocular volume), on changes in intraocular pressure are obtained numerically. In cases of moderate inhomogeneity they differ slightly from the same dependences for the homogenous cornea with effective stiffness equal to the average value for the corresponding inhomogenous distribution, and only when the effective stiffness amplitude is very high (two or more times greater than its average value), cornea inhomogeneity leads to a discernible increase in the integral response of the cornea and the eyeball as a whole to changes in pressure. The effect of inhomogeneity on the results of Maklakoff tonometry is studied. Also in this case the difference between the tonometric (in the loaded eye) and true (before loading) pressures (tonometric difference) mainly depends on the average cornea stiffness and increases considerably only for its large amplitudes. Apical cornea weakening leads to an increase, although not too significant, in tonometric difference.

Keywords: eye, elastic properties, spatial inhomogeneity of the cornea, Maklakoff tonometry, mathematical modeling