

## ОЦЕНКА УПРУГИХ СВОЙСТВ ГЛАЗА С ПОМОЩЬЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ТОНОМЕТРИИ ТОНОМЕТРОМ ШИОТЦА: АНАЛИЗ ИЗМЕРИТЕЛЬНОЙ ПРОЦЕДУРЫ НА ОСНОВЕ ДВУХКОМПОНЕНТНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

© 2016 г. И.Н. Моисеева, А.А. Штейн, Г.А. Любимов

*Институт механики Московского государственного университета им. М.В. Ломоносова,  
117899, Москва, Мичуринский пр., 1*

*E-mail: moiseeva.ir@yandex.ru; stein@imec.msu.ru*

Поступила в редакцию 10.07.16 г.

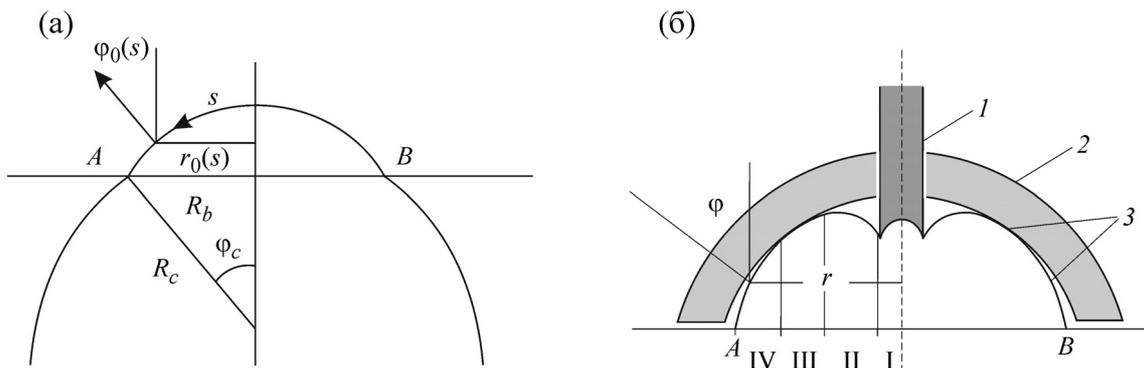
Процедура дифференциальной тонометрии тонометром Шиотца моделируется в рамках двухкомпонентной модели глазного яблока, в которой роговица представляется безмоментной деформируемой линейно-упругой поверхностью, а склеральная область – упругим элементом, откликающимся изменением объема на изменения внутриглазного давления. В результате численных расчетов показано, что зависимость внутриглазного давления от веса нагружающего роговицу стержня (плунжера) близка к линейной, что позволяет рассматривать наклон соответствующей прямой (коэффициент эластоподъема) как характеристику обследуемого глаза. Исследована зависимость этой величины от упругих характеристик глаза и давления в ненагруженном глазу. Анализ, основанный на теории размерности и подтвержденный расчетами, позволил заключить, что коэффициент эластоподъема в первом приближении зависит от упругих констант через их отношения к внутриглазному давлению. Проведено сопоставление со стандартной методикой обработки данных дифференциальной тонометрии.

*Ключевые слова: глаз, упругие свойства, дифференциальная тонометрия, тонометр Шиотца, математическое моделирование.*

Тонометр Шиотца – один из классических и широко применяемых в клинике приборов для измерения внутриглазного давления. Как и другие статические тонометры, он базируется на измерении некоторого параметра, характеризующего деформацию роговицы под действием нагружающего ее устройства. В случае тонометра Шиотца нагружающее устройство состоит из вогнутой тяжелой стопы и плунжера (стержня) известного веса, свободно пропускаемого в отверстие в центре стопы. Измеряемый геометрический параметр – глубина погружения плунжера под поверхность стопы. Внутриглазное давление в случае тонометра Шиотца не может даже приблизительно определяться из простых оценок; поэтому для его определения в 30–70-е гг. прошлого века была разработана полумпирическая теория [1–3], дающая формулы и таблицы, по которым заглубление плунжера пересчитывается в давление.

Стандартная методика обработки показаний тонометра Шиотца использует единственную характеристику упругих свойств глазного яблока, так называемую константу Фриденвальда [1], определенную эмпирически как некая

средняя характеристика множества обследованных здоровых (по крайней мере, в отношении глаукомы) глаз. Вместе с тем известно, что упругие характеристики глаза могут у разных людей различаться на порядок и более [4]. Кроме того, имеются данные, что отличие таковых от нормы или их изменение в процессе жизни может коррелировать с патологиями. К примеру, повышенную жесткость склеры связывают с наличием глаукомы [5]. Поэтому необходимость клинической оценки упругих свойств глазных тканей как для уточнения оценки внутриглазного давления, так и с диагностической целью осознается врачами, и для такой оценки разработан ряд измерительных процедур. Одна из них – дифференциальная тонометрия по Шиотцу, состоящая в нагружении глаза последовательно плунжерами разного веса (при неизменном весе стопы) и измерении соответствующих заглублений. На основании этих данных получается (в рамках упомянутой полумпирической теории) так называемая ригидность глаза по Фриденвальду, которая для здорового глаза должна совпадать с константой Фриденвальда или быть близка к ней.



**Рис. 1.** К постановке задачи: (а) – глазное яблоко до нагружения; (б) – роговица, нагруженная тонометром Шиотца: 1 – плунжер; 2 – стопа; 3 – роговица. Остальные обозначения в тексте.

Теория, использованная для получения стандартных соотношений, по которым обрабатываются данные дифференциальной тонометрии, базируется на спорных теоретических положениях, а также опытах, проведенных в основном на выделенных глазах (корректность приложения которых к живому глазу не поддается надежной оценке). Кроме того, остается открытым вопрос, в какой степени дифференциальная тонометрия отражает именно упругие свойства глаза. Не зависят ли ее результаты, к примеру, от внутриглазного давления? Да и упругие свойства могут быть распределены по-разному, например, между роговицей и склерой.

На все эти вопросы предполагается ответить в предлагаемой работе на основе предложенной нами механически корректной модели [6], в которой упругие свойства задаются тремя константами, из которых две оказываются существенными, характеризую отдельно упругие свойства роговичной и склеральной областей. Модель [6] достаточно проста и удобна для практики, поскольку не требует знания множества параметров, определение которых для индивидуального обследуемого глаза в клинике невозможно. Вместе с тем она позволяет учесть неоднородность глазного яблока как упругой системы. Роговица представляется безмоментной однородной изотропной линейно-упругой двумерной поверхностью, а склера и прилегающие к ней ткани – упругим элементом, откликающимся изменением объема на изменение давления. Пренебрежение сопротивлением роговицы изгибу обосновано эмпирически и впервые было реализовано в механически корректной постановке в работе [7].

Разработанный в работе [6] метод был эффективно применен к анализу механического смысла данных, получаемых с помощью различных тонометров [6,8,9]. В частности, в работе [10] рассмотрена процедура измерения

внутриглазного давления тонометром Шиотца и проведено сравнение расчетных данных с теми, которые используются при стандартной методике обработки результатов измерений. В настоящей работе внимание сосредоточено на процедуре дифференциальной тонометрии, смысл которой проясняется на основании как расчетов, так и общих выводов, следующих на теории размерности.

#### ПАРАМЕТРЫ ОБЪЕКТА И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Схема нагружения в импрессионном тонометре Шиотца представлена на рис. 1. Роговица нагружена стопой весом 11 г с радиусом кривизны 15 мм, т.е. приблизительно вдвое большим, чем у нормальной роговицы человека. Диаметр плунжера, пропускаемого через ее центральное отверстие, составляет 3 мм; его вогнутая вдавливающаяся в роговицу поверхность имеет тот же радиус кривизны, что и стопа. Стандартные веса плунжера 5,5, 7,5, 10 г. Первые два наиболее употребительны при дифференциальной тонометрии. Именно эти веса (5,5 и 7,5 г) используются в тонографе GlauTest 60, применяющемся во многих российских клиниках.

Общая постановка задачи подробно описана в работе [6] и конкретизирована для тонометра Шиотца в работе [10]. Здесь ограничимся воспроизведением необходимых соотношений без обоснований и обсуждений.

Рассматривается осесимметричная деформация роговицы как упругой безмоментной двумерной поверхности, распертой внутренним давлением  $p$ , причем предполагается, что при некотором давлении  $p_0$  она имела форму сферического сегмента радиуса  $R_c$  (рис. 1а) с радиусом основания  $R_b$ . В областях свободной роговицы (вне контакта с приложенной нагруз-

кой; II и IV на рис. 1б) уравнения в предположении малых деформаций с учетом конечности смещений имеют вид

$$\begin{aligned} (r_0 T_1)' - T_2 \cos \varphi &= 0, \\ -T_2 \sin \varphi - r_0 \varphi' T_1 + \lambda r_0 p &= 0, \quad r' = \lambda \cos \varphi, \\ r_0 &= R_c \sin \varphi_0, \quad \varphi_0 = \frac{s}{R_c}, \quad \lambda = 1 + \varepsilon_1, \quad \varepsilon_2 = \frac{r}{r_0} - 1, \quad (1) \\ \varepsilon_1 &= \frac{1}{E_c^*} [T_1 - \nu_c T_2 - T_0(1 - \nu_c)], \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E_c^*} [T_2 - \nu_c T_1 - T_0(1 - \nu_c)]. \end{aligned}$$

Здесь независимым параметром считается длина  $s$  дуги образующей роговицы в ненагруженном состоянии, отсчитываемая от ее пересечения с осью симметрии ( $-\varphi_c R_c \leq s \leq \varphi_c R_c$ );  $T_1$  и  $T_2$  – касательные усилия в меридиональном и перпендикулярном к нему направлениях,  $r$  – расстояние точки поверхности, представляющей роговицу, от оси,  $\varphi$  – угол между нормалью к этой поверхности и осью симметрии,  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  – деформации в направлении главных осей,  $E_c^*$  и  $\nu_c$  – модуль растяжения и коэффициент Пуассона роговицы как двумерной упругой поверхности [6]. Угол  $\varphi$  считается положительным, если нормаль направлена во внешнюю относительно оси сторону. Функции  $r_0(s)$  и  $\varphi_0(s)$  – значения функций  $r(s)$  и  $\varphi(s)$  при начальной сферической конфигурации (рис. 1а). В этой конфигурации  $T_1 = T_2 = T_0 = p_0 R_c / 2$ .

В областях контакта роговицы с грузами (I и III) имеют место связи

$$\text{I: } \sin \varphi = \frac{r}{r_p}; \quad \text{III: } \sin \varphi = \frac{r}{r_f}, \quad (2)$$

где  $r_p$  и  $r_f$  – радиусы кривизны плунжера и стопы соответственно. В предположении свободного проскальзывания роговицы по поверхностям контакта система (1) остается справедливой в областях I и III за исключением проекции уравнения равновесия на нормальное к роговице направление (второе уравнение (1)), которое теперь заменяется соответствующей связью из (2).

В силу симметрии решение задачи ищется в области  $0 \leq s \leq \varphi_c R_c$ . В качестве граничных условий на концах области принимаем (см. [6]) условие  $r(\varphi_c R_c) = R_b$ , соответствующее закреплению роговицы на склере, деформации и смещения которой считаются малыми, и условие ограниченности усилия  $T_1$  в точке пересечения с осью симметрии. Последнее принимает форму

асимптотического соотношения при  $s \rightarrow 0$ :  $r \sim s[1 + ((1 - \nu_c)/E_c^*)(T_1(0) - T_0)]$  [6]. Условия на границах отрыва роговицы от жестких поверхностей имеют вид [10]:

$$\begin{aligned} \text{I-II: } r^- &= r^+ = r_*, \quad T_1^- = T_1^+, \\ G &= \pi r_*^2 p - T_1 \sin(-\varphi^-) 2\pi r_*, \\ \text{II-III: } r^- &= r^+, \quad \varphi^- = \varphi^+, \quad T_1^- = T_1^+, \quad (3) \\ \text{III-IV: } r^- &= r^+, \quad \varphi^- = \varphi^+, \quad T_1^- = T_1^+, \\ G + G_f &= \pi r^2 p - T_1 \sin \varphi 2\pi r, \end{aligned}$$

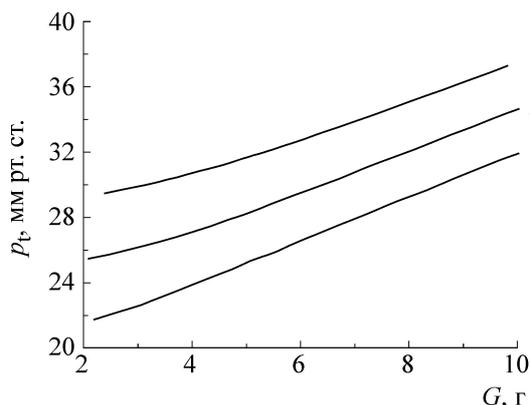
где  $G$  и  $G_f$  – веса стержня и стопы соответственно,  $r_*$  – радиус сечения плунжера, а индексами «-» и «+» обозначены значения переменных по разные стороны линии отрыва, причем знак «-» соответствует области, лежащей от оси дальше. В соотношениях содержащих веса (условия равновесия), функции, непрерывные на рассматриваемой поверхности разрыва, индексами «-» и «+» не помечены.

Система уравнений и граничных условий (1)–(3) дает возможность вычислять геометрические характеристики деформированной под грузом роговицы, в том числе приращение  $\Delta V_c$  подроговичного объема (часть внутриглазного объема над плоскостью  $AB$ ). Приращение объема  $\Delta V_c$  связано с приращением всего заполненного жидкостью внутриглазного объема  $\Delta V$  соотношениями

$$\Delta V_s = K(p - p_0), \quad \Delta V = \Delta V_c + \Delta V_s, \quad (4)$$

где  $\Delta V_s$  – приращение «склерального» объема (под  $AB$ ),  $K$  – интегральная константа, определяющая упругое поведение склеральной области.

Для удобства сравнения с данными других авторов упругие константы модели далее переопределены [6] по формулам  $E_c^* = \delta E_c$ ,  $K = (\zeta E_s)^{-1}$ , где  $\delta = 0,5$  мм – средняя в норме толщина роговицы, а  $\zeta = 1,44 \cdot 10^{-5}$  мм<sup>-3</sup>. Константы  $E_s$  и  $E_c$  имеют размерность упругого модуля (и давления) и далее именуется жесткостями: склеральной и роговичной (роговицы) соответственно. Роговичная жесткость  $E_c$  имеет смысл жесткости материала роговицы, усредненной по ее условной (нормальной) толщине. Склеральная жесткость  $E_s$  – средняя по толщине склеры жесткость ее материала при выборе специальной грубой модели склеральной области [6]. Полагаем  $R_c = 8$  мм,  $R_b = 5,8$  мм, что соответствует стандартным для человеческого глаза значениям. Для коэффициента Пуассона, значение которого оказалось несущест-



**Рис. 2.** Зависимости тонометрического давления от веса плунжера, рассчитанные для среднего глаза ( $E_c = 0,3$ ,  $E_s = 10$  МПа) при различных значениях истинного давления  $p_0 = 20$  (1), 16 (2), 12 (3) мм рт. ст.

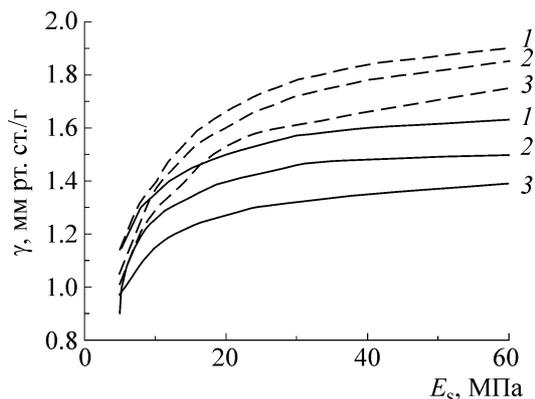
венным, в расчетах принималось значение  $\nu_c = 0,45$ .

Упругие константы  $E_s$  и  $E_c$  варьировались в широком диапазоне. Когда ниже говорится о средних значениях этих констант, имеются в виду оценки, полученные ранее для здоровых глаз [6]:  $E_s = 10$  МПа и  $E_c = 0,3$  МПа.

При тонометрии осуществляется нагружение роговицы внешним устройством достаточно длительное, чтобы рассматривать задачу как статическую, и достаточно кратковременное, чтобы пренебречь изменением внутриглазного объема из-за перестройки притока и оттока жидкости. Таким образом, при моделировании процедуры тонометрии возможно принять условие  $\Delta V = 0$ . Методику численного решения этой задачи см. в [6]. Дифференциальная тонометрия соответствует нагружению глаза двумя или более грузами разного веса.

## РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ И АНАЛИЗ РАЗМЕРНОСТЕЙ

В рамках модели упругие свойства глазного яблока и его невозмущенное (до нагружения тонометром) состояние характеризуются тремя параметрами – склеральной жесткостью  $E_s$ , жесткостью роговицы  $E_c$  и «истинным» (до нагружения) внутриглазным давлением  $p_0$ . В широком диапазоне значений этих параметров исследовалась зависимость давления под грузом  $p_t$  («тонометрического») от веса плунжера  $G$ . Выбор на кривой  $p_t(G)$  двух разных значений аргумента  $G_1$  и  $G_2$  соответствует процедуре дифференциальной тонометрии. Пересчет заглаблению плунжера в тонометрическое давление в медицинской практике осуществляется по



**Рис. 3.** Зависимости коэффициента эластоподъема  $\gamma$  от  $E_s$  при  $E_c = 0,3$  (сплошные кривые), 0,6 (пунктир) МПа;  $p_0 = 12$  (1), 16 (2), 20 (3) мм рт. ст.

эмпирической формуле [2], проанализированной и уточненной в [10]. В настоящей работе проблема определения тонометрического давления в опыте не рассматривается. Оно рассчитывается по известному алгоритму по заглаблению и весу плунжера.

Во всем исследованном диапазоне параметров кривые  $p_t(G)$  (рис. 2) близки к прямым. Наклон кривой в каждой точке  $\gamma(G) = p'(G)$  оказывается зависимым от  $G$  только на начальном ее участке ( $G < 4$  г), тогда как при больших  $G$  он практически не меняется (не более, чем на несколько процентов). Это позволяет рассматривать  $\gamma$  как характеристику данного глаза и практически определять ее по формуле  $\gamma = (p_2 - p_1)/(G_2 - G_1)$ , где  $p_1 = p(G_1)$  и  $p_2 = p(G_2)$ . В расчетах величина  $\gamma$ , далее именуемая коэффициентом эластоподъема, определялась как средняя на участке  $G = 5-10$  г с использованием метода линейной регрессии.

На рис. 3 представлена зависимость коэффициента эластоподъема  $\gamma$  от всех трех параметров, определяющих в модели конкретный глаз. Видно, что  $\gamma$  возрастает с увеличением жесткостей – как склеральной, так и роговичной. Таким образом, эта величина характеризует упругие свойства глазного яблока, но не только их, а также его невозмущенное состояние, определяемое истинным внутриглазным давлением  $p_0$ ; с возрастанием  $p_0$  коэффициент эластоподъема существенно уменьшается.

Степень влияния характеристик жесткости роговицы и склерального сегмента различна при разных значениях параметра  $E_s$ . Зависимость  $\gamma$  от обеих упругих характеристик глазного яблока более выражена при умеренных и малых значениях склеральной жесткости  $E_s$  – вблизи и ниже ее среднего значения 10 МПа.

При повышенной жесткости склерального сегмента основную роль играет жесткость роговицы. При больших  $E_s$  (в два раза и более выше среднего значения) дальнейшее увеличение  $E_s$  сказывается слабо, однако оно более заметно при высокой жесткости роговицы  $E_c$ .

Результаты дифференциальной тонометрии принимают более отчетливый смысл, если провести анализ размерностей. Полный переход к решению задачи в безразмерных переменных нецелесообразен, поскольку значения некоторых размерных переменных на практике нельзя изменить – это геометрические параметры глаза и нагружающего устройства, а также веса его элементов. Если вес плунжера все же можно менять, хотя бы дискретно, то вес стопы приходится считать всегда одинаковым. Тем не менее анализ размерностей приводит к важным выводам. Ранее в общем виде для задач нагружения глазного яблока такой анализ выполнялся в [11].

Разобьем совокупность размерных параметров, от которых может зависеть коэффициент эластоподъема  $\gamma = p'(G)$ , на две группы. В первую включим геометрические характеристики глаза и нагружающего устройства, имеющие размерность длины  $L$ . Другую группу составляют параметры с размерностью силы  $F$  или давления  $F/L^2$ . В их число входят обе жесткости  $E_s$  и  $E_c$ , истинное внутриглазное давление  $p_0$ , а также веса стопы  $G_f$  и плунжера  $G$ .

Размерность коэффициента  $\gamma$  – обратный квадрат длины:  $[\gamma] = L^{-2}$ . Он может зависеть от параметров второй группы только через их взаимные отношения. Обозначая линейные параметры единым образом через  $a$  (т.е. не интересуясь, какие именно геометрические характеристики входят в безразмерные комбинации), получаем для коэффициента эластоподъема зависимость следующей структуры:

$$\gamma = \frac{1}{a^2} \gamma \left( \frac{E_s}{p_0}, \frac{E_c}{p_0}, \frac{G}{p_0 a^2}, \frac{G_f}{p_0 a^2} \right). \quad (5)$$

В числе аргументов функции (5) опущены безразмерные параметры, составленные из размерных, входящих только в первую группу, т.е. отношения длин, а также коэффициент Пуассона роговицы.

Вышеупомянутая практическая независимость производной  $\gamma(G) = p'(G)$  от веса плунжера  $G$ , при котором она определяется, позволяет исключить  $G$  и соответствующий ему безразмерный параметр  $G/(p_0 a^2)$  из числа аргументов функции (5).

Вес стопы  $G_f$  одинаков практически для всех тонометров рассматриваемого типа, однако зависимость  $\gamma$  от этой величины означает зависимость от безразмерного комплекса  $G_f/(p_0 a^2)$  и, следовательно, дополнительную зависимость от истинного давления  $p_0$  помимо его присутствия через отношения к упругим константам. Поэтому было проведено исследование зависимости  $\gamma$  от веса стопы. Такая зависимость оказалась достаточно слабой, чтобы ею было возможно пренебречь при грубых оценках. Например, при давлении  $p_0 = 12$  мм рт. ст. и варьировании  $G_f$  от 11 до 5 г коэффициент эластоподъема  $\gamma$  менялся от 1,44 до 1,56 мм рт. ст./г. Во всех случаях при варьировании параметров в допустимом диапазоне относительное изменение  $\gamma$  не превышало 10%.

Таким образом, оказывается возможным в первом приближении сократить число безразмерных аргументов функции (5) до двух:

$$\gamma = \frac{1}{a^2} \gamma \left( \frac{E_s}{p_0}, \frac{E_c}{p_0} \right). \quad (6)$$

Аргументы функции (6) можно переопределять, вводя отношение жесткостей  $E_c/E_s$ . Тогда другой аргумент должен обязательно содержать отношение одной из жесткостей (естественно выбрать  $E_s$  ввиду доминирования склеральной области по объему) к давлению  $p_0$ . Этот факт был в общей форме отмечен в работах [11,12].

Безразмерные комплексы  $p_0/E_s$  и  $p_0/E_c$  (обратные к аргументам функции (6)) могут быть весьма обобщенно истолкованы как характеристики уровня упругих деформаций склеры и роговицы при невозмущенном давлении.

Таким образом, коэффициент эластоподъема оказывается зависящим не только от упругих констант глазного яблока, но и от внутриглазного давления, причем в первом приближении от отношений упругих констант к давлению, что должно учитываться при интерпретации данных измерений. Выводы о жесткости или мягкости глаза (даже интегральной) можно сделать только с учетом оценки истинного давления.

В принципе в число размерных аргументов функции, определяющей  $\gamma$ , вместо истинного давления  $p_0$  можно включить тонометрическое давление  $p_t$ , определение которого при клиническом обследовании более надежно. Но в этом случае существенной величиной становится еще и вес плунжера  $G$ , при котором это давление измерено. В числе безразмерных аргументов функции  $\gamma$ , наряду с отношениями  $p_t/E_s$  и  $p_t/E_c$ , должен теперь присутствовать параметр вида

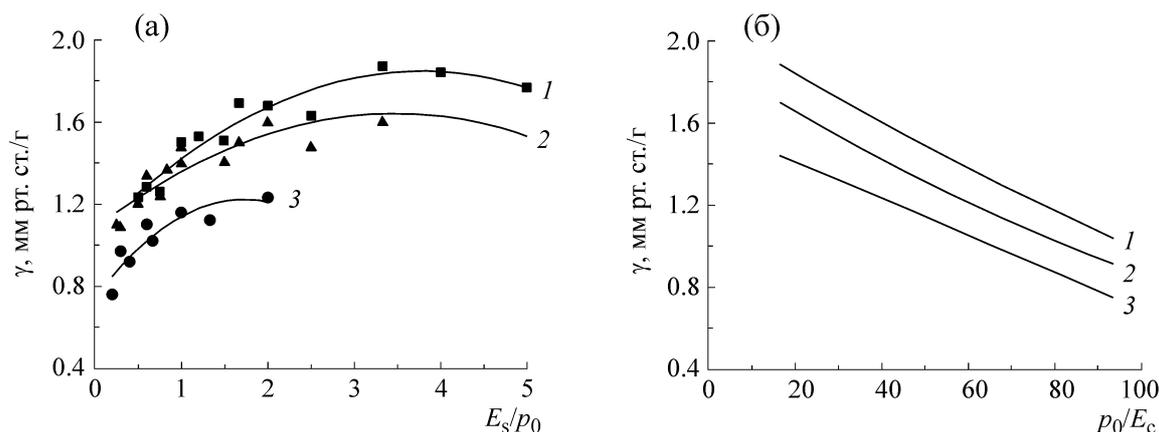


Рис. 4. Зависимости коэффициента эластоподъема  $\gamma$  от безразмерных параметров: (а) – от  $E_s/p_0$  (МПа/мм рт.ст.) при  $E_s/p_0 = 0,01$  (точки, 1), 0,025 (треугольники, 2), 0,05 (квадраты, 3) МПа/мм рт. ст.; (б) – от  $p_0/E_c$  (мм рт.ст./МПа) при  $E_s/E_c = 66,6$  (1), 33,3 (2), 16,6 (3).

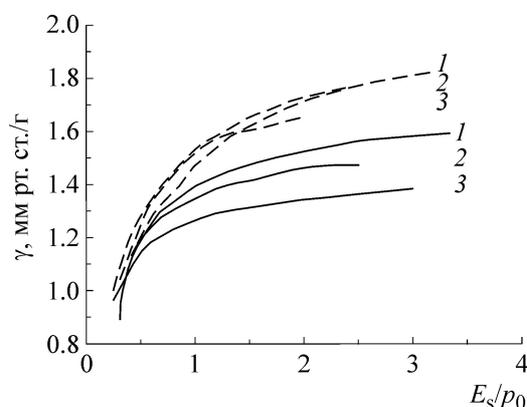


Рис. 5. Зависимости коэффициента эластоподъема  $\gamma$  от  $E_s/p_0$  (МПа/мм рт. ст.) при  $E_c = 0,3$  (сплошная) и 0,6 (пунктир) МПа;  $p_0 = 12$  (1), 16 (2), 20 (3) мм рт. ст.

$p_t a^2/G$ , содержащий дополнительную зависимость от давления. Это обстоятельство делает замену  $p_0$  на  $p_t$  практически не целесообразной.

«Истинное давление», рассчитанное по стандартной методике обработки данных тонометра Шиотца, дает лишь грубую оценку внутриглазного давления, игнорирующую индивидуальные упругие свойства глазного яблока [10]. Эта величина, как и более корректная механически характеристика, рассчитываемая в рамках нашей модели по средним значениям упругих констант, может быть использована для получения первоначальной очень грубой оценки  $p_0$ , но оценка возникающей при этом ошибки нуждается в специальном исследовании.

Жесткости  $E_s$  и  $E_c$  традиционно измеряются в МПа, а внутриглазное давление в мм рт. ст. Унификация единиц (например, при переводе

их в систему СИ) привела бы читателя, привыкшего к таким единицам, к потере наглядности. Кроме того, значения отношений жесткостей к давлениям при нормальных условиях окажутся на несколько порядков больше единицы. Поэтому сохраним далее различие единиц, что приведет к масштабированию названных безразмерных отношений жесткостей к давлениям, которые, таким образом, приобретут «размерность» МПа/мм рт. ст.

На рис. 4а величина  $\gamma$  представлена как функция одного из возможных безразмерных параметров – отношения склеральной жесткости к истинному давлению при разных отношениях к нему жесткости роговицы на основании расчетов, в которых не подлежащие варьированию величины были фиксированы. Поскольку отбрасывание аргументов в зависимости (5), позволившее перейти к функции (6), не было точным, точки одного семейства не ложатся на единую кривую, а образуют довольно узкое облако, которое может быть приближенно заменено одной линией (в наших расчетах методом аппроксимации ортогональными полиномами) – кривые 1–3. На рис. 4б представлены результаты аналогичного приближения в случае иного выбора безразмерных параметров – для зависимости  $\gamma(p_0/E_c)$  при различных значениях отношения  $E_s/E_c$ . Построенные линии в этом случае оказались близки к прямым.

Любопытные выводы получаются, если рассмотреть коэффициент эластоподъема  $\gamma$  как функцию безразмерного параметра  $E_s/p_0$  и двух размерных параметров  $E_c$  и  $p_0$ . Результаты расчетов приведены на рис. 5.

При нормальных внутриглазных давлениях (15–20 мм рт. ст.) и среднем значении скле-

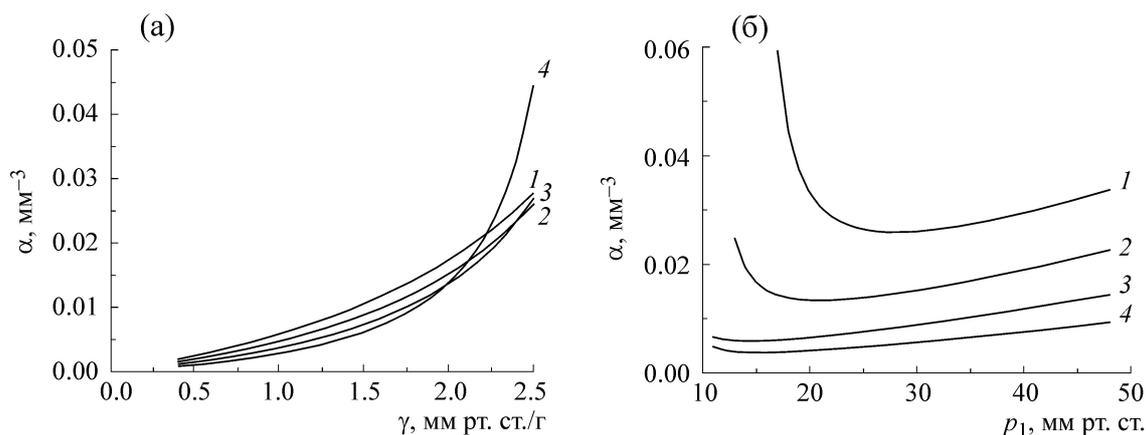


Рис. 6. Рассчитанные по формуле (7) зависимости  $\alpha(\gamma)$  при  $p_1 = 36$  (1), 30 (2), 24 (3), 18 (4) мм рт. ст. (а) и  $\alpha(p_1)$  при  $\gamma = 2,5$  (1), 2 (2), 1,5 (3), 1 (4) мм рт. ст./г (б).

ральной жесткости 10 МПа безразмерный параметр  $E_s/p_0$  имеет значения порядка 0,5. Видно, что в области, где  $E_s/p_0$  порядка и меньше этого значения, коэффициент эластоподъема  $\gamma$  очень быстро нарастает с возрастанием этого параметра, причем все кривые идут достаточно близко одна к другой, так что  $E_s/p_0$  можно грубо оценить по  $\gamma$ . Существенное расхождение кривых начинается при  $E_s/p_0 \sim 0,5$  и  $\gamma \sim 1,2$ . Здесь поведение кривых сильно различается в зависимости от жесткости роговицы. При среднем значении роговичной жесткости 0,3 МПа наблюдается сильная зависимость от  $p_0$  как отдельной от безразмерного комплекса  $E_s/p_0$  переменной: с возрастанием истинного давления  $\gamma$  заметно падает, однако при низких давлениях  $p_0 \sim 10$  мм рт. ст. зависимость от давления становится незаметной. Коэффициент  $\gamma$  возрастает с ростом роговичной жесткости. Зависимость от давления  $p_0$  становится несущественной и при высокой жесткости роговицы. Оба вышеупомянутых случая слабой зависимости от  $p_0$  соответствуют повышенному значению безразмерного комплекса  $E_s/p_0$  (пониженное  $p_0$  или повышенное  $E_s$ ).

#### СОПОСТАВЛЕНИЕ СО СТАНДАРТНОЙ МЕТОДИКОЙ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ТОНОМЕТРИИ

Обсуждение правомерности представлений, на основе которых разработана стандартная методика обработки данных дифференциальной тонометрии при клиническом обследовании, не входит в задачу настоящей работы. Поэтому ограничимся только сопоставлением коэффициента эластоподъема и ригидности (по Фриденвальду).

Ригидность определяется по следующей формуле, связывающей два измерения тонометрического давления  $p_1$  и  $p_2$  при разных весах плунжера:

$$p_2/p_1 = 10^{\alpha(V_{d2} - V_{d1})}, \quad (7)$$

где  $\alpha$  – ригидность, а  $V_{d1}$  и  $V_{d2}$  – так называемые смещенные объемы, определяемые известным образом по эмпирическим формулам [1] при известных весе плунжера и соответствующем ему тонометрическом давлении ( $p_1$  или  $p_2$  соответственно).

Несложно, воспользовавшись только (7) и формулами для определения смещенных объемов [1,10], установить связь  $\alpha$  с коэффициентом эластоподъема, рассчитанным по формуле  $\gamma = (p_2 - p_1)/(G_2 - G_1)$ . На рис. 6 приведены зависимости  $\alpha(\gamma)$  для грузов  $G_1 = 5,5$  и  $G_2 = 7,5$  г при разных значениях давления  $p_1$ , соответствующего более легкому грузу (а), и зависимость  $\alpha(p_1)$  при разных значениях  $\gamma$  (б).

Из рис. 6 видно, что ригидность возрастает с  $\gamma$  неравномерно: зависимость  $\alpha(\gamma)$  тем круче, чем выше давление, однако  $\alpha$  начинает интенсивно возрастать при низких давлениях, причем начало этого возрастания имеет место при давлениях тем выше, чем больше значение  $\gamma$ . Значения параметров, при которых это имеет место (тонометрического давления в интервале 20–30 мм рт. ст. и  $\gamma = 2–2,5$  мм рт. ст./г) достаточно часто реализуются при клинических измерениях (особенно у больных глаукомой).

Очевидно, что считать ригидность по Фриденвальду характеристикой жесткости системы нельзя. Возрастание  $\alpha$  с давлением при фиксированном  $\gamma$  еще может быть при желании ис-

толковано как качественное указание на увеличение некоторой условной жесткости системы, отношение которой к внутриглазному давлению в соответствии с рассмотренным выше анализом размерностей должно остаться приблизительно неизменным. Однако участок убывания функции  $\alpha(p_1)$  никак не может быть соотнесен с правдоподобным изменением жесткости, да и физический смысл ригидности  $\alpha$  определить затруднительно. С другой стороны, коэффициент эластоподъема, хотя и содержит зависимость от давления, имеет отчетливый механический смысл, что позволяет корректно использовать его для оценки состояния глаза.

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Непосредственно определяемый при дифференциальной тонометрии коэффициент эластоподъема имеет ясный физический смысл и может быть использован при расчетах реальных характеристик механического состояния индивидуального глаза. Однако исследование показало, что этот параметр отражает как упругие свойства глазной оболочки, так и давление в ней, и поэтому только по его значению упругость глаза оценить нельзя. Вместе с тем коэффициент эластоподъема может служить самостоятельным диагностическим параметром. Клинические исследования позволили сделать предварительный вывод, что величина этого коэффициента коррелирует с уровнем развития первичной открытоугольной глаукомы, причем заметно лучше, чем ригидность по Фриденвальду [13].

Коэффициент эластоподъема возрастает с ростом как склеральной, так и роговичной жесткостей. Хотя эта величина, строго говоря, характеризует жесткость глаза только в самом измерительном эксперименте, она в известной мере отслеживает повышенную или пониженную жесткость глазных структур. Однако (и это главный практический вывод из проведенного рассмотрения) разность показаний тонометра при разных весах зависит от упругих свойств глазного яблока только через их соотношение с истинным давлением. Одно и то же значение эластоподъема может означать при высоком внутриглазном давлении повышенную жесткость системы, а при низком соответствовать нормальной жесткости. При составлении групп испытуемых в клинических исследованиях, направленных на оценку связи упругих свойств глазного яблока с характером заболевания, следует оценивать наряду с коэффициентом эластоподъема истинное внутриглазное

давление и соответствующим образом формировать группы.

Для расчета трех параметров, определяющих в рамках модели упругие свойства и механическое состояние глазного яблока, необходимы три независимых измерения. Ввиду практической линейности зависимости тонометрического давления от веса плунжера увеличение числа измерений посредством нагружения тем же тонометром с разными весами груза не приводит к получению независимых данных. Поэтому раздельно оценить внутриглазное давление, а также роговичную и склеральную жесткости на основании только дифференциальной тонометрии по Шиотцу невозможно. Впрочем, это справедливо и для других исследованных нами статических тонометров: чтобы получить полную информацию о механическом состоянии глаза, необходимо два тонометра, различно деформирующих роговицу [8,9]. В известном смысле недостатком тонометра Шиотца оказывается существенная зависимость коэффициента эластоподъема от обоих упругих параметров. В отличие от чисто импрессионных тонометров (стержень, выпуклый штамп) [8,9] не удается с помощью дифференциальной тонометрии оценить отдельно одну из жесткостей – склеральную. Это связано с более сложным характером нагружения: в тонометре Шиотца кроме стержня присутствует еще вогнутый штамп – стопа.

Надежное определение истинного внутриглазного давления и параметров, характеризующих роговичную и склеральную жесткости, возможно при использовании наряду с тонометрическими давлениями, измеренными тонометром Шиотца при двух весах плунжера, дополнительного измерения другим тонометром.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. J. S. Friedenwald, Am. J. Ophthalmol. **20** (10), 985 (1937).
2. J. S. Friedenwald, *Standardization of Tonometers: Decennial Report by the Committee on Standardization of Tonometers* (Am. Acad. Ophthalmol. Otolaryngol., 1954).
3. R. A. Moses, Trans. Am. Ophthalmol. Soc. **69**, 494 (1971).
4. I. G. Pallikaris, G. D. Kymionis, H. S. Ginis, et al., Invest. Ophthalmol. Vis. Sci. **46** (2), 409 (2005).
5. Е. Н. Иомдина, Н. Ю. Данилов, Н. А. Игнатъева и др., Вестн. офтальмологии, № 6, 10 (2011).
6. И. Н. Моисеева и А. А. Штейн, Изв. РАН. Механика жидкостей и газов, № 5, 3 (2011).
7. С. М. Бауэр, Г. А. Любимов и П. Е. Товстик, Изв. РАН. Механика жидкостей и газов, № 1, 24 (2005).

8. И. Н. Моисеева и А. А. Штейн, Изв. РАН. Механика жидкостей и газов, № 4, 3 (2013).
9. Г. А. Любимов, И. Н. Моисеева и А. А. Штейн, Изв. РАН. Механика жидкостей и газов, № 6, 5 (2014).
10. И. Н. Моисеева и А. А. Штейн, Росс. журн. биомех. **19** (3), 243 (2015).
11. А. А. Штейн, Изв. РАН. Механика жидкостей и газов, № 2, 12 (2010).
12. Г. А. Любимов, Изв. РАН. Механика жидкостей и газов, № 2, 3 (2010).
13. Е. Н. Иомдина, Г. А. Любимов, И. Н. Моисеева и др., в Сб. трудов научно-практической конференции с международным участием «VIII Российский общенациональный офтальмологический форум», под ред. В. В. Нероева («Апрель», Москва, 2015), т. 2, сс. 678–687.

## **Estimating the Elastic Properties of the Eye from Differential Tonometry by the Schiøtz Tonometer: Analysis of the Measurement Procedure on the Basis of a Two-Component Model**

**I.N. Moiseeva, A.A. Stein, and G.A. Lyubimov**

*Institute of Mechanics, Lomonosov Moscow State University, Michurinskii prosp. 1, Moscow, 117899 Russia*

The procedure of differential tonometry using the Schiøtz tonometer is modeled within the framework of the two-component model of the eyeball with the cornea represented by a momentless deformable, linearly elastic surface and the sclera region by an elastic element that responds to changes in intraocular pressure by changes in volume. As a result of numerical calculations it is shown that the dependence of intraocular pressure on the weight of the cornea-deforming rod (the plunger) is almost linear. This makes it possible to consider the inclination of the corresponding straight line (pressure difference coefficient) as a characteristic of the eye examined. The dependence of this quantity on the elastic characteristics of the eye and the pressure in the unloaded eye is investigated. Analysis based on the dimensional theory and confirmed by calculations makes it possible to conclude that in the first approximation the pressure difference coefficient depends on the elastic constants through their ratios to the intraocular pressure. Comparison with the standard method of processing the data of differential tonometry is made.

*Key words: eye, elastic properties, differential tonometry, Schiøtz tonometer, mathematical modeling*