

МОДИФИЦИРОВАННАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ АНАТОМИИ ЛЕВОГО ЖЕЛУДОЧКА СЕРДЦА

© 2016 г. А.А. Кошелев* **, А.Е. Бажутина*, С.Ф. Правдин* **,
К.С. Ушенин* ** ***, Л.Б. Кацнельсон* ***, О.Э. Соловьева* ** ***

*Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина,
620002, Екатеринбург, ул. Мира, 19;

**Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН,
620990, Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16;

***Институт иммунологии и физиологии УрО РАН, 620041, Екатеринбург, ул. Первомайская, 106
E-mail: anton.koshelev@urfu.ru

Поступила в редакцию 14.06.16 г.

Представлена модификация математической модели формы и поля направлений мышечных волокон в левом желудочке сердца, разработанной на основе идеи о вложенных спиральных поверхностях. Желудочек в модели формируется из поверхностей, представляющих мышечные слои. Каждый слой заполнен кривыми, моделирующими мышечные волокна. Касательные к этим кривым формируют поле направлений волокон. С левым желудочком связывается модифицированная сферическая система координат, в которой границы желудочка являются координатными поверхностями. Персонификация модели производится подбором параметров по данным эхокардиографии, компьютерной томографии или магниторезонансной томографии сердца. Для этого изображения эхокардиографии в четырехкамерной и двухкамерной позициях или сечения вдоль длинной оси левого желудочка данных томограмм в нескольких позициях приближаются модельным профилем. После этого с использованием периодической кубической интерполяции параметров модели по углу поворота строится трехмерное тело и рассчитывается векторное поле касательных к модельным волокнам. Проведена верификация модели левого желудочка по данным диффузионно-тензорной магниторезонансной томографии сердца человека.

Ключевые слова: левый желудочек, архитектура миокарда, поле направления мышечных волокон, математическая анатомия, аналитическая модель сердца.

В настоящее время компьютерное моделирование биологических и химических процессов стало одним из эффективных инструментов медицинской науки и практики. В рамках глобальных международных проектов Physiome [1] и Virtual Physiological Human [2] разрабатываются компьютерные модели различных тканей, органов и физиологических систем человека и животных.

Сердечно-сосудистые заболевания являются одной из основных причин смертности во всем мире. Математические модели сердца и созданные на их основе программные комплексы широко используются для выяснения патогенеза заболеваний и разработки методов ранней диагностики, эффективных профилактики и лече-

ния. Исследования и разработки в этой области являются социально значимыми и одними из приоритетных направлений компьютерной медицины. Прогресс в области компьютерной техники позволяет проводить моделирование физиологических функций целых органов, в том числе целого сердца [3,4]. Основными объектами моделирования сердца являются его электрическая и механическая функции, которые обеспечивают сокращение мышцы сердца и выброс крови в кровеносную систему. Они тесно взаимосвязаны между собой и обе зависят от геометрии и архитектуры стенки миокарда. Левый желудочек (ЛЖ), являясь наиболее мощной камерой сердца, выталкивает под большим давлением кровь в аорту, откуда она поступает ко всем органам и тканям организма.

В настоящее время на базе усредненных моделей ЛЖ (например, в виде усеченного эл-

Сокращения: ЛЖ – левый желудочек, ДТ-МРТ – диффузионно-тензорная магниторезонансная томография.

липсоида [5]) активно развивается персонифицированное компьютерное моделирование, при котором учитываются индивидуальные особенности структуры и функции органа конкретного человека или животного. Такое моделирование особенно важно с точки зрения клинической практики, поскольку форма желудочка и направление мышечных волокон существенно влияют на распространение и электрического сигнала в миокарде (см., например, [6]), и в особенности на его механическую активность.

Для компьютерного моделирования электрической и сократительной функций миокарда ЛЖ нужно создать его трехмерную анатомическую модель и задать в ней направление анизотропии, т.е. указать направление волокна в каждой точке миокардиальной среды. Существует несколько методов создания персонифицированных анатомических моделей. Наиболее прямую и детализированную информацию об архитектонике стенки ЛЖ дает метод диффузионного тензора магнито-резонансной томографии (ДТ-МРТ), который позволяет визуализировать и оцифровать информацию о направлении волокон в стенке [7–9]. Однако такое сканирование остается дорогой и трудоемкой операцией, особенно затруднительно получить данные *in vivo*. Другой подход заключается в создании статистического атласа. Он позволяет переносить карту направлений волокон миокарда, полученную по данным ДТ-МРТ одного сердца, на геометрию другого сердца, полученную более доступными средствами [10–12]. Наиболее распространенным в последнее время является метод локального задания трансмурального вращения волокон миокарда в силу некоторого математического правила [13–17]. В данной работе мы совершенствуем оригинальный подход, основанный на разработанном ранее аналитическом методе построения математической модели формы и глобального задания направлений волокон в стенке ЛЖ [18,19]. Предложенный метод позволяет построить анатомическую модель ЛЖ, достаточно хорошо приближающую реальный объект даже при малом объеме исходных данных или их недостаточном высоком качестве.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЛЕВОГО ЖЕЛУДОЧКА СЕРДЦА

Представленная модель является модификацией аналитической модели анатомии ЛЖ [18,19]. В исходной модели волокна оканчиваются упираясь в плоскость базы, чего не наблюдается в реальном сердце. В ряде случаев

хорошего приближения геометрической формы не хватает для хорошего приближения поля направлений из-за того, что кривые моделирующие волокна задаются фиксированным способом, а именно как образы хорд полукруга [19]. Для устранения указанных выше и еще ряда технических проблем в представленной модели модифицированы область основания и верхушки ЛЖ. В модели ЛЖ представляет собой тело вращения, состоящее из сопряженных друг с другом верхней базальной части и нижней срединно-апикальной. Место соединения этих частей ЛЖ далее будем называть экватором ЛЖ. Каждая часть тела заполнена поверхностями вращения, образующими мышечные слои миокарда, каждый из которых заполнен некоторыми кривыми – мышечными волокнами. Касательные к этим кривым задают поле направлений мышечных волокон, определяющее анизотропию миокардиальной ткани и преимущественные пути проведения электрического и механического сигналов в миокардиальной среде.

Срединно-апикальная часть ЛЖ строится аналогично исходной модели. Одно из основных изменений модели – добавление базальной части, в которой волокна вращаются вокруг оси ЛЖ в противоположном направлении, по сравнению со срединно-апикальной частью. Данное изменение позволило получить картину глобального расположения мышечных волокон, качественно повторяющую результаты гистологических исследований Стритера [20]. В отличие от предыдущей модели в новой версии модели каждое отдельное волокно начинается на экваторе, спускается к верхушке, закручиваясь вокруг вертикальной оси, возвращается на экватор, пересекает его, поднимается к основанию, делая оборот вокруг оси в противоположном направлении, и возвращается обратно в исходную точку на экваторе (рис. 1).

Для задания формы ЛЖ используется модифицированная сферическая система координат (γ, ψ, ϕ) с вертикальной осью, проходящей от верхушки ЛЖ через середину основания. Координаты системы имеют следующий смысл: координата $\gamma \in [0, 1]$ определяет положение точки в толще стенки ЛЖ, где $\gamma = 0$ соответствует поверхности эпикарда, $\gamma = 1$ – поверхности эндокарда. Координата $\psi \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ – это обобщенная широта. Общепринятой широтой (углом между экватором и радиус-вектором точки) ψ является, когда ρ линейно зависит от ψ при

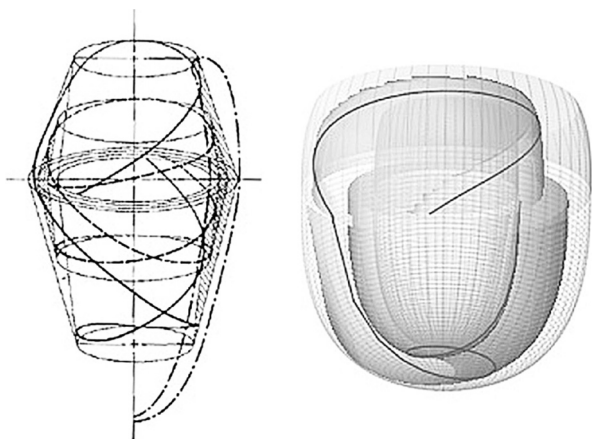


Рис. 1. Совпадение качественного поведения мышечных волокон по данным Д. Стритера ([20], рис. 11г) – слева и модели – справа. В срединно-апикальной части волокна спускаются от экватора к верхушке и поднимаются обратно на экватор, наиболее длинные волокна делают оборот порядка 3π вокруг оси ЛЖ, переходя от субэпикарда к субэндокарду. В базальной части наблюдается аналогичная ситуация, с противоположным направлением вращения волокна вокруг оси ЛЖ. Волокна пересекают экватор непрерывно.

переходе от специальных координат к цилиндрическим. Координата φ – угол поворота вокруг оси ЛЖ (долгота). Экватор имеет уравнение $\psi = 0$; значение $\psi = -\frac{\pi}{2}$ соответствует верхушке ЛЖ, $\psi = \frac{\pi}{2}$ – основанию. В каждом продольном сечении ($\varphi = \text{const}$) профиль модели ЛЖ определяется следующими параметрами:

$$\rho(\gamma, \psi, \varphi) = \begin{cases} R_e(\gamma, \varphi) \left(1 - \left(\frac{\psi}{\pi/2} \right)^{p_b(\gamma, \varphi)} \right) + R_b(\gamma, \varphi) \left(\frac{\psi}{\pi/2} \right), & 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}; \\ R_a(\gamma, \varphi) - (R_a(\gamma, \varphi) - R_e(\gamma, \varphi)) \left(1 - \frac{\psi}{l(\gamma, \varphi)} \right)^{p_e(\gamma, \varphi)}, & -l(\gamma, \varphi) \leq \psi \leq 0; \\ R_a(\gamma, \varphi) \left(1 - \left(\frac{-l(\gamma, \varphi) - \psi}{\pi/2 - l(\gamma, \varphi)} \right)^{p_a(\gamma, \varphi)} \right), & -\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq -l(\gamma, \varphi); \end{cases}$$

$$z(\gamma, \psi, \varphi) = \begin{cases} Z_b(\gamma, \varphi) \sin(\psi) + Z_a(\gamma, \varphi), & 0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}; \\ (Z_a(\gamma, \varphi) - h\gamma) \sin(\psi) + Z_a(\gamma, \varphi), & -\frac{\pi}{2} \leq \psi \leq 0. \end{cases}$$

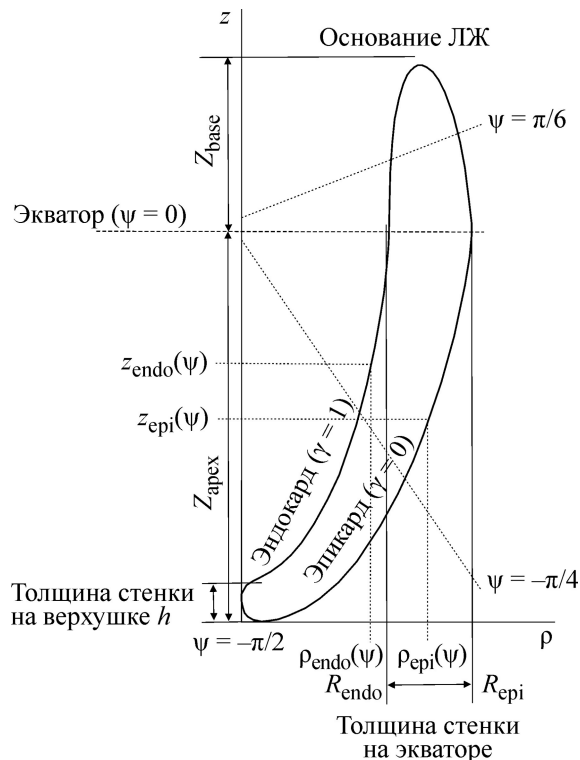


Рис. 2. Меридиональное сечение модели при фиксированном угле $\varphi = \text{const}$.

радиусом на экваторе и степенью выпуклости поверхностей эпи- и эндокарда ЛЖ, высотами срединно-апикальной и базальной частей (рис. 2). Толщина ЛЖ на верхушке h является константой. Формулы перехода от специальных координат к цилиндрическим (ρ, φ, z) следующие:

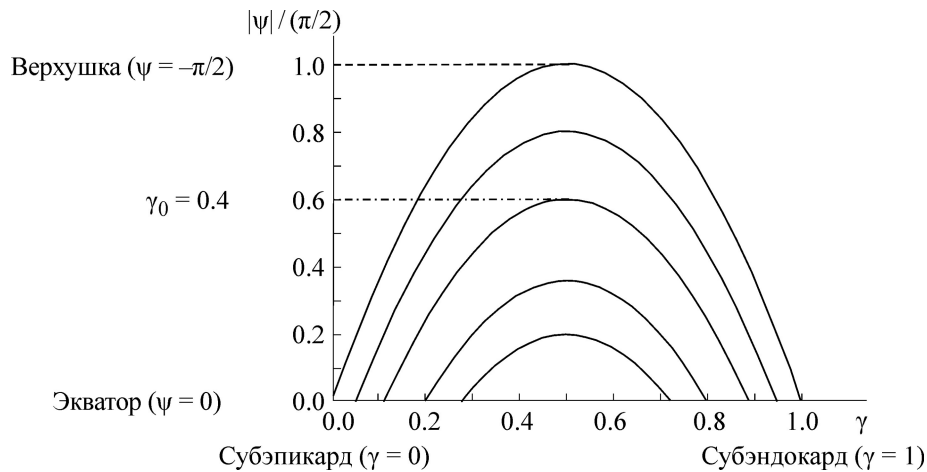


Рис. 3. Семейство кривых в координатах $(\gamma, |\psi|/(\pi/2))$, задающее мышечные волокна на спиральной поверхности. Параметр γ_0 определяет, насколько волокно проходит глубоко в стенке миокарда и далеко от верхушки или основания ЛЖ.

Спиральные поверхности, заполняющие базальную и срединно-апикальную части, закручиваются в противоположных направлениях на углы φ_i^{\max} , $i = 1$ в срединно-апикальной части, $i = 2$ в базальной части (см. рис. 1, справа). Кроме этого, спиральные поверхности отличаются значением координаты $\varphi = \varphi_0$, $\varphi_0 \in [0, 2\pi]$, при котором поверхность касается эпикарда ЛЖ. Уравнение спиральной поверхности в специальных координатах выглядит следующим образом:

$$\varphi_{sp}(\gamma, \varphi_0) = \varphi_0 + \gamma \varphi_{\max}^i.$$

Уравнение спиральной поверхности в цилиндрических координатах имеет следующий вид:

$$\rho_{sp}(\gamma, \psi, \varphi_0) = \rho(\gamma, \psi, \varphi_{sp}(\gamma, \varphi_0)),$$

$$z_{sp}(\gamma, \psi, \varphi_0) = z(\gamma, \psi, \varphi_{sp}(\gamma, \varphi_0)),$$

Волокна миокарда в модели, аналогично работам [18,19], задаются кривыми, которые полностью заполняют каждую спиральную поверхность. Каждая кривая в семействе начинается и заканчивается на экваторе ($\psi = 0$). Спиральная поверхность ограничена двумя кривыми – спиралью, лежащей на экваторе, и самой длинной кривой в семействе, которая начинается на субэпикарде и заканчивается на субэндокарде. В специальных координатах уравнение волокна имеет вид:

$$\psi_f(\gamma, \gamma_0) = (-1)^i \frac{\pi}{2} \left(1 - 2^{s_i} \left| \gamma - \frac{1}{2} \right|^{s_i} - \gamma_0 \right),$$

$$\gamma_0 \in [0, 1], \gamma \in \left[\frac{1}{2} - \frac{\sqrt[s_i]{1 - \gamma_0}}{2}, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt[s_i]{1 - \gamma_0}}{2} \right],$$

где $i = 1$ в срединно-апикальной части, $i = 2$ в базальной части. Степень s_i определяет угол, под которым волокно пересекает экватор, и насколько быстро волокно спускается от экватора к верхушке или поднимается к основанию ЛЖ (рис. 3). Параметр γ_0 определяет положение волокна в толще стенки. В срединно-апикальной части при $\gamma_0 = 0$ волокно начинается на экваторе, по субэпикарду спускается к верхушке, через верхушку выходит на субэндокард и поднимается обратно на экватор при (см. рис. 1, справа). Далее оно переходит в начинающееся на экваторе волокно в базальной части также при $\gamma_0 = 0$, по субэндокарду поднимается к основанию, через основание выходит на субэпикард и спускается обратно на экватор (см. рис. 1, справа), где переходит в волокно в срединно-апикальной части, с другим начальным углом φ_0 . При $\gamma_0 = 1$ волокно лежит на экваторе в середине стенки и направлено горизонтально. Остальные волокна при $\gamma_0 \in (0, 1)$ начинаются и заканчиваются на экваторе на соответствующем расстоянии от середины стенки и также гладко склеиваются в тонком экваториальном слое. Точки касания спиральной поверхности из срединно-апикальной части с поверхностью из базальной части являются точками перехода волокна через экватор, в которых непрерывно склеиваются соответствующие кривые (рис. 1, справа, область экватора). Уравнение кривой в цилиндрических координатах выглядит следующим образом:

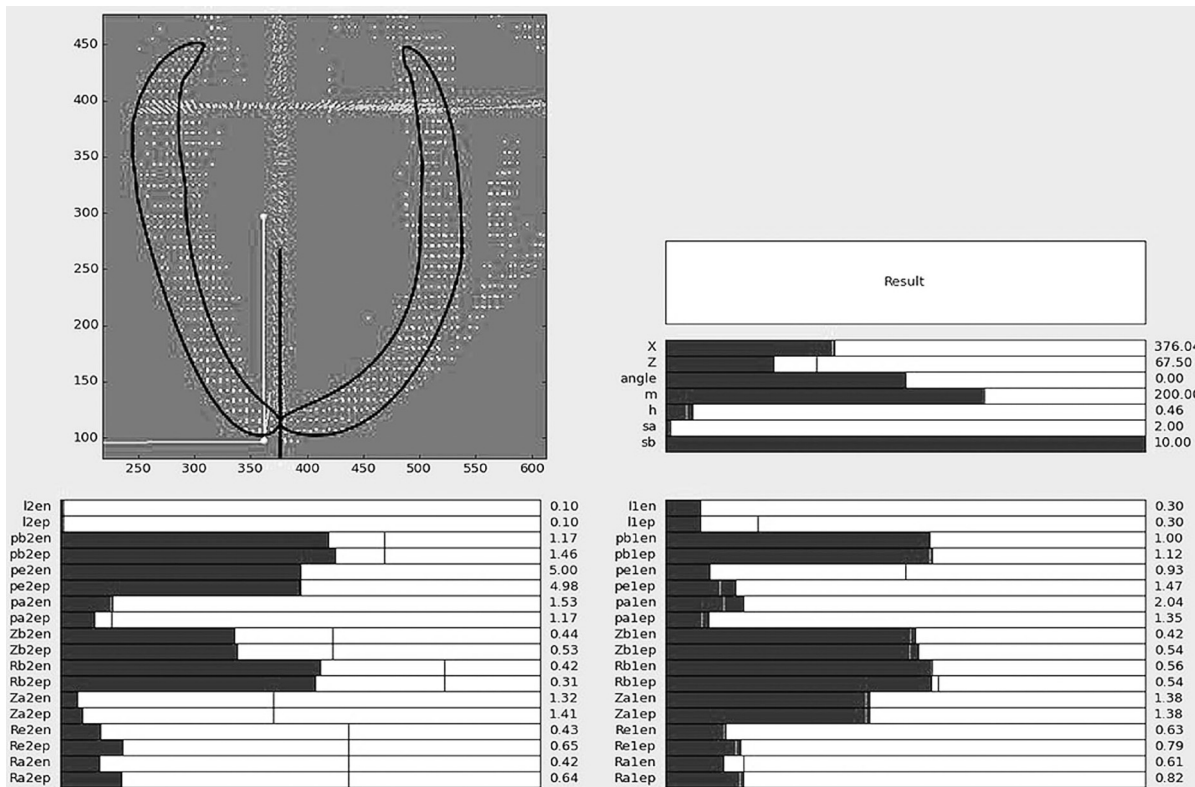


Рис. 4. Пример подбора значений параметров модели для приближения двумерного сечения данных профилями модели. Параметры справа сверху относятся к обоим профилям модели (слева и справа от оси) и имеют следующий смысл: $X, Z, angle$ определяют положение оси ЛЖ, относительно которой строятся профили при фиксированном угле $\varphi = const$; m – масштаб модели; h – толщина ЛЖ на верхушке; sa, sb – степени парабол, определяющих волокна в срединно-апикальной и базальной частях соответственно. Нижний блок параметров с индексом 1 определяет боковой профиль модели при $\varphi = \tilde{\varphi}$, с индексом 2 – боковой профиль при $\varphi = \tilde{\varphi} + 180^\circ$. Значение параметров с окончание «ep» определяют форму эпикарда, с окончанием «en» – эндокарда. Параметры имеют следующий смысл: Ra – радиус апикальной части; Re – радиус на экваторе; Rb – радиус основания; Za – высота срединно-апикальной части; Zb – высота базальной части; l – угол стыковки средней и апикальной частей по переменной ψ ; pa, pe, pb – степени, определяющие форму боковой поверхности апикальной, средней и базальной соответственно.

$$\rho_f(\gamma, \gamma_0, \Phi_0) = \rho(\gamma, \psi_f(\gamma, \gamma_0), \Phi_{sp}(\gamma, \Phi_0)),$$

$$z_f(\gamma, \gamma_0, \Phi_0) = z(\gamma, \psi_f(\gamma, \gamma_0), \Phi_{sp}(\gamma, \Phi_0))$$

Касательные к данным кривым задают поле направления волокон миокарда.

Персонафикация модели. Для персонафикации модели по клиническим данным визуализации сердца (эхокардиографии, компьютерной томографии или магниторезонансной томографии) мы приближаем сечения ЛЖ по длинной оси профилем модели при некотором фиксированном угле $\varphi = const$. От γ линейно зависят следующие параметры модели: радиусы основания $R_b(\gamma, \varphi)$, экватора $R_e(\gamma, \varphi)$ и области верхушки $R_a(\gamma, \varphi)$, высоты базальной $Z_b(\gamma, \varphi)$ и срединно-апикальной $Z_a(\gamma, \varphi)$ частей, степени, определяющие форму боковой поверхности ба-

зальной $p_b(\gamma, \varphi)$, средней $p_e(\gamma, \varphi)$ и апикальной $p_a(\gamma, \varphi)$ частей, угол стыковки средней и апикальной частей $l(\gamma, \varphi)$. По переменной φ , аналогично работе [19], проводится интерполяция значений параметров в меридиональных сечениях периодическими кубическими сплайнами.

В представленной модифицированной модели ось ЛЖ проходит от верхушки через середину основания, что соответствует общепринятому способу выделения оси ЛЖ, например, при оконтуривании данных эхокардиографии [21]. Еще одним положительным отличием от исходной модели является возможность управлять поведением волокон миокарда на слое. Данная степень свободы модели позволяет как получать более точное приближение поля направлений волокон, так и исследовать различные вариации расположения волокон при со-

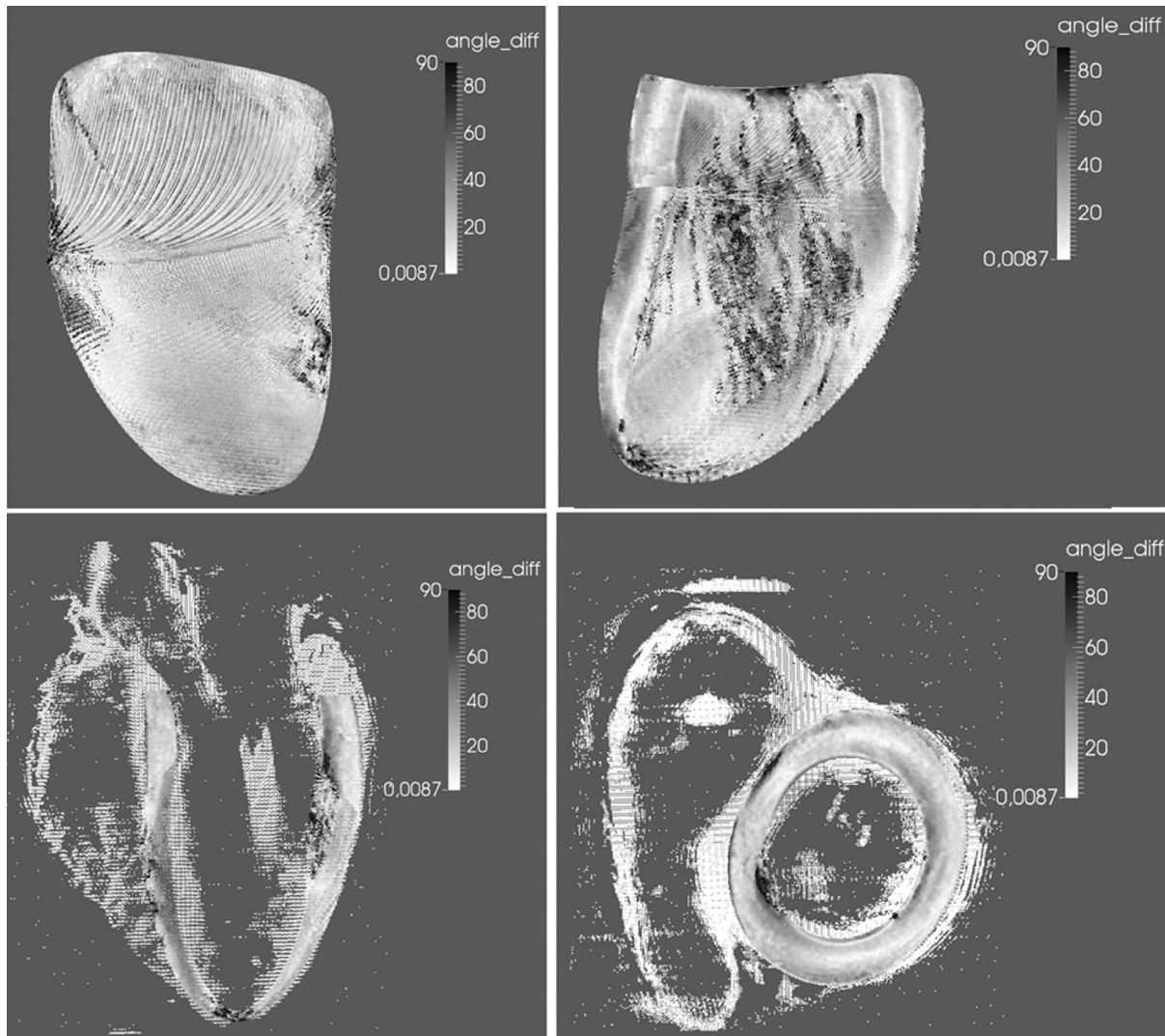


Рис. 5. Глобальная верификация направления мышечных волокон. Цветом показан угол между направлением мышечного волокна по данным ДТ-МРТ [21] и модели. Белый цвет соответствует углу 0° , черный – углу 90° .

хранении формы ЛЖ. При обработке достаточно большого количества данных ДТ-МРТ различных видов животных можно установить популяционные интервалы изменения параметров, определяющих поведение волокна на слое, и тем самым выделить особенности расположения волокон миокарда для каждого вида.

Нами разработан программный комплекс автоматизированного подбора параметров модели ЛЖ по двумерным данным медицинской визуализации сердца. В комплексе по изображениям эхокардиографии в четырехкамерной и двухкамерной проекциях, либо подготовленным двумерным сечениям трехмерных данных магниторезонансной томографии и компьютерной томографии вдоль длинной оси ЛЖ производится подбор параметров модели (рис. 4). На

двумерные данные накладываются контуры продольных сечений модели при угле поворота $\varphi = \tilde{\varphi}$ и $\varphi = \tilde{\varphi} + 180^\circ$ с некоторым начальным набором параметров модели. Далее оператор комплекса подбирает параметры модели, передвигая бегунки параметров так, чтобы контуры хорошо приближали данные. Оценка качества приближения проводится визуально на экране. Полученные таким образом наборы параметров модели при различных углах $\varphi = \tilde{\varphi}_j$, $j = 1 \dots n$ выгружаются в программу построения трехмерной формы и поля направлений волокон.

Верификация модели. Для верификации модели использовали данные ДТ-МРТ, представленные в открытом доступе на сайте Университета Джона Хопкинса (Балтимор, США) [22].

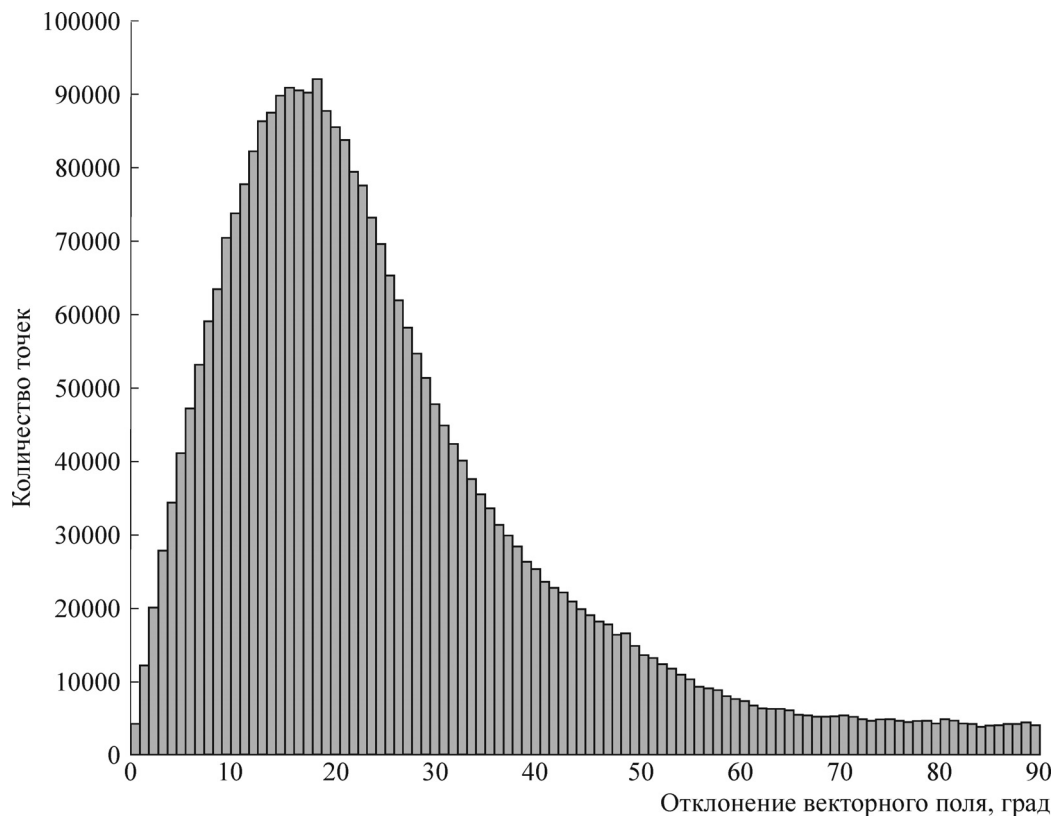


Рис. 6. Диаграмма распределения углов между направлениями волокон по данным ДТ-МРТ [21] и модели.

Для построения модели сначала выставляется ось ЛЖ, далее делается восемь вертикальных срезов вдоль выбранной оси. Параметры закрутки спиральных поверхностей выбраны следующие: $\varphi_1^{\max} = 3\pi$, $\varphi_2^{\max} = -2\pi$. Для функции, задающей волокна, выбраны степени $s_1 = 3$, $s_2 = 10$.

После автоматизированного подбора параметров модели для приближения полученных плоских сечений и интерполяции параметров проводится сравнение векторных полей направлений волокон миокарда. Глобальная верификация происходит следующим образом: для точек модели в толще стенки находится ближайшая точка в ДТ-МРТ; вычисляется угол между векторами направлений в этих точках (рис. 5); строится диаграмма распределения отклонения векторных полей (рис. 6). На представленной диаграмме распределения отклонения векторных полей максимум достигается около 17° . Математическое ожидание составляет $25,5^\circ$, среднеквадратичное отклонение составляет порядка 17° . Количество точек с большим углом отклонения, выходящим за интервал двойного среднеквадратичного отклонения, составляет 5,5% от общего количества точек. На

трехмерном изображении видно, что наибольшее отклонение между углами направлений волокон модели и данных ДТ-МРТ возникает в областях сочленения стенок левого и правого желудочка, крепления трабекул, на верхушке и основании. Это связано с тем, что задача точного обмера исходных данных ДТ-МРТ является сложной и зависит от навыков оператора программного комплекса. При автоматизированном подборе параметров особенно важно правильно определить верхушку ЛЖ, т.е. точку сингулярности, где нарушается регулярный ход волокон; отбросить трабекулярный аппарат ЛЖ; точно определить верхнюю границу ЛЖ, где крепится фиброзное кольцо и предсердие.

Представленная верификация моделирует ситуацию восстановления направлений мышечных волокон по данным эхокардиографии. Для этого делаются два продольных сечения данных ДТ-МРТ (рис. 7). Четырехкамерную проекцию дает сечение, проходящее через середину правого желудочка, двухкамерную – перпендикулярное первому (рис. 8). Представленные результаты показывают, что модель с успехом можно использовать для восстановления анизотропии при обработке данных эхокардиогра-

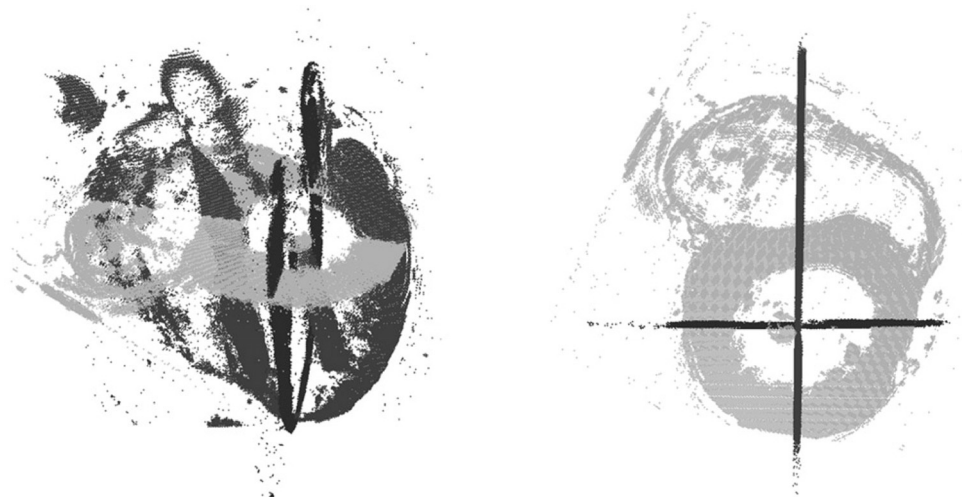


Рис. 7. Положение двумерных сечений из данных ДТ-МРТ [21].

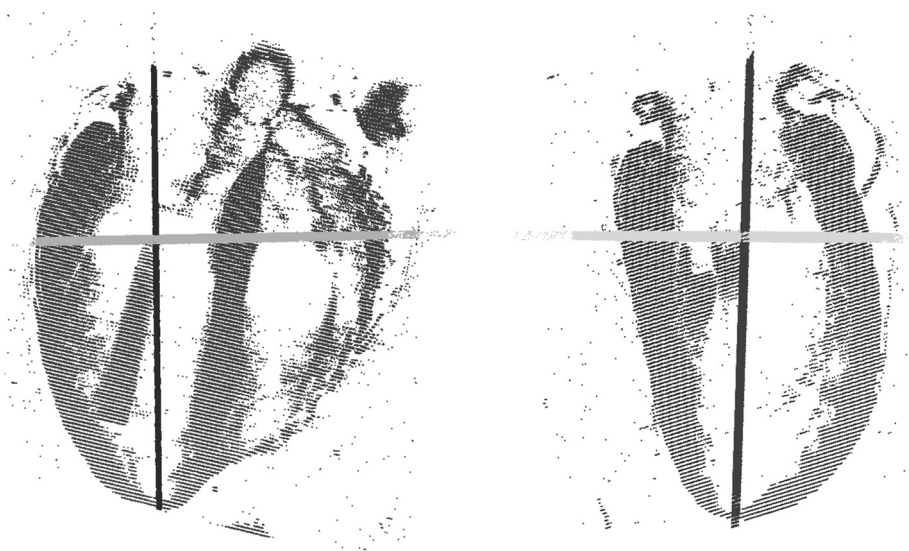


Рис. 8. Проекция сердца человека: четырехкамерная (слева), двухкамерная (справа).

фии ЛЖ, где доступны только две продольных позиции ЛЖ.

Авторы считают, что введение аппарата сплайнов в модель для приближения бокового профиля модели и построение функции, задающей ход мышечных волокон на каждом слое, должно значительно улучшить аппроксимационные свойства модели.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Представленная модель по набору геометрических параметров ЛЖ, полученных по данным медицинской визуализации сердца, формирует поверхности эпикарда и эндокарда ЛЖ в виде функций трех переменных. В геометри-

ческой области, ограниченной данными поверхностями, используя специализированные пакеты (например, представленный в работе [23]), можно построить конечно-элементную сетку и задать в каждом элементе анизотропию среды. Аналитическое описание формы ЛЖ позволяет построить криволинейную сетку для конечно-разностных методов расчета электрической функции, так что поверхности эпи- и эндокарда совпадают с координатными осями, что значительно упрощает задание краевых условий. Модель позволяет варьировать ход мышечных волокон в рамках заданной геометрической формы в широком диапазоне за счет выбора параметров φ_i^{\max} и s_i .

Модифицированная математическая модель дает хорошее приближение геометрической формы исходного объекта и поля направлений волокон миокарда даже при малом объеме исходных данных и/или их недостаточно высоком качестве. Например, только по двум изображениям ЛЖ, полученным методом эхокардиографии в двухкамерной и четырехкамерной проекциях, модель позволяет построить трехмерную геометрическую область и задать в ней направление волокон миокарда с достаточно высокой точностью.

Варьирование параметров модели, например радиуса эпикарда на экваторе, позволяет задавать общее или региональное утолщение стенки желудочка, а также изменение его формы, например, на более сферическую, что характерно для некоторых заболеваний сердца. Данная возможность позволит проводить расчеты, используя исходные персонифицированные данные и учитывая возможные патологические изменения формы желудочка.

Авторы испытывают глубокую признательность чл.-корр. РАН В.С. Мархасину за его наставничество и активное участие в разработке математической модели ЛЖ.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 14-35-00005).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. E. J. Crampin, M. Halstead, P. J. Hunter, et al., *Exp. Physiol.* **89** (1), 1 (2004).
2. P. Kohl and D. Noble, *Molec. Systems Biol.* **5** (1), 292, (2009).
3. R. L. Winslow, N. Trayanova, D. Geman, and M. I. Miller, *Sci. Transl. Med.* **4** (158), 158rv11 (2012).
4. P. J. Hunter, W. W. Li, A. D. McCulloch, and D. Noble, *Computer*, № 11, 48 (2006).
5. S. Goktepe and E. Kuhl, *Comput. Mechanics* **45** (2–3), 227 (2010).
6. S. F. Pravdin, H. Dierckx, L. B. Katsnelson, et al., *PLOS One* **9** (5), e93617 (2014).
7. V. Gurev, T. Lee, J. Constantino, et al., *Biomechanics and Modeling in Mechanobiology* **10** (3), 295 (2011).
8. P. A. Helm, H. J. Tseng, L. Younes, et al., *Magnetic Resonance in Medicine* **54** (4), 850 (2005).
9. V. Y. Wang, *Modelling in vivo cardiac mechanics using MRI and FEM*. PhD thesis (2012).
10. J. Aguado-Sierra, A. Krishnamurthy, C. Villongco, et al., *Progr. Biophys. Mol. Boil.* **107** (1), 147 (2011).
11. P. Helm, M. F. Beg, M. I. Miller, and R. L. Winslow, *Ann. N. Y. Acad. Sci.* **1047**, 296 (2005).
12. Y. Zhang, X. Liang, J. Ma, et al., *Medical Image Analysis* **16** (6), 1130 (2012).
13. J. D. Bayer, R. C. Blake, G. Plank, and N. A. Trayanova, *Ann. Biomed. Engineer.* **40** (10), 2243 (2012).
14. R. Beyar and S. Sideman, *Circ. Res.* **55** (3), 358 (1984).
15. M. J. Bishop, G. Plank, R. A. B. Burton, et al., *Am. J. Physiol. – Heart and Circ. Physiol.* **298** (2), H699 (2010).
16. R. Hren, *A realistic model of the human ventricular myocardium: application to the study of ectopic activation* (1996).
17. G. Seemann, *Modeling of electrophysiology and tension development in the human heart* (Universitätsverlag, Karlsruhe, 2005).
18. S. F. Pravdin, V. I. Berdyshev, A. V. Panfilov, et al., *Biomed. Engineer. Online* **54** (12), 21 (2013).
19. S. Pravdin, *Rus. J. Biomechan.* **17** (4), 75–94 (2013).
20. D. D. Streeter, in *Handbook of Physiology* (Am. Physiol. Soc., Bethesda, Maryland, USA, 1979), V. **1** (2), pp. 61–112.
21. X. Фейгенбаум, *Эхокардиография* (Видар, М., 1999).
22. DT-MRI dataset of a human heart http://gforge.icm.jhu.edu/gf/project/dtmri_data_sets/docman/?subdir=93.
23. C. Geuzaine and J. F. Remacle, *Int. J. Numeric. Methods Engineer.* **79** (11), 1309 (2009).

A Modified Mathematical Model of the Cardiac Left Ventricular Anatomy

A.A. Koshelev* **, A.E. Bazhutina*, S.F. Pravdin* **, K.S. Ushenin* ** *,
L.B. Katsnelson* ***, and O.E. Solovyova* ** *****

**Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin,
ul. Mira 19, Yekaterinburg, 620002 Russia*

***Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
ul. Sof'i Kovalevskoi 16, Yekaterinburg, 620990 Russia*

****Institute of Immunology and Physiology, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences,
ul. Pervomaiskaya 106, Yekaterinburg, 620041 Russia*

A modification of the mathematical model of the shape and fibre direction field of the cardiac left ventricle is presented. The model was developed based on the idea of nested spiral surfaces. The ventricle is composed of surfaces which model myocardial layers. Each layer is filled with curves corresponding to myocardial fibers. The tangents to these curves form the myofibre direction field. With the model left ventricle, a modified spherical-like coordinate system is linked where ventricular boundaries are coordinate surfaces. The model is personified based on echocardiographic, computed tomography or magnetic resonance imaging data. For that, four-chamber and two-chamber echocardiography views or sections along the long axis of the left ventricle from the said tomographic data in several positions are approximated with model profile. To construct a 3-D model, we then interpolate model parameters by periodic cubic splines and the vector field of the tangents to the model fibres is calculated. For the model verification, we used diffusion-tensor magnetic resonance imaging data of the human heart.

Key words: left ventricle, miocardial architectonics, myofibre direction field, mathematical anatomy, analytical model of the heart