

## МЕТОДЫ ХАОТИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ В ИССЛЕДОВАНИИ СИНХРОНИЗАЦИИ СЛОЖНЫХ ПРИРОДНЫХ СИСТЕМ

© 2017 г. А.Н. Бондаренко\*, М.А. Бондаренко\*\*,  
Т.В. Бугуева\* \*\*\*, Л.А. Козинкин\*\*\*

\*Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, 630090, Новосибирск, просп. Академика Коптюга, 4

\*\*Новосибирский государственный технический университет, 630073, Новосибирск, просп. К. Маркса, 20

\*\*\*Новосибирский национальный исследовательский государственный университет,  
630090, Новосибирск, ул. Пирогова, 2

E-mail: bondarenkoan1953@mail.ru, bondarenkoma@mail.ru,  
bugueva@math.nsc.ru, leon7archer@gmail.com

Поступила в редакцию 27.09.16 г.

После доработки 26.01.17 г.

Использован метод максимумов модулей вейвлет-преобразования для исследования попарной синхронизации нерегулярных колебаний численности насекомых в разных населенных пунктах Великобритании. Исследовано влияние индекса Северо-Атлантического колебания на динамику численности и на пространственную попарную синхронизацию зеленой еловой тли *Elatobium abietinum* на территории Великобритании. Выявленная синхронизация между некоторыми населенными пунктами связывается авторами с взаимным расположением этих пунктов и с влиянием климата.

*Ключевые слова:* вейвлеты, детерминированный хаос, мультифрактальный анализ, скелетоны, хаотическая синхронизация.

Теория синхронизации динамических систем, исторически развившаяся из экспериментов Гюйгенса с подвешенными на общей балке маятниками [1], стала одной из важнейших областей современной физики. Ее методы активно применяются в радиофизике, нейробиологии и экологии [2–6]. Особый интерес в последние несколько десятилетий в естественных науках представляет задача обнаружения хаотической синхронизации динамических систем [7–9].

Методы хаотической динамики, в основе которой лежат математические теории и физические понятия, такие как спектр Ренье, аттрактор, вейвлет-преобразование, скелетоны и хаотическая синхронизация, появились сравнительно недавно и еще прочно не вошли в инструментарий исследователя, несмотря на их эффективность.

Как один из современных подходов к анализу временных рядов, метод максимумов модулей вейвлет-преобразования (ММВП), основанный на исследовании сингулярного спектра

Ренье множества времен возвращения Пуанкаре, берет свое начало в ранних работах по исследованию хаоса в диссипативных системах [10,11].

Роль изменчивости климата в определении пространственных и временных закономерностей количественных флуктуаций – центральная проблема в экологии. В работе [12] была сделана попытка изучить изменение климата в Великобритании вследствие влияния North Atlantic Oscillation (NAO), исходя из наблюдения за динамикой изменения совокупности зеленой еловой тли (*Elatobium abietinum*) на территории 15-ти населенных пунктов страны. Для статистического моделирования динамики изменения совокупности зеленой еловой тли в качестве индекса ежегодного размера совокупности авторы использовали максимальное число зарегистрированных ежегодно (в начале мая) совокупностей зеленой еловой тли.

В настоящей работе метод ММВП был применен для получения ответа на единственный вопрос: достигается или нет попарная синхронизация при наблюдении за динамикой изменения совокупности зеленой еловой тли на побережье Англии.

Сокращение: ММВП – максимумы модулей вейвлет-преобразования.

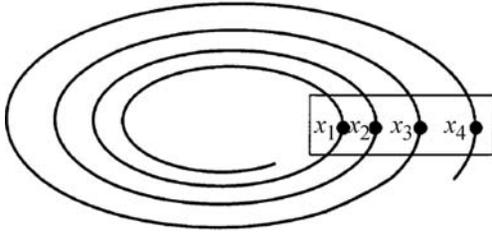


Рис. 1. Сечение Пуанкаре для процесса  $x(t)$ .

### ХАОТИЧЕСКАЯ СИНХРОНИЗАЦИЯ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Пусть имеется некоторое число  $k$  процессов (объектов), состояние каждого из которых в момент времени  $t$  характеризуется некоторым вектором  $x^{(i)}(t)$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ ;  $0 \leq t < \infty$ .

Предположим, что все вектор-функции  $x^{(i)}(t)$  принадлежат одному и тому же функциональному пространству  $X$ . Пусть задана некоторая числовая характеристика данных процессов, определенная зависящими от времени отображениями  $C_i: X \rightarrow C$ , где  $C$  есть множество возможных значений  $C_i$ . Характеристика  $C_i$  называется *показателем синхронизации* или *индексом синхронизации*.

Для того чтобы иметь возможность сравнивать значения характеристики для различных процессов, вводится набор независимых от времени вектор-функций:

$$F_i: C \rightarrow R^m, \quad i = 1, \dots, k; \quad m \in N,$$

называемых *функциями сравнения*. Будем говорить, что имеет место *синхронизация* процессов  $x^{(i)}$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , относительно характеристики  $C_i$  и функций сравнения  $F_i$ , если существуют вещественные числа (временные или фазовые сдвиги)  $\tau_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, k$ , такие, что для всех  $t \geq 0$  выполняются соотношения:

$$F_1(C_{t+\tau_1}[x^{(1)}]) = \dots = F_k(C_{t+\tau_k}[x^{(k)}]). \quad (1)$$

Имеет место и более общий случай кратной синхронизации, если в предыдущем определении вместо соотношения (1) выполнено:

$$n_1 F_1(C_{t+\tau_1}[x^{(1)}]) = \dots = n_k F_k(C_{t+\tau_k}[x^{(k)}]),$$

где  $n_i$  – коэффициенты кратности синхронизации.

В случае хаотических процессов для понимания фазовой синхронизации сначала требуется определить понятие фазы для такого процесса.

В настоящее время известно несколько способов введения фазы, дающих одинаково кор-

ректные результаты для систем с достаточно хорошей топологией аттрактора. Это – системы с так называемыми фазово-когерентными аттракторами. В этом случае понятие фазы для хаотического процесса состоит [9,10] в рассмотрении хода процесса между моментами пересечения им некоторой поверхности в расширенном фазовом пространстве – сечения Пуанкаре (рис. 1).

Индексом синхронизации в этом случае принято считать значение фазы  $\varphi(t)$  хаотического процесса  $x(t)$ , лежащее в промежутке от 0 до  $2\pi$  и определяемое как

$$C_t[x] = \varphi_t = 2\pi \frac{t - t_n}{t_{n+1} - t_n} + 2\pi n, \quad t_n \leq t < t_{n+1},$$

где  $t_n$  – время  $n$ -го пересечения траектории процесса с сечением Пуанкаре.

Полагая  $F_1(\varphi_t) = F_2(\varphi_t) = \varphi_t$  в случае, когда  $k = 2$ , получаем *синфазную* синхронизацию. Если же задать функции сравнения как  $F_1(\varphi_t) = \varphi_t$ ,  $F_2(\varphi_t) = \varphi_t + \pi$ , то получим *противофазную* (*антифазную*) синхронизацию.

При проведении исследований явления хаотической синхронизации в работах [8–11] наблюдалась следующая связь между синхронизацией и мультифрактальными характеристиками процесса. Распределение времен возврата динамической системы в секущую Пуанкаре характеризуется мультифрактальными свойствами. Степень мультифрактальности значительно меньше для любого типа синхронной динамики по сравнению со степенью мультифрактальности в режимах вне области синхронизации. Принимая во внимание данное заключение, становится возможным использование в задаче обнаружения синхронизации хаотических динамических систем принципов мультифрактального анализа. Одним из таких подходов является метод максимумов модулей вейвлет-преобразования.

### МЕТОД МАКСИМУМОВ МОДУЛЕЙ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

В начале 1990-х годов в работах [13–15] был представлен новый подход к исследованию мультифрактальных свойств сигналов сложной структуры – метод ММВП. Как следует из названия, метод базируется на вейвлет-преобразовании – разложении исходного сигнала по базису, сконструированному из обладающей рядом свойств солитоноподобной функции (вейвлета) посредством масштабных изменений и переносов. Вейвлет замечателен тем, что локализован как во времени, так и в пространстве [16–20].

Рассмотрим непрерывное вейвлет-преобразование функции  $g(x) \in L_2(R)$ :

$$W(a, b) = \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} g(x) \overline{\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)} dx. \tag{2}$$

где  $a$  – параметр масштаба,  $b$  – пространственная координата или момент времени,  $\psi$  – солитоноподобная функция (материнский вейвлет);  $a, b \in R, a > 0$ .

Результат такого преобразования – некоторая поверхность в трехмерном пространстве. Основная информация о нерегулярностях содержится в *скелетонах* – линиях локальных экстремумов поверхности коэффициентов  $W(a, x)$ , поиск которых проводится на каждом фиксированном масштабе  $a$ .

В рамках метода ММВП принято в качестве материнского вейвлета использовать производную функции Гаусса невысокого порядка ( $n = 1, 2$ ):

$$\psi^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{\partial^n}{\partial x^n} (e^{-x^2}).$$

Из работ [10,14,15] следует, что сингулярность функции  $g(x)$  в точке  $x_0$  может быть описана с помощью локальной *экспоненты Гельдера* следующим образом.

Рассмотрим случай, когда функция  $g(x)$  в точке  $x$  является  $n$  раз дифференцируемой, а ее  $(n + 1)$ -я производная в этой точке не существует. Тогда  $g(x)$  можно разложить по формуле Тейлора до степени  $n$  включительно. Обозначим полученный полином как  $P_n(x)$ . *Экспонентой Гельдера* в точке  $x_0$  называется наибольшее значение  $h$ , для которого при  $x$ , близких к  $x_0$ , выполняется следующее неравенство:

$$|g(x) - P_n(x)| \leq C|x - x_0|^h.$$

Чем больше  $h$ , тем более регулярной является функция  $g(x)$ . Интегрирование функции  $g(x)$  увеличивает значение  $h$  на единицу, а дифференцирование – уменьшает.

Предположим, что анализируемую сингулярную функцию  $g(x)$  в окрестности точки  $x_0$  можно представить в виде суммы регулярной компоненты – полинома  $P_n(x)$  и слагаемого, которое определяет нерегулярное поведение и характеризуется нецелым значением  $h(x_0)$  (см. [14,15]):

$$g(x) = P_n(x) + C|x - x_0|^{h(x_0)}.$$

Одной из особенностей вейвлет-преобразования, широко используемой для устранения

полиномиальных составляющих сигнала, является тот факт, что вейвлеты, имеющие первые  $m$  нулевых моментов,

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^m \psi(x) dx = 0,$$

ортогональны всем полиномам до степени  $m$  включительно:

$$\int_{-\infty}^{\infty} P_n(x) \psi(x) dx = 0.$$

В этом случае, как следует из работ [10,14,15], при  $a \rightarrow 0$  наблюдается простая степенная зависимость. Точнее говоря, если функция  $g(x)$  имеет особенность в точке  $x_0$ , то  $W(a, x_0) \sim a^{h(x_0)}$  при  $a \rightarrow 0$ , и если она является  $m$  раз гладкой в точке  $x_0$ , то  $W(a, x_0) \leq a^m$  при  $a \rightarrow 0$ . Таким образом, чем быстрее коэффициент уменьшается при  $a \rightarrow 0$ , тем более регулярна функция  $W(a, x)$  в точке  $x_0$ . Если в точке  $x_0$  функция  $W(a, x_0)$  имеет особенность, то при  $a \rightarrow 0$  значения функции  $W(a, x_0)$  могут расходиться или аномально медленно уменьшаться.

Алгоритм метода ММВП предполагает проведение исследования нерегулярного поведения функции  $g(x)$  в два этапа [10,14,15].

**1-й этап.** Выполняется вейвлет-преобразование исследуемой функции по формуле (2). Проводится поиск локальных экстремумов поверхности коэффициентов  $W(a, x)$  на каждом фиксированном масштабе  $a$ .

Совокупность найденных экстремальных точек образует множество линий на поверхности вейвлет-коэффициентов (так называемый *скелетон*).

**2-й этап.** Строятся *частичные функции*:

$$Z(q, a) = \sum_{l \in L(a)} \left( \sup_{a' \leq a} |W(a', x_l(a'))| \right)^q,$$

где  $L(a)$  – множество линий скелетона на масштабе  $a$ ;  $x_l(a')$  – координата линии  $l$  на масштабе  $a'$ . Тогда при  $a \rightarrow 0$  выполняется зависимость:

$$Z(q, a) \sim a^{\tau(q)}.$$

Величина  $\tau(q)$  определяется путем вычисления значения  $\ln Z(q, a) / \ln a$  и называется *скейлинговой экспонентой*. Применяя преобразование Лежандра, получим основные мультифрактальные характеристики: экспоненту Гельдера  $h$  и *спектр  $D(h)$  обобщенных фрактальных размерностей*:

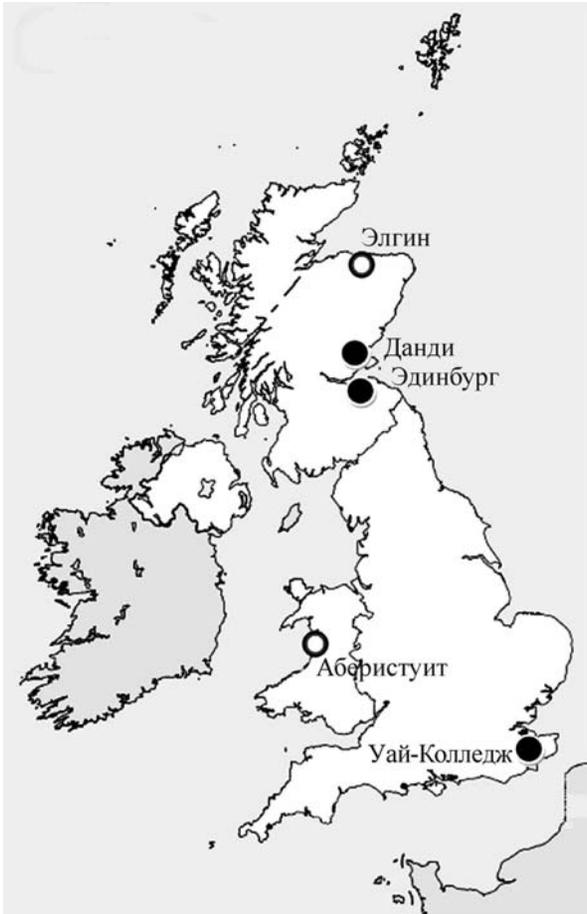


Рис. 2. Населенные пункты, в которых проводилось исследование численности популяций зеленой еловой тли.

$$\begin{cases} h = \frac{d\tau}{dq}, \\ D(h) = qh - \tau(q). \end{cases}$$

**ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МАКСИМУМОВ  
МОДУЛЕЙ ВЕЙВЛЕТ-ПРЕОБРАЗОВАНИЯ  
ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ  
СИНХРОНИЗАЦИИ СОВМЕСТНОЙ  
ДИНАМИКИ ЧИСЛЕННОСТИ  
ПОПУЛЯЦИЙ**

В работе [12] был использован непараметрический регрессионный анализ для диагностики синхронизации отдельных популяций зеленой еловой тли в Великобритании. Было показано (см. рис. 2), что численности популяций, подвергающихся значительным климатическим эффектам (населенные пункты закрашены черным цветом), имеют синхронную динамику. Напротив, при слабо выраженном влиянии климата (населенные пункты не закрашены) синхронизация отсутствует.

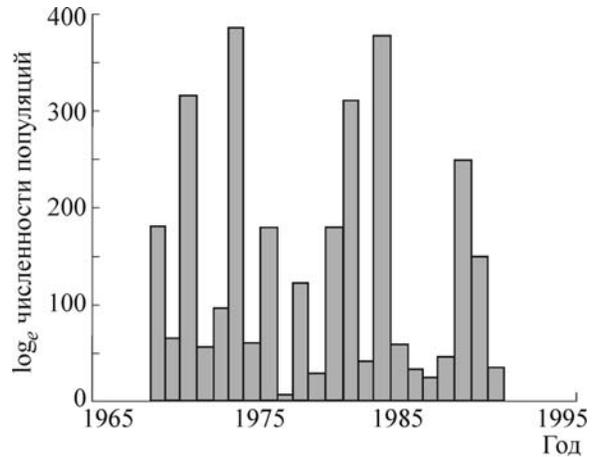


Рис. 3. Численность популяций зеленой еловой тли в населенном пункте Уай-Колледж.

В данной работе использованы статистические данные, на которые опирались авторы работы [12], эти данные представлены в открытом доступе: <http://cpbntsl.bio.ic.ac.uk/gpdd/register.htm>. С помощью этих данных была исследована взаимная синхронизация популяций в пяти населенных пунктах на побережье Англии.

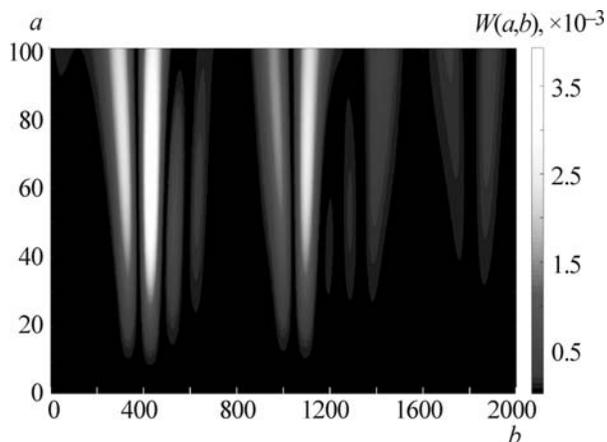
Для применения метода ММВП необходимо построить временной ряд совместной динамики пар популяций, анализируемых на наличие синхронизации. В связи с наличием достаточно малой выборки данных – ежегодные измерения численности каждой популяции в течение 20–22 лет (см. рис. 3) – возникает необходимость интерполяции промежуточных значений временного ряда.

Пусть  $x_n$  и  $y_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N$  – последовательности измерений первой и второй популяций соответственно. Интерполируем исходные последовательности  $x_n$  и  $y_n$  кубическими сплайнами, получим ряды  $x'_n$  и  $y'_n$ ,  $n = 1, 2, \dots, N'$ , где  $N' \gg N$ . Далее рассматриваем в качестве совместной динамики популяций ряд  $(x'_n - y'_n)$ ,  $n = 1, 2, \dots, N'$ .

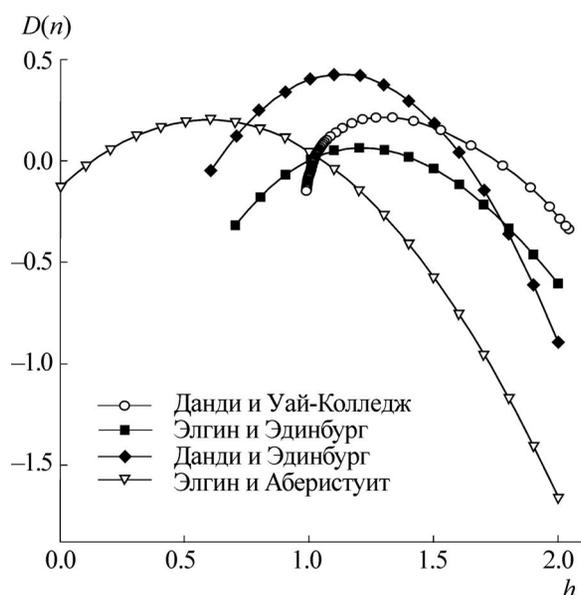
После вычисления модуля непрерывного вейвлет-преобразования мы получим некоторую поверхность. Для удобства спроецируем эту поверхность на плоскость  $(b, a)$ . При такой проекции значение  $|W(a, b)|$  кодируется разными оттенками серого цвета. Их градация приведена на рис. 4 справа от графика.

Применяя метод ММВП к описанной выше последовательности измерений, проанализируем мультифрактальные характеристики четырех различных пар популяций.

На рис. 5 приведены графики спектров фрактальных размерностей пар популяций.



**Рис. 4.** Модуль вейвлет-преобразования  $W(a, b)$  от совместной динамики популяций в населенных пунктах Данди и Уай-Колледж.

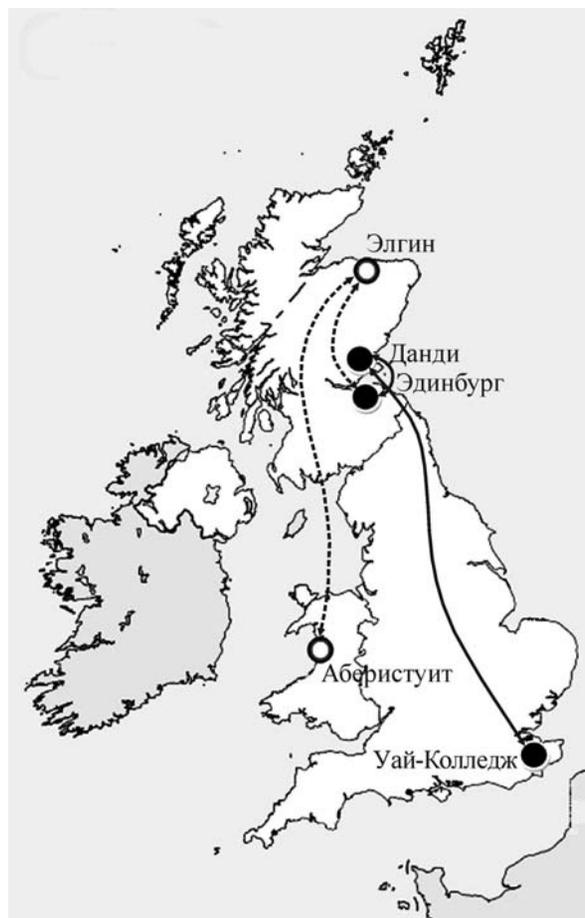


**Рис. 5.** Спектры фрактальных размерностей пар популяций.

Анализируя спектры фрактальных размерностей пар популяций в населенных пунктах Данди и Эдинбург, Данди и Уай-Колледж, Элгин и Эдинбург, Элгин и Аберистуит, можем сделать вывод о наличии синхронной/асинхронной динамики.

### АНАЛИЗ РЕЗУЛЬТАТОВ

В отличие от результатов работы [12], в которой исследована синхронизация популяций зеленой еловой тли с учетом влияния внешних климатических условий в каждом населенном пункте, в настоящей работе исследована попар-



**Рис. 6.** Населенные пункты, в которых наблюдается попарная синхронизация популяций, соединены сплошной линией. Населенные пункты, в которых отсутствует попарная синхронизация, соединены пунктирной линией.

ная синхронизация популяций в разных населенных пунктах.

Полученные результаты показывают (рис. 6), что уровень синхронизации двух популяций зависит от географической (и климатической) близости этих населенных пунктов.

В силу незначительной удаленности популяций из населенных пунктов Данди и Эдинбург полученный спектр обобщенных фрактальных размерностей здесь наименее широк ( $\Delta_h \approx 0,8340$ ), где  $\Delta_h$  – ширина спектра. Это свидетельствует о наличии синхронной динамики.

Напротив, анализ пар популяций Элгин и Эдинбург ( $\Delta_h \approx 0,9604$ ) и Элгин и Аберистуит ( $\Delta_h \approx 1,1286$ ) подтверждает отсутствие синхронизации в этих случаях.

Наиболее спорным выглядит сравнение пар Элгин и Эдинбург ( $\Delta_h \approx 0,9604$ ) и Данди и Уай-Колледж ( $\Delta_h \approx 0,8477$ ), тем не менее, в случае асинхронной динамики спектр по-преж-

нему шире. В случае Данди и Уай-Колледж ширина спектра говорит скорее о слабой синхронизации. Это, возможно, обусловлено недостаточной величиной выборки измерений.

Таким образом, ширина спектра может давать представление о степени взаимной синхронизации популяций.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе работы были исследованы возможности применения метода максимумов модулей вейвлет-преобразования в задаче обнаружения синхронизации хаотических динамических систем. Было проведено практическое исследование синхронизации численности популяций насекомых в областях сильного и слабого климатического воздействия.

Несмотря на недостаточное число измерений, полученные на их основе результаты согласуются с результатами работы [12]. Таким образом, метод максимумов модулей вейвлет-преобразования может успешно применяться в задачах синхронизации даже при небольших объемах данных.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14-01-002008).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Х. Гюйгенс, *Три мемуара по механике* (АН СССР, М., 1951).
2. И. И. Блехман, *Синхронизация динамических систем* (Наука, М., 1993).

3. И. И. Блехман, *Вибрационная механика* (Наука, М., 1994).
4. А. Пиковский, М. Розенблум и Ю. Куртс, *Синхронизация. Фундаментальное нелинейное явление* (Техносфера, М., 2003).
5. Г. А. Леонов и В. Б. Смирнова, *Математические проблемы теории фазовой синхронизации* (Наука, СПб, 2000).
6. В. Линдсей, *Системы синхронизации в связи и управлении* (Сов. радио, М., 1978).
7. S. Boccaletti, J. Kurths, D. L. Valladares, and C. S. Zhou, *Phys. Rep.* **366** (1), 1 (2002).
8. L. M. Pecora and T. L. Carroll, *Phys. Rev. Lett.* **64** (8), 821 (1990).
9. M. G. Rosenblum, A. S. Pikovsky, and J. Kurths, *Phys. Rev. Lett.* **76** (11), 1804 (1996).
10. V. Afraimovich and G. M. Zaslavsky, *Phys. Rev. E* **55** (5), 5418 (1997).
11. A. Silchenko and Chin-Kun Hu, *Phys. Rev. E* **63** (4), 041105 (2001).
12. S. Saldaña, M. Lima, and S. Estay, *Animal ecology J.* **76** (4), 782 (2007).
13. J. F. Muzy, E. Bacry, and A. Arneodo, *Phys. Rev. Lett.* **67** (25), 3515 (1991).
14. J. F. Muzy, E. Bacry, and A. Arneodo, *Phys. Rev. E* **47** (2), 875 (1993).
15. А. Н. Павлов и В. С. Анищенко, *Успехи физ. наук* **177** (8), 859 (2007).
16. A. Grossman and J. Morlet, *Mathematics and Physics: Lectures on Recent Results* **11**, 135 (1985).
17. Y. Meyer, *Algorithms and Applications* (Philadelphia, Pa.: Society for Industrial and Applied Mathematics, 1993).
18. Y. Meyer, *Wavelets and Operators* (Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992).
19. I. Daubechies, *Ten lectures on wavelets* (SIAM Press, 1992).
20. C. K. Chui, *An introduction to wavelets* (Acad. Press Professional, Inc., 1992).

## Methods for Chaotic Dynamics

### during Investigation of Synchrony in Complex Natural Systems

A.N. Bondarenko\*, M.A. Bondarenko\*\*, T.V. Bugueva\* \*\*\*, and L.A. Kozinkin\*\*\*

\*Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences,  
prosp. Akademika Koptuga 4, Novosibirsk, 630090 Russia

\*\*Novosibirsk State Technical University, prosp. K. Marksa 20, Novosibirsk, 630090 Russia

\*\*\*Novosibirsk National Research State University, ul. Pirogova 2, Novosibirsk, 630090 Russia

The wavelet transform modulus maxima method was applied to study pairwise synchrony of irregular fluctuations in an insect population in different localities throughout Great Britain. The influence of the North Atlantic Oscillation index on the population dynamics and spatial pairwise synchrony of the green spruce aphid *Elatobium abietinum* across the United Kingdom was shown. The authors suggest that the synchrony between localities is correlated with synchrony in each locality and with synchrony in climatic variables.

*Keywords: wavelets, determinate chaos, multifractal analysis, skeletons, chaotic synchrony*