

ИССЛЕДОВАНИЕ КЛАССА ОДНОМЕРНЫХ УНИМОДАЛЬНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ, ПОЛУЧЕННОГО ПРИ МОДЕЛИРОВАНИИ ПОПУЛЯЦИИ ЛЕММИНГОВ

© 2018 г. Г.К. Каменев*, Д.А. Саранча*, В.О. Поляновский**

*Вычислительный центр им. А.А. Дородницына ФИЦ «Информатика и управление» РАН,
119333, Москва, ул. Вавилова, 40

E-mail: gkk@ccas.ru, saran@ccas.ru

**Институт молекулярной биологии им. В.А. Энгельгардта РАН, 119911, Москва, ул. Вавилова, 32

E-mail: polyanovskyvo@yandex.ru

Поступила в редакцию 07.05.18 г.

Проведен анализ модели, описывающей резкие периодические изменения численности популяции леммингов в зависимости от физических характеристик экологически значимых параметров среды обитания. Ранее в результате моделирования динамики численности животных тундровых популяций был обоснован новый класс одномерных унимодальных отображений отрезка в себя. При изучении этого класса отображений основное внимание уделяется исследованию зависимости от вариации параметров устойчивости траекторий, а также их бифуркационных и асимптотических свойств. Для численного анализа отображений применяются методы аппроксимации неявно заданных множеств: построены трубки траекторий, аттракторы и бифуркационные диаграммы. Для данного класса отображений приведен пример построения бифуркационной диаграммы вдоль контура в пространстве параметров, что дает возможность рассмотреть зависимость поведения траекторий от изменения параметров моделирующего отображения. Таким образом, применение отображения рассматриваемого типа для модельного описания популяции леммингов позволило провести исследование влияния долговременных биосферных ритмов, включающих временные периоды с экстремальными условиями жизни. Показано, что такие воздействия не приводят к вырождению популяции: возникающие периоды с хаотической динамикой в экстремальных условиях сменяются вполне упорядоченным поведением со структурами в виде популяционных циклов малого периода.

Ключевые слова: биосферные ритмы, дискретное отображение, аттракторы, методы аппроксимации неявно заданных множеств, трубки траекторий, бифуркационные диаграммы.

DOI: 10.1134/S0006302918040130

ОБОСНОВАНИЕ И ПОСТРОЕНИЕ МОДЕЛИ

Несмотря на более чем вековую историю использования математических методов, в экологической области фактически отсутствуют базовые универсальные уравнения для описания природных объектов, что во многом обусловлено тем, что моделирование происходит при неизбежно неполных данных. В данной работе рассматривается задача формирования, обоснования и проверки гипотез о ведущих механизмах изучаемых экологических явлений с помощью методов математического моделирования. В центре исследований классическая, начиная с работ А. Лотки и В. Вольтерра [1,2], задача

математической экологии – описание динамики численности животных. Только с помощью методов математического моделирования удается связать в единую картину действие многочисленных взаимосвязанных, довольно разнообразных факторов, формирующих динамику численности животных [3]. Ограниченные возможности аналитических (докомпьютерных) методов [4–8] приводили к необходимости делать значительные упрощения.

Появление вычислительной техники позволило Дж. Форрестеру [9] предложить «системную динамику», методы имитационного моделирования, использовать для исследования моделей вычислительные эксперименты, что позволяет снять ограничения на тип используемых моделей, существенно увеличить возможности междисциплинарных взаимодействий, использовать при моделировании оценки экспертов,

Сокращение: МГЯ – метод глубоких ям (Deep Holes Method).

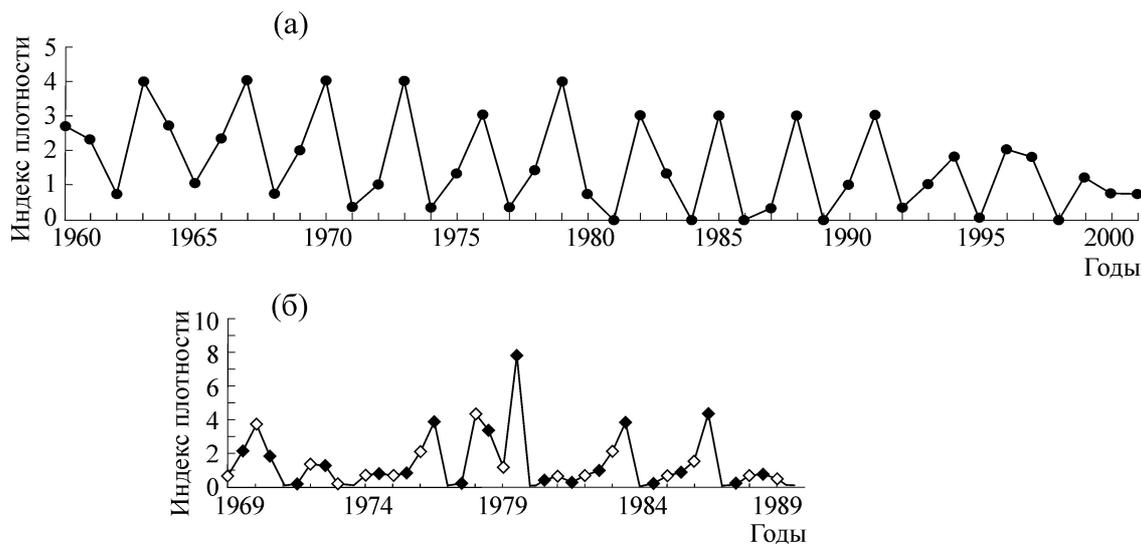


Рис. 1. Динамика численности леммингов: (а) – полуостров Таймыр, средний период 3 года; (б) – Чаунская низменность, нестабильные колебания (по работе [18], воспроизводится с разрешения авторов).

менять их в процессе моделирования, проводить сравнительный анализ различных наборов исходных предположений, гипотез. Таким образом, реализуется своего рода «экологический конструктор».

Несмотря на возможность неограниченной детализации, точнее в противовес детализации, необходимы механизмы формирования разумных ограничений. Эти ограничения можно сформулировать в виде трех принципов:

1) *минимальность* – использование минимально возможной математической структуры, необходимой для воспроизводства изучаемого явления;

2) *системность* – учет многообразия связей внутри и вне изучаемого объекта;

3) *соответствие (экологичность)* – использование предположений, не противоречащих доступным экологическим данным.

Исходя из этих соображений, в качестве объекта моделирования была выбрана тундра [10–12]. Это относительно простая экосистема. Главное ее достоинство – наличие ярко выраженных регулярных колебаний численности животных, в частности песцов, и их основного корма – леммингов (тундровых грызунов, широко известных своими миграциями). Отмечены регулярные пики численности животных (рис. 1), в среднем раз в три–четыре года [3, 14–18], для полуострова Таймыр характерны трехлетние колебания численности леммингов [14].

Основываясь на принципе «минимальности» и с учетом двух других принципов, мы выделили сравнительно автономное сообщество «расти-

тельность–лемминги–песцы» [10]. Структура математической модели выбиралась в соответствии с гипотезой Вольтерра–Костицына [19] в виде системы трех обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка. Это позволило при моделировании сообщества «растительность–лемминги–песцы», опираясь на методы системной динамики, создать «экологический конструктор»: динамика биомасс каждого из трех трофических уровней определялась тремя аддитивными компонентами – скоростью репродукции, отчуждения и естественного отмирания, а каждая из компонент, в свою очередь, формировалась как произведение константы и соответствующих функций.

Было создано большое количество версий модели. При отборе предположений использовали два биофизических критерия (независимых от экспертных оценок и постулатов классических моделей): удержание траекторий в положительном квадранте и воспроизводство соответствующих динамических режимов. В результате вычислительных экспериментов были получены характерные для тундры колебания численности леммингов и песцов [10, 11].

Стремление приблизиться к пониманию механизмов формирования динамики численности тундровых животных привело к качественно новому подходу в стратегии моделирования, к созданию модели популяции леммингов [14], определяющей характер колебаний численности животных тундрового сообщества. С этой целью была построена и проанализирована модель популяции леммингов с учетом возрастной структуры, привязанная к конкретному регио-

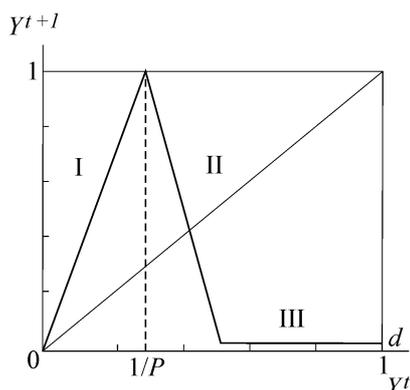


Рис. 2. График дискретного унимодального отображения отрезка $[0, 1]$ в себя (1), реализующего функцию последования $Y^{t+1} = F(Y^t)$, связывающую численности леммингов в двух соседних годах. Угловой коэффициент участка I характеризует прирост биомассы леммингов в благоприятный год; угловой коэффициент участка II характеризует изменение биомассы в условиях нехватки кормов в весенний период; величина d на участке III – нормированная биомасса леммингов в оптимальном биотопе.

ну: пос. Тарей (Западный Таймыр). В основу модели были положены данные В.А. Орлова [14], дополненные литературными данными и экспертными оценками. Были рассмотрены два вида леммингов, обитающих в данном регионе – копытные и сибирские. Проведенные на ЭВМ расчеты воспроизвели характерные для Западного Таймыра трехлетние колебания численности для сибирских и копытных леммингов.

Анализ результатов вычислительных экспериментов с имитационными моделями различной сложности и детализации [10,11,14] привел к обоснованию упрощенной модели в виде одномерного унимодального разностного уравнения (1), реализующего функцию последования, связывающую численности леммингов в двух соседних годах (см. рис. 2). С помощью данного уравнения удалось воспроизвести временную динамику, качественно близкую к динамике численностей реальных популяций леммингов (см. рис. 1 в работе [13]).

Совокупность всевозможных сочетаний значений параметров, входящих в рассматриваемое уравнение, определяет класс одномерных унимодальных отображений, численному исследованию которого посвящена настоящая работа.

В начале работы приводится дискретная модель популяции леммингов с содержательным описанием ее параметров. Далее приводится краткое описание метода, которым будет исследоваться дискретная динамическая система с параметрами, определяемая этой моделью, и излагаются результаты исследования основ-

ных геометрических объектов, порождаемых этой системой. В заключение приведено исследование поведения системы в условиях динамически изменяющихся параметров, моделирующее долговременные биосферные ритмы.

ДИСКРЕТНАЯ МОДЕЛЬ ПОПУЛЯЦИИ

Обозначим через Y численность популяции. Для нормированной переменной $\tilde{Y} = Y/Y_{\max}$, где Y_{\max} – максимальная численность популяции, функция последования имеет вид:

$$\tilde{Y}^{t+1} = F(\tilde{Y}^t) = \begin{cases} P\tilde{Y}^t, & \tilde{Y}^t \leq 1/P, \\ 1 - r(\tilde{Y}^t - 1/P), & 1/P < \tilde{Y}^t \leq 1/P + (1-d)/r, \\ d, & 1/P + (1-d)/r < \tilde{Y}^t \leq 1. \end{cases} \quad (1)$$

Здесь P – прирост биомассы леммингов в благоприятный год; коэффициент r характеризует изменение биомассы леммингов в условиях нехватки кормов в весенний период; величина d – нормированная биомасса леммингов в оптимальном биотопе (понятие «оптимальный биотоп» было введено в работах [10,11] и подразумевает область пространства обитания с оптимальными условиями проживания – в оптимальном биотопе при любых условиях выживает определенное число зверьков).

Особую остроту данным исследованиям придавал тот факт, что для моделируемой популяции леммингов Западного Таймыра типичными являются чередование максимумов численности через три года. В то же время цикл периода три в порядке Шарковского гарантирует существование циклов любой длины [20]. Одной из целей настоящей работы является исследование бифуркационных сценариев, при которых реализуется изменение периода циклов в порядке членов натурального ряда.

В работе [21] в результате вычислительных экспериментов при значениях параметров $P = 2$, $r \gg 1$ были установлены следующие свойства системы (1):

1) при изменении параметра d от 1 до 0 последовательно появляются зоны стабильности, которые отделены переходными зонами со сложными режимами;

2) внутри зон стабильности период траекторий постоянен, при переходе от одной зоны стабильности к другой период изменяется в порядке натурального ряда;

3) в каждой из переходных зон при небольшом изменении параметров период траекторий значительно изменяется («стохастическое поведение»);

4) существуют периодические траектории с периодом, большим любого наперед заданного натурального числа;

5) «ширину» переходных зон можно сделать как угодно малой при стремлении параметра r к бесконечности.

В дальнейшем [13] было выдвинуто предположение, что свойства 1–4 присущи системе (1) при любом допустимом значении параметра $P \in (1, \infty)$ и соответствующем значении параметра r .

В следующих разделах будет проведено систематическое исследование свойств траекторий и их стабильности при широком варьировании и сочетании значений параметров рассматриваемого унимодального отображения, характеризующих влияние на популяцию состояния окружающей среды.

Сформулируем теперь класс унимодальных отображений, которые будут исследоваться в работе.

Пусть задан вектор параметров $\lambda = (P, r, d)$. Представим разностное уравнение (1), связывающее нормированную численность $Y(t)$ леммингов в двух соседних годах, как $Y(t+1) = F(Y(t), \lambda)$, где

$$F(Y, \lambda) = \begin{cases} PY, & Y \leq 1/P, \\ 1 - r(Y - 1/P), & 1/P < Y \leq 1/P + (1-d)/r, \\ d, & 1/P + (1-d)/r < Y \leq 1. \end{cases} \quad (1')$$

Функция F постоянна при $Y \in [1/P + (1-d)/r, 1]$ и равна d , поэтому величину d будем в дальнейшем называть *ступенькой*. Нас будут интересовать прежде всего периодические режимы численности популяции и их устойчивость при изменении параметров.

Мы будем рассматривать область параметров λ , где $P, r > 1$ и $0 < d < 1$. Нас, как правило, будет интересовать случай $1/P + (1-d)/r \leq 1$, при невыполнении этого условия будут рассматриваться только решения с $F(Y(t), \lambda) \leq 1$. Отображение (1') имеет единственную нетривиальную стационарную точку $A > 0$ со свойством $A = F(A, \lambda)$. Нетрудно видеть, что при $d \leq 1/P + (1-d)/r$ справедливо $A = (P+r)/(1+r)P$, а при $d > 1/P + (1-d)/r$ выполняется $A = d$.

МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ

Будем исследовать рассматриваемое отображение с помощью визуализации различных объектов, которые оно порождает: траекторий, аттракторов, бифуркационных диаграмм и т.п. Траектории располагаются в расширенном фа-

зовом пространстве времени t и фазы Y , трубки траекторий в пространстве начальных значений $Y(0)$, времени и численности. Аттракторы представляют собой, упрощенно говоря, асимптотически устойчивые структуры, замечаемые траекторией в пространстве фазы, бифуркационные диаграммы описывают зависимость аттракторов от вектора параметров и расположены в пространстве параметров и фазы. Некоторые из этих множеств являются дискретными, а при ограничении на число шагов – конечными, некоторые – бесконечными и даже не счетными. Например, аттрактор цикла и ограниченная по времени траектория конечны, трубка траекторий, выходящая из невырожденной окрестности некоторой точки, является счетной (конечной при ограничении числа шагов) совокупностью одномерных объектов даже в том случае, когда все траектории через некоторое число шагов сходятся к конечному аттрактору. Размерность бифуркационных диаграмм определяется поведением траектории в точках области построения – при хаотическом поведении диаграмма может иметь дробную метрическую (фрактальную) размерность. Все рассматриваемые объекты имеют неявное описание через отображение (1'), которое ставит в соответствие набору $(Y(0), t, \lambda)$ точку в соответствующем пространстве.

Для целей визуализации указанных выше объектов будем строить их описания в явном виде *методами аппроксимации неявно заданных множеств* [22–24]. Приведем краткое описание применяемой технологии для случая аппроксимации и визуализации нелинейных отображений [23,25].

Пусть A – непустое подмножество метрического пространства \mathbf{R} с метрикой ρ . Конечное множество T называется конечной метрической ε -сетью для множества A , если любая точка $a \in A$ расположена на расстоянии не большем, чем ε от некоторой точки T , т.е. $\rho(a, T) = \min\{\rho(a, t) : t \in T\} \leq \varepsilon$. Конечные метрические сети позволяют кодировать бесконечные вполне ограниченные множества конечными наборами точек и аппроксимировать их объединениями метрических шаров с центрами в этих точках. Обозначим $[T]_\varepsilon = \{z \in \mathbf{R} : \rho(z, T) \leq \varepsilon\}$ и $(T)_\varepsilon = \{z \in \mathbf{R} : \rho(z, T) < \varepsilon\}$. Если T – метрическая ε -сеть для A , то замкнутая ε -окрестность T , т.е. множество $[T]_\varepsilon$, аппроксимирует множество A : $T \subset A \subset [T]_\varepsilon$. Это значит, что $T \subset A \subset \cup\{B(t, \varepsilon) : t \in T\}$, где $B(t, \varepsilon)$ есть замкнутый шар радиуса ε с центром в точке t : $B(t, \varepsilon) = \{z \in \mathbf{R} : \rho(z, t) \leq \varepsilon\}$. Таким образом, чем меньше ε , тем

точнее аппроксимация, но тем больше требуется точек метрической сети для получения точного явного описания. Сложность задачи аппроксимации множеств с помощью метрической ϵ -сети, т.е. зависимость числа ее точек от ϵ , определяется метрической (или фрактальной, или Минковского) размерностью (см. подробности, например, в работе [25]).

При аппроксимации неявно заданных множеств нелинейных систем будет использоваться метод глубоких ям (МГЯ, Deep Holes Method) [25].

Пусть требуется построить ϵ -сеть (аппроксимировать) ограниченное множество A , на котором задана вероятностная мера π и имеется возможность получать большие независимые повторные выборки точек из A . Естественно было бы в этом случае выбирать равномерную на A меру. Однако в случае *неявного задания* множества A с помощью некоторого отображения вероятностная (обычно равномерная) мера может быть задана, как правило, только на прообразе. В этом случае индуцированная мера π на множестве A может быть существенно неравномерной.

Опишем теперь алгоритм, реализующий МГЯ для стохастически заданных множеств [23, 25]. Пусть задан объем выборки N .

Алгоритм МГЯ. Начальная итерация алгоритма состоит в том, что генерируется случайная точка a_1 из A и полагается $T_1 = \{a_1\}$. Опишем $(n + 1)$ -ю итерацию алгоритма, $n \geq 1$. Пусть построено множество T_n .

Шаг 1: получить контрольную выборку H_N .

Шаг 2: положить $T_{n+1} = T_n \cup \{t_{n+1}\}$, где $t_{n+1} := \operatorname{argmax} \{\rho(a, T_n) : a \in H_N\}$.

Обозначим через $\rho(T_n, H_N) = \max\{\rho(a, T_n) : a \in H_N\}$ *выборочный радиус покрытия* множества A шарами с центрами в T_n , полученный на выборке H_N . Величину $\eta(T_n, H_N) = \pi((T_n)_\epsilon \cap A)$ при $\epsilon = \rho(T_n, H_N)$ назовем *полнотой* этого покрытия.

Условием окончания работы алгоритма может быть *выборочная точность*: остановка в случае, когда значение выборочного радиуса покрытия $\rho(T_n, H_N)$ оказывается меньше заданной точности ϵ .

Как уже было сказано, в случае неявного задания множества A с помощью некоторого отображения, рассмотренный алгоритм основан на глобальном случайном зондировании прообраза аппроксимируемого множества. Несмотря на то что зондирование прообраза основано обычно на равномерной случайной мере, рас-

пределение точек в пространстве образа является, как правило, значительно неравномерным. Поэтому и возникает проблема фильтрации этого потока. В используемом методе производится адаптивный отбор точек метрической сети и оценка точности, полноты и надежности аппроксимации методами математической статистики.

Обозначим $\chi(\eta, N) = 1 - \exp(-2N(1 - \eta)^2)$. Пусть задана некоторая оценка полноты η , $0 \leq \eta < 1$. Обозначим через \mathbf{P} вероятность, определенную на пространстве выборок объема N . Тогда *надежность оценки полноты* покрытия A системой шаров с радиусом $\rho(T_n, H_N)$ величиной η , оказывается равной $\chi(\eta, N)$ [25], т.е. $\mathbf{P}\{\eta(T_n, H_N) > \eta\} \geq \chi(\eta, N)$.

Обозначим

$$N^*(\eta, \chi) = -\ln(1 - \chi) / [2(1 - \eta)^2].$$

Эта величина характеризует объем выборки N , необходимый для построения аппроксимации с заданной полнотой η и надежностью χ . В частности (см. работу [25]):

$$\mathbf{P}\{\eta(T_n, H_{N^*(\eta, \chi)}) > \eta\} \geq \chi.$$

Например, требование $\chi = 0,95$ и $\eta = 0,95$ дает $N = 600$, а требование $\chi = 0,99$ и $\eta = 0,99$ приводит к $N = 23000$. В настоящей работе аппроксимация представленных множеств проводилась на основе равномерной вероятностной меры, заданной в пространстве параметров и начальных концов траекторий, при $N = 5000$, что соответствует $\chi = 0,98$ и $\eta = 0,98$. Таким образом, вне рассмотрения с высокой степенью надежности остались эффекты, имеющие вероятностную меру, не превышающую 2% (пример такого эффекта приведен ниже при описании свойств траекторий и их трубок в разделе «Численное исследование класса одномерных унимодальных отображений...»).

Согласно работе [25], скорость сходимости (зависимости точности аппроксимации от числа точек метрической сети) МГЯ определяется метрической (фрактальной) размерностью аппроксимируемого множества, что делает этот инструмент эффективным в случае построения объектов (не обязательно фракталов), имеющих метрическую размерность, меньшую размерности окружающего пространства. Именно такими свойствами обладают, как правило, исследуемые в статье объекты.

На нижеследующих рисунках представлены аппроксимации различных множеств. Для измерения близости точек используется метрика Чебышева, поэтому метрические шары являют-

ся кубами (в двумерном случае – квадратами). Двумерные множества состоят из совокупности мелких квадратов, покрывающих аппроксимируемое множество с заданной высокой точностью, полнотой и надежностью. Трехмерные множества состоят из совокупности мелких кубов с теми же свойствами. В трехмерном случае изображаются двумерные сечения множеств, при этом на рисунках каждому сечению соответствует свой цвет (штриховка). Для визуализации используется технология и программное обеспечение диалоговых карт решений (Interactive Decision Maps) [26]. При изображении трехмерных аппроксимаций также может применяться обычная 3D-графика (например, см. ниже рис. 12), в этом случае, однако, точное численное позиционирование отдельных структур на рисунке затруднительно.

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ КЛАССА
ОДНОМЕРНЫХ УНИМОДАЛЬНЫХ
ОТОБРАЖЕНИЙ МЕТОДАМИ
АППРОКСИМАЦИИ НЕЯВНО
ЗАДАННЫХ МНОЖЕСТВ

Траектории, трубки, аттракторы. Основные объекты исследования. Введем основные теоретические объекты этого исследования. Для $x \in [0,1]$ траекторией будем называть множество

$$\mathbf{T}(x, \lambda) = \{(t, Y(t)): Y(t+1) = F(Y(t), \lambda), Y(0) = x, t = 0, 1, \dots\}.$$

Для $X \subset [0, 1]$ трубкой траекторий над X будем называть множество $\mathbf{T}(X, \lambda) = \{\mathbf{T}(x, \lambda): x \in X\}$. Пусть задано $N \geq 0$. Остаточной траекторией шага N для траектории $\mathbf{T}(x, \lambda)$ назовем множество $\mathbf{Y}(N, x, \lambda) = \{Y(t): Y(0) = x, t = N, N + 1, \dots\}$. Если существует $N \geq 0$ такой, что для любых $N_2 > N_1 \geq N$ справедливо $\mathbf{Y}(N_1, x, \lambda) \equiv \mathbf{Y}(N_2, x, \lambda)$, то это множество будем называть терминальным.

Существуют различные определения аттракторов, характеризующих поведение траекторий «на бесконечности». Пусть в точке x существует терминальное множество $\mathbf{Y}(N_1, x, \lambda)$. Если существует малая ε -окрестность точки x такая, что для любого x_1 из этой окрестности для некоторых N_2 справедливо $\mathbf{Y}(N_2, x_1, \lambda) \equiv \mathbf{Y}(N_1, x, \lambda)$, то это множество представляет собой аттрактор рассматриваемой дискретной системы. Более формально, для $\mathbf{T}(x, \lambda), x \in U$ определим аттрактор как множество

$$\mathbf{A}(U, \lambda) = \bigcap_{t=0}^{\infty} \bigcup_{x \in U} \{Y(t): (t, Y(t)) \in \mathbf{T}(x, \lambda)\}.$$

Таким образом, при выполнении условия $\mathbf{Y}(N, x^*, \lambda) \equiv \mathbf{Y}(N, x, \lambda)$ для $x \in U$ в качестве ограниченного аналога аттрактора достаточно рассмотреть множество $\{Y(t): (t, Y(t)) \in \mathbf{T}(x^*, \lambda), N \leq t \leq NN\}$, для достаточно больших NN .

Траекторию $\mathbf{T}(x, \lambda)$ назовем траекторией с циклом, если существуют $n > N \geq 0$ такие, что $Y(N) = Y(n)$, где $(N, Y(N)), (n, Y(n)) \in \mathbf{T}(x, \lambda)$. Нетрудно видеть, что траектория с терминальным множеством есть траектория с циклом. Если у $\mathbf{T}(x, \lambda)$ есть цикл, то величину $\tau(x, \lambda) = \min\{N: \exists n, Y(N) = Y(n)\}$ назовем временем выхода на цикл, а величину $\pi(x, \lambda) = \min\{k: Y(\tau(x, \lambda) + k) = Y(\tau(x, \lambda))\}$ назовем периодом цикла. В таких случаях будем для краткости говорить о $\pi(x, \lambda)$ -цикле. Очевидно, что для цикла при $N \geq \tau(x, \lambda)$ терминальное множество $\mathbf{Y}(N, x, \lambda)$ не меняется и, таким образом, оно имеет ровно $\pi(x, \lambda)$ элементов. Если терминальное множество устойчиво по x , т.е. является аттрактором, то соответствующий цикл будем называть устойчивым, в противном случае будем говорить о неустойчивом цикле.

В стационарной точке A по определению при любых значениях параметров λ существует 1-цикл. При $d > 1/P + (1 - d)/r$ имеем $A = d$, и в этой точке существует устойчивый 1-цикл, однако можно показать, что существуют области значений параметров, в которых этот цикл не является устойчивым.

Пусть задано множество $W \subset [0, 1]$. Множество $\mathbf{X}(W, \lambda) = \{x \in [0, 1]: \exists t, Y(t) \in W, (t, Y(t)) \in \mathbf{T}(x, \lambda)\}$ назовем бассейном для W . Очевидно, что для любой точки терминального множества (цикла) бассейны для этой точки и для всего терминального множества совпадают. Бассейн аттрактора (устойчивого цикла) траектории $\mathbf{T}(x, \lambda)$ обязательно содержит некоторую ε -окрестность точки x .

Свойства траекторий и их трубок. Рассмотрим примеры, иллюстрирующие введенные объекты и их свойства. Пусть сначала $\lambda_1 = (1,5, 4, 0,8)$.

На рис. 3а приведены траектории $\mathbf{T}(0,1, \lambda_1)$ и $\mathbf{T}(0,9, \lambda_1)$.

Из рисунка видно, что при $N \geq 6$ они имеют одинаковое терминальное одноточечное множество $\mathbf{Y}(N, 0,1, \lambda_1) = \mathbf{Y}(N, 0,9, \lambda_1) = \{d\}$. Таким образом, эти траектории являются циклами с периодом $\pi(0,1, \lambda_1) = \pi(0,9, \lambda_1) = 1$ и

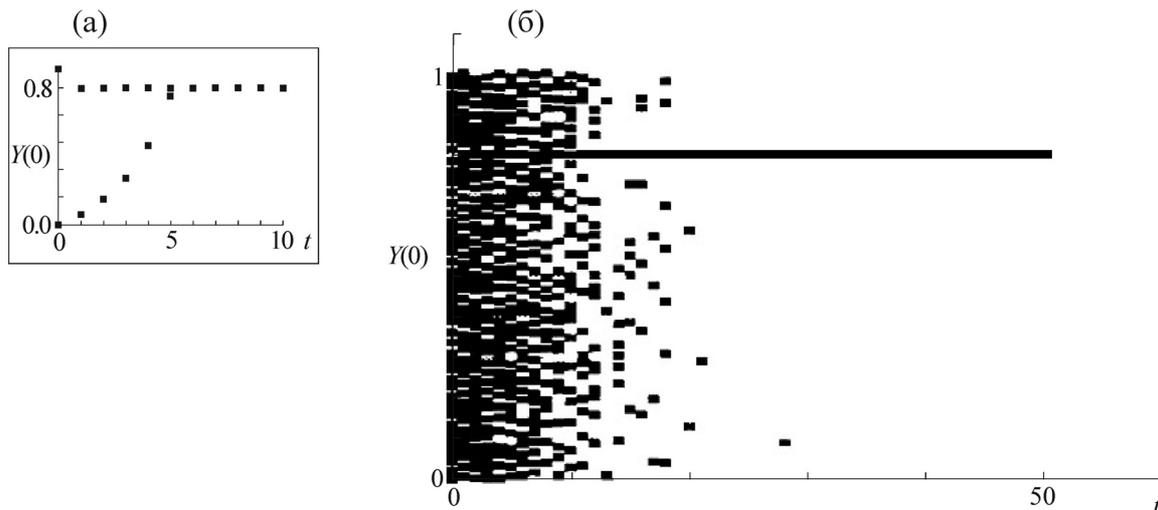


Рис. 3. Две траектории (а) и трубка траекторий (б) при $P = 1,5$, $r = 4$, $d = 0,8$.

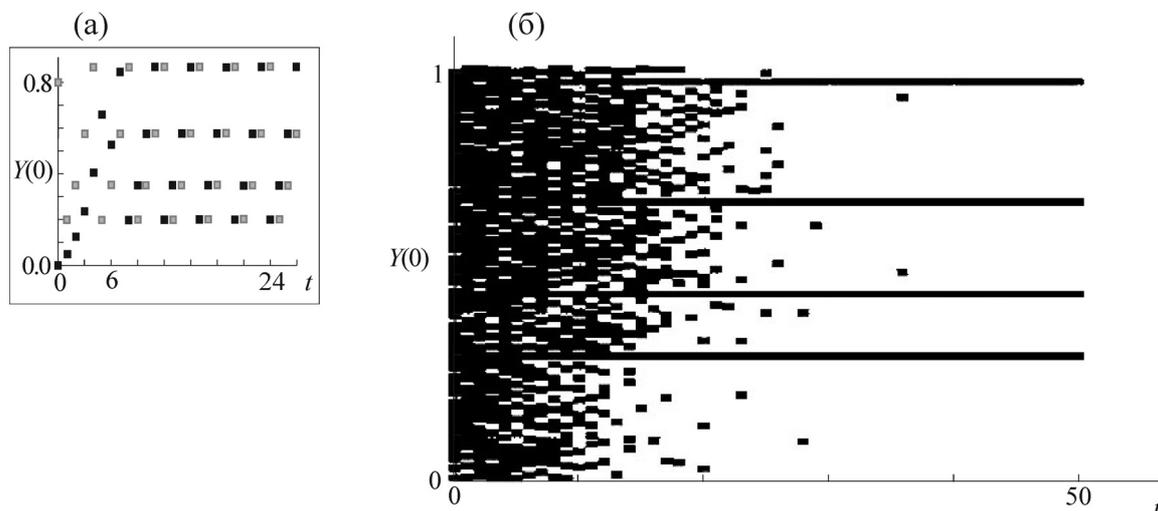


Рис. 4. Две траектории (а) и трубка траекторий (б) при $P = 1,5$, $r = 4$, $d = 0,3$.

временами выхода на цикл $\tau(0,1, \lambda_1) = 1$ и $\tau(0,9, \lambda_1) = 6$.

В рассматриваемом случае для стационарной точки $A = d = 0,8$ выполняется условие $d > 1/P + (1 - d)/r$ и в ней существует устойчивый 1-цикл. На рис. 3б приведена трубка траекторий $\mathbf{T}([0, 1], \lambda_1)$. Из рисунка видно, что (для рассматриваемой точности и полноты аппроксимации) при $N \geq 30$ все траектории трубки (в данном случае все вообще возможные траектории) имеют одинаковое терминальное одноточечное множество (аттрактор) $\{d\}$. Таким образом, эти траектории являются устойчивыми циклами с периодом 1 и временами выхода на цикл не больше 29. Таким образом, бассейн

аттрактора $\{d\}$, т.е. в наших обозначениях множество $\mathbf{X}(0,8, \lambda_1)$, совпадает с отрезком $[0, 1]$.

Пусть теперь $\lambda_2 = (1,5, 4, 0,3)$. На рис. 4а приведены траектории $\mathbf{T}(0,1, \lambda_2)$ и $\mathbf{T}(0,9, \lambda_2)$.

Из рисунка видно, что при $N \geq 8$ они имеют одинаковое терминальное четырехточечное множество $\mathbf{Y}(N, 0,1, \lambda_2) = \mathbf{Y}(N, 0,9, \lambda_2)$, причем точка $\{d\}$ принадлежит этому аттрактору. Таким образом, эти траектории являются циклами с периодом $\pi(0,1, \lambda_2) = \pi(0,9, \lambda_2) = 4$ и временами выхода на цикл $\tau(0,1, \lambda_2) = 4$ и $\tau(0,9, \lambda_2) = 8$.

На рис. 4б приведена трубка траекторий $\mathbf{T}([0, 1], \lambda_2)$. Из рисунка видно, что (для рассматриваемой точности и полноты аппроксимации) при $N \geq 37$ все траектории трубки (в

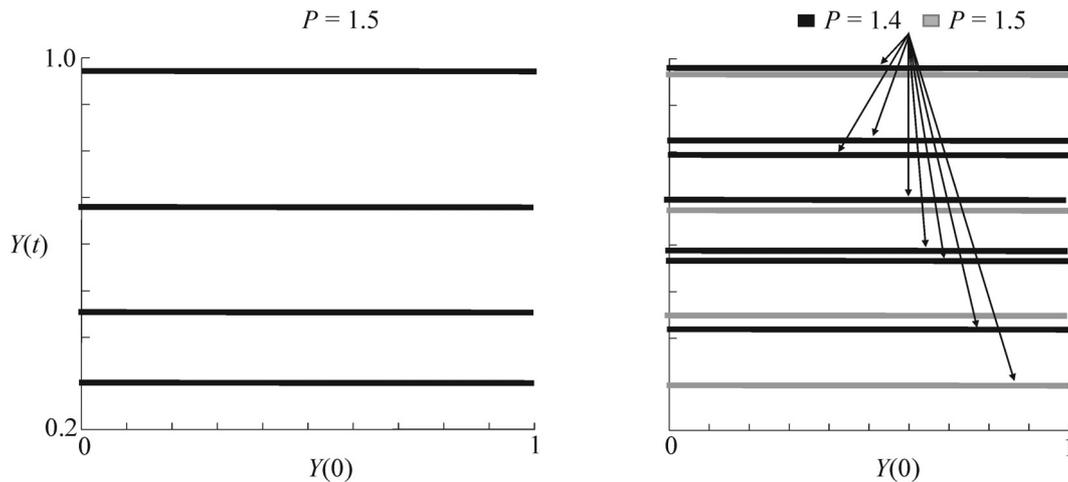


Рис. 5. Зависимость аттрактора от стартовой точки при $r = 4, d = 0,3$.

данном случае все вообще возможные траектории) имеют одинаковое терминальное четырехточечное множество (аттрактор), причем точка $\{d\}$ принадлежит этому аттрактору. Таким образом, эти траектории являются устойчивыми циклом с периодом 4 и временами выхода на цикл не больше 37.

В рассматриваемом случае для стационарной точки $A = 0,73(3)$ не выполняется условие $d > 1/P + (1 - d)/r$ и в ней существует неустойчивый 1-цикл. Действительно, из рис. 4б видно, что малейшее отклонение от точного значения A приводит к тому, что траектория «сваливается» в устойчивый четырехточечный аттрактор (4-цикл). Заметим, что неустойчивый 1-цикл в точке A на рассматриваемом рисунке не наблюдается, так как применяемая технология не позволяет отслеживать эффекты с вероятностной мерой, равной нулю (см. предыдущий раздел). Для исследования таких эффектов МГЯ вероятностная мера должна быть задана иным образом. Рассмотрение этого вопроса выходит за рамки настоящей статьи.

Приведенные примеры показывают наличие сочетаний значений параметров, для которых траектории рассматриваемой системы являются устойчивыми циклами. При таких сочетаниях значений параметров трубки траекторий, соответствующие всему диапазону начальных значений фазовой переменной, за сравнительно короткое время (более детально этот вопрос исследуется при анализе времени выхода на циклы в разделе «Численное исследование класса одномерных унимодальных отображений...») выходят на одни и те же терминальные множества, которые, таким образом, могут считаться аттракторами рассматриваемой системы.

Зависимость аттрактора от вариации параметров. Рассмотрим зависимость аттрактора $Y(N, x, \lambda_2)$, $N = 100$, от стартовой точки x , приведенную на рис. 5а.

Из рисунка видно, что для любого стартового значения $x \in [0, 1]$ оси абсцисс терминальное множество $Y(N, x, \lambda_2)$ неизменно и состоит из четырех точек (отложены по оси ординат), причем одна из них совпадает с точкой $\{d\}$. Таким образом, все траектории (здесь и далее – за исключением множества малой меры) рассматриваемой системы являются при этом сочетании параметров устойчивыми циклами с периодом 4. Бассейн рассматриваемого аттрактора совпадает с бассейном точки $\{d\}$, т.е. множеством $X(0,3, \lambda_2)$, и, как и при λ_1 , совпадает с отрезком $[0, 1]$.

Рассмотрим вопрос устойчивости зависимости аттрактора от стартовой точки при небольших вариациях параметров. Можно показать, что в случае λ_1 эта зависимость является устойчивой, а вот для λ_2 это не совсем так. Рассмотрим рис. 5б. На нем приведены зависимости аттрактора $Y(N, x, \lambda_2)$, $N = 100$, от стартовой точки x для двух сочетаний параметров, несколько различающихся по параметру P , т.е. $Y(N, x, \lambda_2)$ и $Y(N, x, \lambda_{2*})$, где $\lambda_{2*} = (1,4, 4, 0,3)$. На рисунке множество $Y(N, x, \lambda_2)$ изображено поверх множества $Y(N, x, \lambda_{2*})$.

Из рисунка видно, что для любого стартового значения $x \in [0, 1]$ оси абсцисс терминальные множества $Y(N, x, \lambda_2)$ и $Y(N, x, \lambda_{2*})$ неизменны и каждая содержит точку $\{d\}$. Однако эти аттракторы не совпадают, причем множество $Y(N, x, \lambda_2)$ является четырехточечным, а множество $Y(N, x, \lambda_{2*})$ – восьмиточеч-

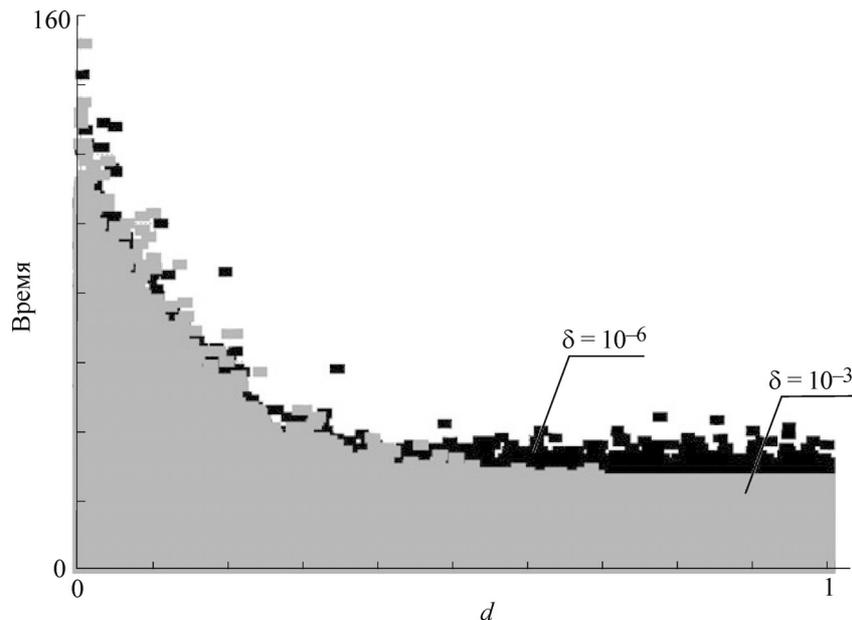


Рис. 6. Зависимость времени выхода на ступеньку от d ($P = 1,5, r = 4$).

ным. Таким образом, все траектории рассматриваемой системы при λ_2 являются устойчивыми циклами с периодом 4, а все траектории рассматриваемой системы при λ_{2*} являются устойчивыми циклами с периодом 8, т.е. при переходе от λ_2 к λ_{2*} для любой траектории имеет место бифуркация удвоения периода.

Приведенные примеры показывают возможность неустойчивости аттрактора системы при конечной вариации параметров. Вопрос устойчивости аттрактора при малых вариациях параметров рассмотрен ниже (см. рис. 11).

Время выхода на циклы. Для траектории $T(x, \lambda)$, проходящей через точку d , обозначим как $\Delta(x, \lambda) = \min\{N: \exists n, Y(N) = d\}$ время выхода на ступеньку. Если траектория не проходит через точку d , положим $\Delta(x, \lambda)$ равным бесконечности. Во всех приведенных выше примерах время выхода на ступеньку было конечно. Ниже нам встретятся сочетания параметров, в которых конечное время выхода на ступеньку определить не удалось. Области таких сочетаний параметров мы будем называть *аномальными зонами*. Очевидно, что $\Delta(x, \lambda) \leq \tau(x, \lambda)$ и $\Delta(d, \lambda) = \pi(d, \lambda)$, поэтому исследование времени выхода на ступеньку позволяет исследовать границы времени выхода на цикл и период цикла траекторий, начинающихся на ступеньке.

В определениях величин $\tau(x, \lambda)$, $\pi(x, \lambda)$ и $\Delta(x, \lambda)$ присутствуют условия типа равенства. В вычислительных экспериментах они проверяются с некоторой точностью, определяемой па-

раметром $\delta > 0$. Например, время выхода на ступеньку определяется как $\Delta_\delta(x, \lambda) = \min\{N > 0: |Y(N) - d| \leq \delta\}$. Ясно, что $\Delta_\delta(x, \lambda) \leq \Delta(x, \lambda)$ и требуется оценить влияние параметра точности на свойства величины $\Delta_\delta(x, \lambda)$ как оценки величины $\Delta(x, \lambda)$. На рис. 6 представлена зависимость оценки времени выхода на ступеньку $\Delta(x, \lambda)$ при всех возможных $x \in [0, 1]$ и при $\lambda = (1,5, 4, d)$, $d \in [0, 1]$, т.е. множество $\mathbf{D}(1,5, 4)$, где

$$\mathbf{D}(P, r) = \{\Delta(x, (P, r, d)): x \in [0, 1]; d \in [0, 1]\}.$$

Это множество представлено для двух параметров точности: $\delta = 10^{-3}$ (светлая штриховка) и $\delta = 10^{-6}$ (темная штриховка). При этом множество для $\delta = 10^{-3}$ наложено на множество с $\delta = 10^{-6}$. По оси абсцисс на этом рисунке отложено значение параметра d . При фиксированном параметре d , т.е. при заданном λ , при различных x получаются различные значения $\Delta(x, \lambda)$, которые заполняют вертикаль по оси ординат. При этом верхняя граница множества характеризует максимальное для данных P, r и d возможное время выхода траектории на ступеньку с заданной точностью. Множество построено приближенно с помощью методов построения ε -сетей. Изображенные на рисунке квадратики с одинаковой штриховкой покрывают аппроксимируемое множество с высокой степенью полноты и надежности.

На рисунке, прежде всего, видно, что точность δ проверки выхода на ступеньку на вид

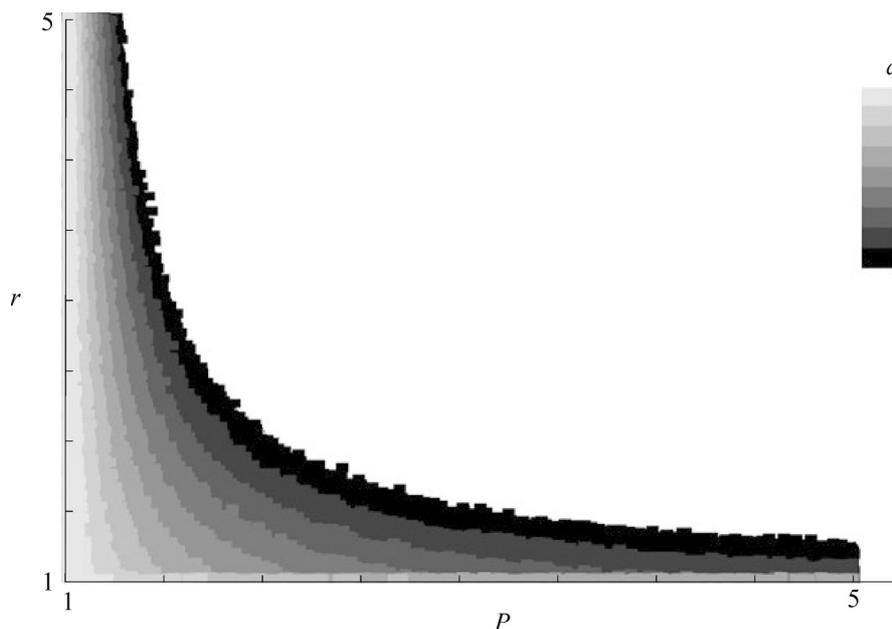


Рис. 7. Аномальная зона параметров.

множества $\mathbf{D}(P, r)$ влияет незначительно (множество с темной штриховкой лишь немного «выглядывает» сверху за множество светлой штриховки). Далее, из рисунка видно, что при всех d значения $\Delta(x, \lambda)$ не превышают 160. При этом время выхода на ступеньку растет с приближением значения параметра d к нижнему краю отрезка (т.е. при d , близких к нулю). Для большинства значений параметра время выхода на ступеньку не превышает 100 шагов.

На рис. 7 представлена аномальная зона параметров. Это область параметров $\lambda = (P, r, d)$, для которых время выхода на ступеньку (а следовательно, время выхода на цикл и период цикла) превышают 300 шагов, т.е. множество

$$\mathbf{Z}(P, r, d) = \{(P, r, d) : \Delta(x, (P, r, d)) > 300 : x \in [0, 1]\}.$$

На этом рисунке по оси абсцисс отложен параметр P , по оси ординат – параметр r , а каждый цвет (штриховка) соответствует небольшому диапазону значений параметра d , указанному на шкале цвета (штриховки). При этом слои светлой штриховки (большие значения d) наложены на слои темной штриховки (меньшие значения d). Из рисунка видно, что множество $\mathbf{Z}(P, r, d)$ занимает угол куба всевозможных значений параметров, близкий к ребру, соединяющему точки $(1, 1, 0)$ и $(1, 1, 1)$. При этом множество аномальных сочетаний параметров P и r расширяется с приближением значения параметра d к нулю (слои темной штриховки растут). Аномальная зона $\mathbf{Z}(P, r, d)$ может слу-

жить оценкой области параметров, в которой наблюдается так называемая «катастрофа голубого неба» (“Blue sky catastrophe”) – области хаотических траекторий без циклов или с циклами больших периодов [27].

Итак, в отличие от не очень существенной зависимости времени выхода на аттрактор от стартовой точки, влияние параметров является значительным. Более того, существуют области параметров (аномальные зоны), в которых аттракторов (устойчивых циклов) не наблюдается.

Проведенные исследования времени выхода на цикл позволяют также сделать вывод, что в численных экспериментах (по крайней мере, вне аномальных зон) достаточно принять $N \geq 300$ и ограничиться рассмотрением траекторий при $t \leq 10000$.

Аналогичные исследования свойств траекторий, терминальных множеств и аттракторов может быть проведено и для произвольных сочетаний параметров λ . Задачей дальнейшего исследования будет определение областей в пространстве параметров с устойчивыми периодическими свойствами траекторий. Поскольку, как проиллюстрировано выше, зависимость аттракторов траекторий от стартовой точки не существенна, мы в дальнейшем, если не оговорено специально, будем рассматривать траектории *со стартовой точкой на ступеньке* d , т.е. $\mathbf{T}(d, \lambda)$. В дальнейшем указание на стартовую точку в обозначениях будем опускать, т.е. будем использовать обозначение $\mathbf{T}(\lambda)$ вместо

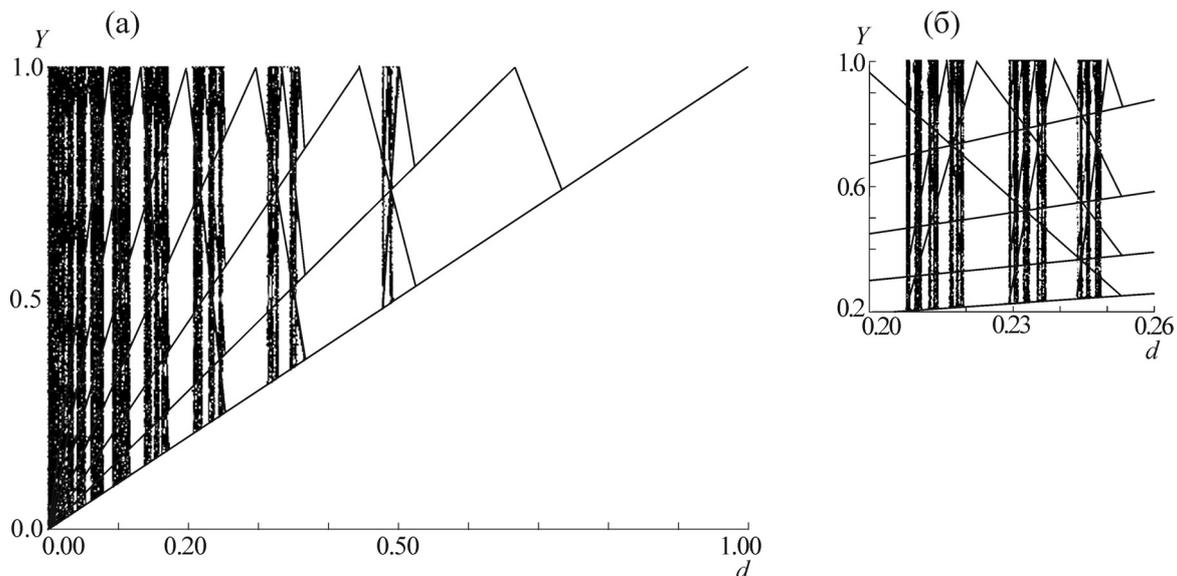


Рис. 8. Бифуркационная диаграмма (а) по параметру d ($P = 1,5, r = 4$) и фрагмент ее тонкой структуры (б).

$T(d, \lambda)$. Будем также опускать зависимость предельного множества от числа N , т.е. под $Y(P, r, d)$ подразумевать $Y(N, d, (P, r, d))$ при достаточно большом N .

Бифуркационные диаграммы. Рассмотрим зависимость терминального множества (аттрактора) траектории от различных параметров системы, т.е. множеств

$$A_d(P, r) = \{Y(P, r, d) : d \in [0, 1]\},$$

$$A_P(r, d) = \{Y(P, r, d) : P > 1\},$$

$$A_r(P, d) = \{Y(P, r, d) : r > 1\}.$$

Такие множества мы будем называть *бифуркационными диаграммами*.

На рис. 8а приведена бифуркационная диаграмма $A_d(1,5, 4)$.

На рисунке видны зоны стабильности периода устойчивого цикла траекторий, в которых период и число точек аттрактора сохраняются. Период траектории при данном d визуально определяется на рисунке следующим образом: проводится вертикаль от некоторого фиксированного значения на оси абсцисс, количество пересечений этой вертикали с траекторией определяет период траектории при данном d .

При переходе от одной зоны стабильности к другой (справа налево) происходит бифуркация (изменение периода). Например, сочетание параметров λ_1 с $d = 0,8$ принадлежит первой зоне стабильности, в которой аттрактор состоит из одной точки и период цикла равен 1. Сочетание же параметров λ_2 с $d = 0,3$ принадлежит

зоне стабильности, в которой аттрактор состоит из четырех точек и период цикла равен 4. Переход от одной зоны стабильности к соседней происходит иногда сразу с удвоением периода, а иногда – с переходом через зону нестабильности, в которой устойчивые циклы либо отсутствуют, либо имеют большой период. Пример тонкой структуры зоны нестабильности приведен на рис. 8б.

На рис. 9а приведена бифуркационная диаграмма $A_P(4, 0,3)$.

Из рисунка видно, что основная зона нестабильности по параметру P начинается для данных r и d при P приблизительно меньшем, чем 1,5. При $1 < P \leq 1,2$ на рисунке видна аномальная (пустая снизу) зона, в которой присутствуют только траектории с терминальными множествами, лежащими в верхней части отрезка вне ступеньки. Крупным планом эта аномальная зона изображена на рис. 9б. Отсутствие решений с Y вблизи ступеньки d в этой области определяется условием, приведенным в описании множества допустимых параметров: $1/P + (1 - d)/r \leq 1$. В точках рассматриваемой аномальной зоны при выбранных параметрах d, P и r это условие не выполняется. Нетрудно видеть, что нарушение этого условия приводит к хаотичному поведению вблизи $Y = 1$, никогда не возвращающемуся на ступеньку.

На рис. 10а приведена бифуркационная диаграмма $A_r(1,5, 0,3)$.

Из рисунка видно, что при данных P и d по параметру r имеют место масштабные зоны стабильности устойчивых циклов периодов 3,

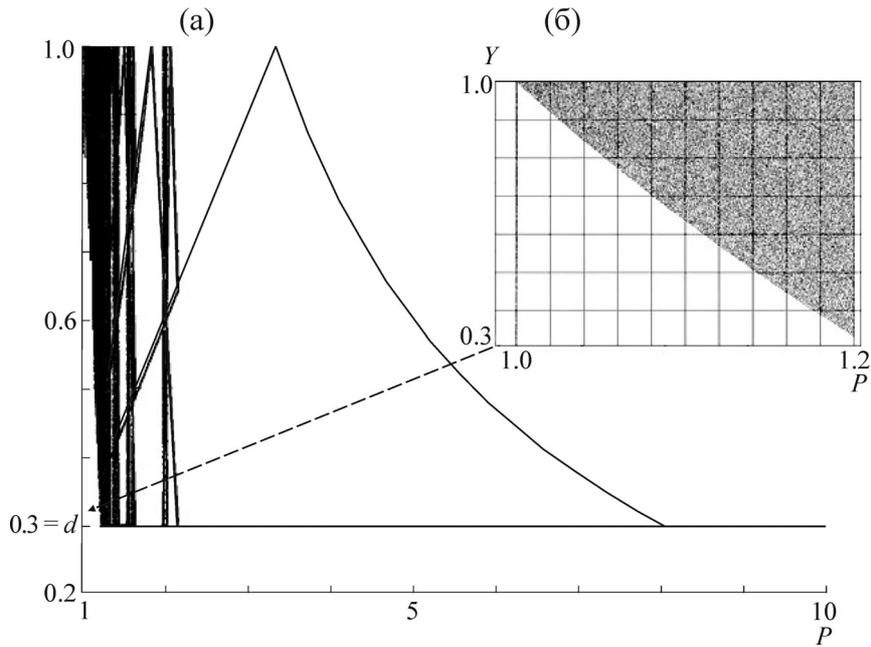


Рис. 9. Бифуркационная диаграмма (а) и anomальная зона (б) по параметру P ($r = 4, d = 0,3$).

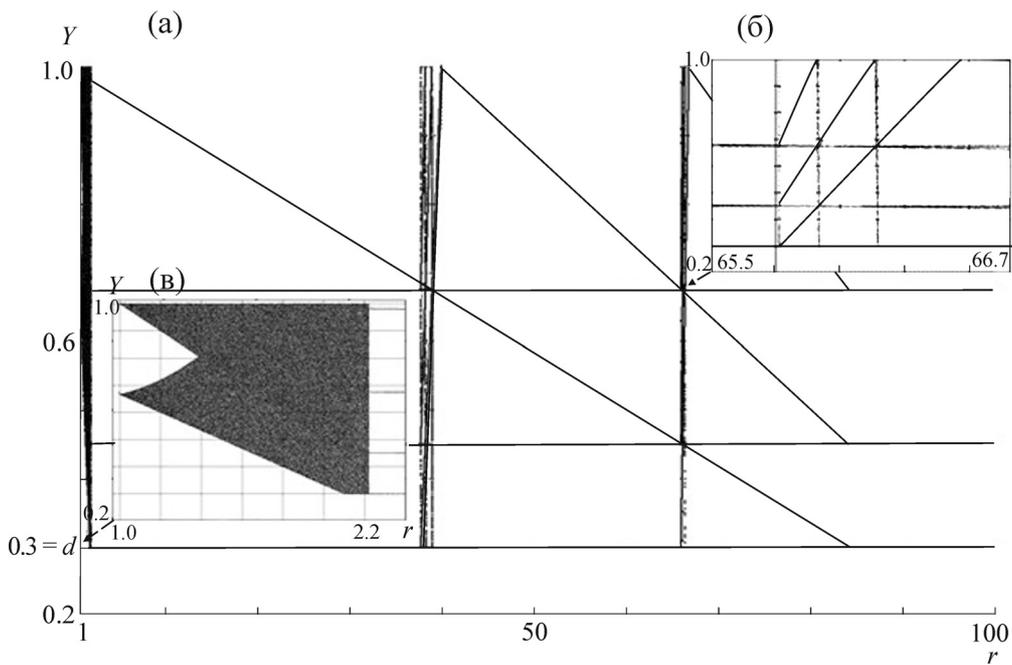


Рис. 10. Бифуркационная диаграмма (а) по параметру r ($P = 1,5, d = 0,3$), тонкая структура (б) и anomальная зона (в).

6, 5 и 4 (справа налево), разделенные небольшими участками неустойчивости. Слева внизу видна anomальная зона с аттракторами в верхней части единичного отрезка вне ступеньки (аналогично бифуркационной диаграмме по параметру P). Пример переходной зоны приведен на рис. 10б. В тонкой переходной зоне видны

чередования (справа налево) циклов с периодами 6, 7, 5, 6, 7, 5. На рис. 10в приведена anomальная зона для r от 1,0 до 2,2. Из рисунка видно, что anomальная зона заканчивается выходом на 4-цикл.

Приведенные примеры бифуркационных диаграмм показывают, что для всех параметров

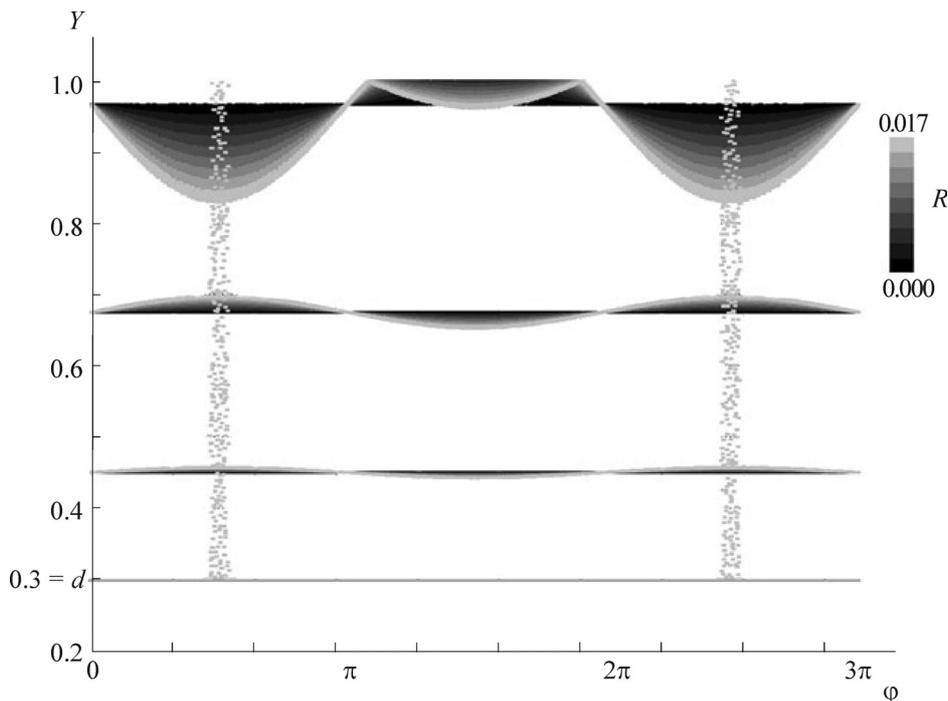


Рис. 11. Устойчивость бифуркационной диаграммы вдоль кривой в пространстве параметров.

справедливо свойство чередования областей устойчивости с циклами малого периода с узкими переходными зонами квазихаотического поведения.

Устойчивость бифуркационных свойств на параметрической кривой. *Исследование пределов устойчивости.* Исследуем устойчивость бифуркационных свойств в окрестности заданного сочетания параметров. Рассмотрим точку $\lambda_2 = (1,5, 4, 0,3)$. Как было установлено, в этой точке для всех стартовых значений x наблюдается аттрактор в виде устойчивого 4-цикла (см. рис. 5). Обозначим $P^* = 1,5$, $r^* = 4$ и $d^* = 0,3$. Зафиксируем значение параметра d и определим кривую в пространстве параметров как $\lambda(\varphi, R) = (P(\varphi, R), r(\varphi, R), d^*)$, где $\varphi \in [0, 2\pi]$ и $P(\varphi, R) = P^*(1 + \sin(\varphi)R)$, $r(\varphi, R) = r^*(1 + \cos(\varphi)R)$.

Здесь $R \geq 0$ – масштабирующий множитель, характеризующий удаление точек кривой в пространстве параметров от точки λ_2 . При $R = 0$ кривая параметров совпадает с точкой λ_2 , а при $\varphi = \pi$ и $R^* = 1 - 1/P^* = 1/3$ значение одного из параметров выходит на предельно допустимую величину $P(\pi, R^*) = 1$.

На рис. 11 представлена зависимость бифуркационной диаграммы вдоль кривой $\lambda(\varphi, R)$, то есть множества

$$A_\varphi(R) = \{Y(\lambda(\varphi, R)) : \varphi \in [0, 2\pi]\}$$

от масштабного множителя R . Для ясности сопряжения бифуркационных диаграмм при замыкании кривой в пространстве параметров показаны терминальные множества для $\varphi \in [0, 3\pi]$.

На этом рисунке темные слои представляют собой поведение аттрактора $Y(\lambda(\varphi, R))$ при малых значениях масштабирующего множителя R . Видно, что до $R \approx 0,015$, структурно, аттрактор вдоль кривой не меняется и представляет собой, как и в точке λ_2 , 4-цикл. При этом конкретные значения четырех точек аттрактора слегка видоизменяются, образуя кривые, соответствующие на рисунке конкретному цвету (штриховке). При $R > 0,015$ происходит точечное разрушение 4-цикла (самый светлый слой с вертикальной переходной зоной хаоса при $\varphi \approx 1,5$).

При дальнейшем увеличении масштабирующего множителя R (дальнейшем удалении от исходной точки в пространстве параметров) бифуркационные свойства вдоль кривой усложняются. На рис. 12 представлено трехмерное изображение трансформации аттрактора при увеличении множителя R до 0,02, полученное в работе [28].

На этом рисунке значение параметра φ , определяющего значения параметров на окружности, отложено по оси абсцисс. Значение величины R , определяющей радиус окружности, т.е. расстояние в пространстве параметров до

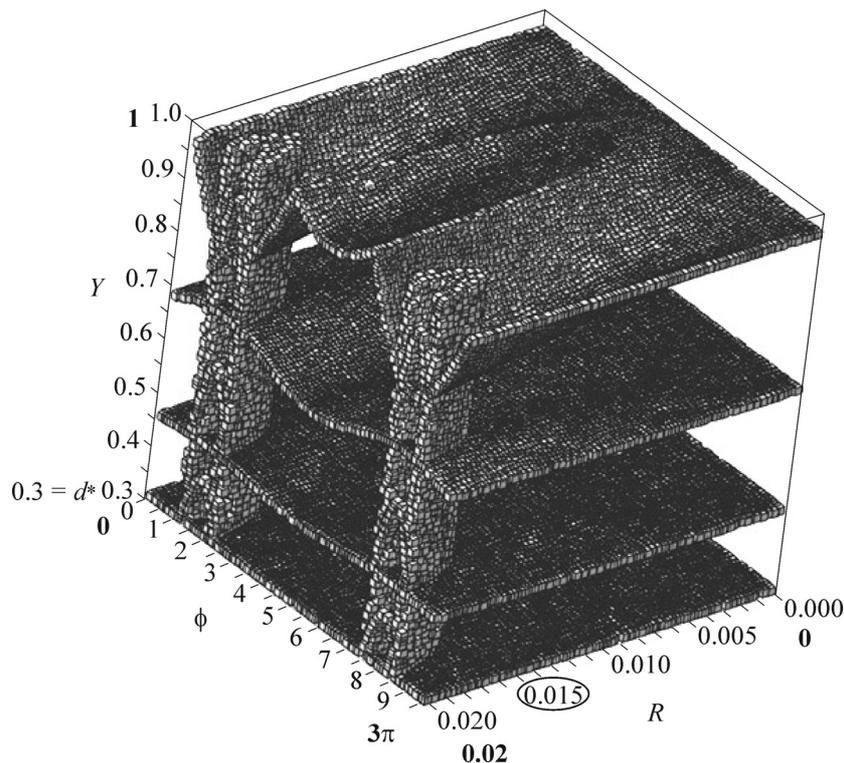


Рис. 12. Трансформация аттрактора (Y) вдоль окружности (ϕ) в пространстве параметров в зависимости от расстояния (R) до точки λ^* .

точки λ_2 , дано на оси ординат. На оси абсцисс представлено множество точек аттрактора $Y(\lambda(\phi, R))$.

Будем двигаться по оси ординат от значений $R = 0$ в сторону увеличения. Часть рисунка, определяющаяся условиями $0 \leq R \leq 0,015$, соответствует рис. 11 (величина 0,015 выделена овалом). Из рис. 12 видно, что в этой области аттрактор вдоль рассматриваемой окружности в пространстве параметров начинает деформироваться, оставаясь при этом четырехточечным. При этом верхний слой (максимальное значение в аттракторе) деформируется сильнее в области $\phi \approx 3\pi/2$.

С дальнейшим увеличением R при $\phi \approx \pi/2$ и $\phi \approx 5\pi/2$, как и на рис. 12, 4-точечный аттрактор начинает разрушаться (на рисунке возникают зоны хаоса в виде колонн), появляется множество промежуточных состояний. Однако область хаотического поведения системы вдоль величины R наступает ненадолго. Уже к $R \approx 0,02$ мы видим, что колонны, соединяющие четыре слоя аттрактора, являются пустотелыми и содержат перемиčky. Это особенно наглядно видно из рис. 13, на котором изображена бифуркационная диаграмма для $R = 0,02$, соответствующая левому нижнему «краю» рис. 12.

Из рис. 13 видно, что при $R = 0,02$ рассматриваемая бифуркационная диаграмма содержит:

- основные участки с устойчивыми 4-циклами;
- участки с 7-циклами (по числу перемиček в двух полых «колоннах» на рис. 3);
- разделяющие их небольшие интервалы высоких периодов, а также очень узкие зоны хаоса (сплошные вертикальные стенки колонн на рис. 12).

Заметим, однако, что, как уже было сказано выше, во всей рассмотренной области значений R нижнее значение в аттракторе (нижний слой на рисунке) остается неизменным и равным d^* – популяция в аттракторе всегда достигает своего минимума. Как показано ниже, это свойство при дальнейшем увеличении R сохраняется не всегда.

Траектория при динамике параметров. На рис. 14 представлено множество $A_\phi(0,2)$.

Из рисунка видно, что на большем протяжении кривой доминирует устойчивый аттрактор в виде 3-цикла, на некоторых участках его сменяет 4-цикл, в центре (при ϕ приблизительно от 3,7 до 5,4) находится зона хаоса, в которой выделяется аномальная зона (при ϕ приблизи-

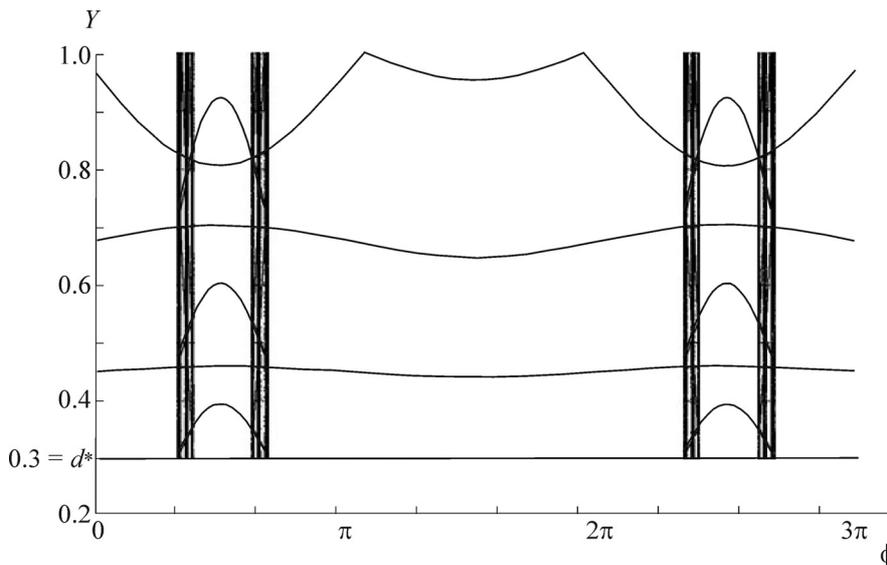


Рис. 13. Бифуркационная диаграмма вдоль контура при $R = 0,02$.

тельно от 4,2 до 4,8), когда терминальные множества не касаются ступеньки $d = 0,3$ (состояние «катастрофы голубого неба» [27]).

Приведенная бифуркационная диаграмма позволяет описывать поведение траектории сис-

темы при изменяющихся со временем параметрах.

Пусть $Y(t + 1) = F(Y(t), \lambda(t))$, где $\lambda(t) = (P(t), r(t), d)$,

$$F(t, Y, \lambda) = \begin{cases} P(t)Y, & Y \leq 1/P(t), \\ 1 - r(t)(Y - 1/P(t)), & 1/P(t) < Y \leq 1/P(t) + (1 - d)/r(t), \\ d, & 1/P(t) + (1 - d)/r(t) < Y \leq 1. \end{cases} \quad (2)$$

На рис. 15 изображена траектория системы (2) для $Y(0) = d$ при условии $d(t) = 0,3$ и

$$P(t) = P^*(1 + \sin(3\pi t/1500)R),$$

$$r(t) = r^*(1 + \cos(3\pi t/1500)R), t = 0, 1, \dots, 1500.$$

Из рисунка видно, что траектория отражает все типичные свойства бифуркационной диаграммы $A_\phi(0,2)$ с рис. 14: смену 3- и 4-циклов, переходные хаотические зоны и аномальную область (в районе t от 620 до 820), в которой значения фазы $Y(t)$ находятся строго выше ступеньки $d = 0,3$.

Вернемся теперь к исходной задаче моделирования популяции леммингов. Приведенный анализ устойчивости и бифуркационных свойств вдоль кривой в пространстве параметров может быть интерпретирован как пример исследования поведения популяции при глобальных (столетних и тысячелетних) биосферных ритмах, сопровождающихся изменением свойств природного окружения. Как видно из приведенного примера, наличие временных пе-

риодов с экстремальными для моделируемого сообщества условиями проживания (хаотическая динамика в переходных зонах и области «катастрофы голубого неба») не приводит к вырождению популяции, а экстремальные режимы существования сменяются вполне упорядоченным поведением со структурами в виде популяционных циклов малого периода.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Исследование моделей тундрового сообщества выявило ведущую роль популяции леммингов в формировании колебаний численности животных этого сообщества [10,11,14]. Для описания этой популяция оказалось возможным использовать разностное уравнение нового типа [11,21], при этом был обоснован не только вид уравнения, но и выбор бифуркационного параметра d – емкость оптимального биотопа [10,11].

Вычислительный эксперимент позволил найти области, в которых поведение траекторий слабо зависит от выбранного показателя, и

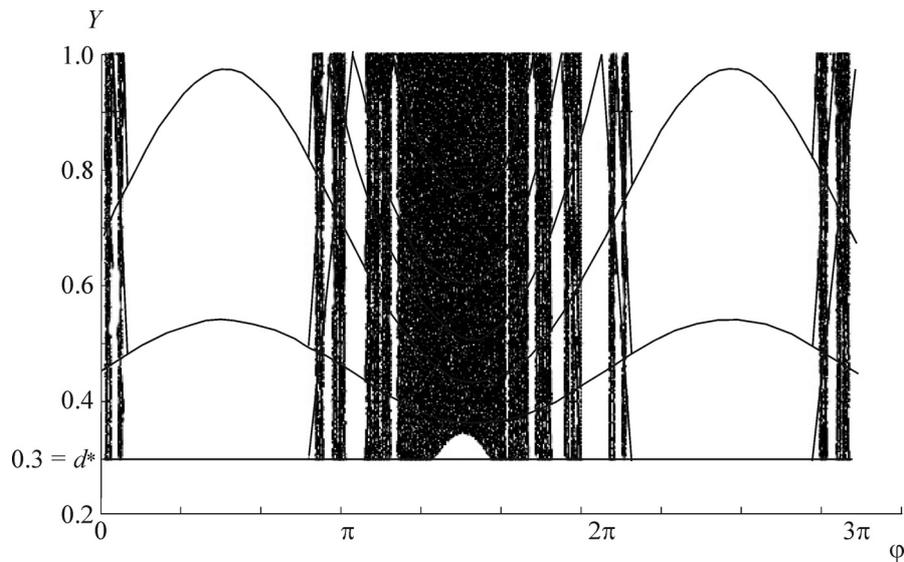


Рис. 14. Бифуркационная диаграмма вдоль кривой при $R = 0,2$.

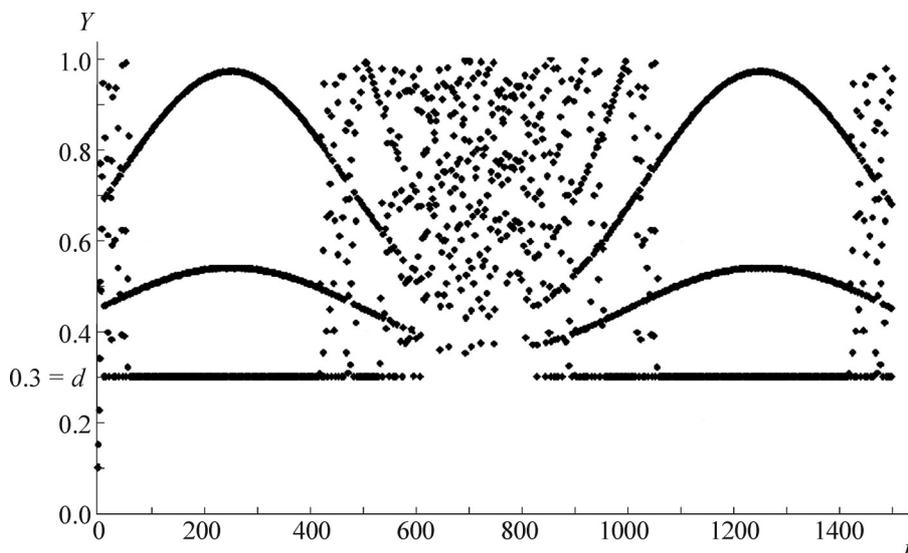


Рис. 15. Траектория для биосферного ритма в пространстве параметров.

выявить области, для которых характерна высокая чувствительность к вариации этого показателя. При этом при переходе от одной зоны стабильности к другой, период колебаний изменяется в порядке натурального ряда, в то же время, переходные зоны характеризуются более сложными динамическими режимами [21]. Важным аспектом проведенных исследований является изучение этих переходных зон («упорядочение хаоса»), в которых с высокой плотностью чередуются циклы больших периодов, значения которых меняются при малом варьировании бифуркационного параметра.

Известные из литературы исследования логистического уравнения, которым придают универсальное значение [29], не концентрируют внимание на наличии зон стабильности и переходных зон, хотя их и можно обнаружить на результатах вычислительных экспериментов [29]. Обычно за каскадом удвоений периода циклов наблюдается усложнение динамики и, при появлении цикла периода три, существуют циклы всех периодов, что в работах [30,31] трактуется как возникновение хаоса.

Использование разностных уравнений кусочно-линейного типа позволяет упростить вы-

числения при определении последовательности возникновения циклов еще и потому, что все циклические точки принадлежат множеству рациональных чисел.

Получение в результате расчетов последовательности возникновения циклов дает наглядный пример выполнения порядка Шарковского [20], что затруднительно получить в случае логистического отображения.

Использованная в работе технология исследования методами аппроксимации неявно заданных множеств позволила изучить устойчивые и бифуркационные режимы существования популяции в широких пределах всевозможных сочетаний значений параметров экологического генезиса, т.е. провести исследование всего рассматриваемого класса дискретных отображений. В частности, был приведен пример построения бифуркационной диаграммы вдоль контура в пространстве параметров, что позволяет рассмотреть случай динамики популяции с учетом временного дрейфа моделирующего отображения в рамках данного класса. В частности, было показано, что наличие биосферных ритмов, включающих временные периоды с экстремальными для моделируемого сообщества условиями проживания (хаотическая динамика и области «катастрофы голубого неба» [27]), не приводит к вырождению популяции, а экстремальные режимы существования сменяются вполне упорядоченным поведением со структурами в виде популяционных циклов малого периода. С нашей точки зрения, это наглядно свидетельствует о том, что квазихаотическое состояние, в отличие от подлинного хаоса, не разрушает систему, но позволяет ей быстро возвращаться к упорядоченному поведению при наступлении соответствующих благоприятных условий.

Рассмотренная технология может быть использована для детального изучения малых периодов цикла, а также для исследования классов значительно более сложных отображений, моделирующих популяционное поведение. Рассмотрению этих вопросов планируется посвятить отдельные публикации.

Результаты исследований, приведенные в разделах «Обоснование и построение модели» и «Дискретная модель популяции», получены в рамках Программы фундаментальных исследований государственных академий наук на 2013–2020 годы (тема 01201363825). Остальные результаты получены за счет средств Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 18-01-00465а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В. Вольтерра, *Математическая теория борьбы за существование* (Наука, М., 1976).
2. A. J. Lotka, *Elements of physical biology* (Williams and Wilkins, Baltimor, 1925).
3. P. Turchin, *Complex population dynamics: a theoretical/empirical synthesis* (Princeton University Press, Princeton, Oxford, 2003).
4. А. Н. Колмогоров, в сб. *Проблемы кибернетики* (Наука, М., 1972), вып. 25, сс. 100–106.
5. Г. Ю. Ризниченко и А. Б. Рубин, *Математические модели биологических продукционных процессов* (Изд-во МГУ, М., 1993).
6. Ю. М. Свиричев и Д. О. Логофет, *Устойчивость биологических сообществ* (Наука, М., 1978).
7. А. Д. Базыкин, *Математическая биофизика взаимодействующих популяций* (Наука, М., 1985).
8. С. В. Фомин и М. Б. Беркенблит *Математические проблемы в биологии* (Наука, М., 1973).
9. Дж. Форрестер, *Мировая динамика* (Наука, М., 1978).
10. Д. А. Саранча, *Количественные методы в экологии. Биофизические аспекты и математическое моделирование* (МФТИ, М., 1997).
11. В. Н. Глушков и Д. А. Саранча, *Автоматика и телемеханика*, № 2, 94 (2013).
12. Г. К. Каменев, Н. А. Лысенко, О. П. Люлякин и др., *Использование методов математического моделирования для анализа экологических объектов* (ВЦ РАН, М., 2015).
13. G. K. Kamenev, O. P. Lyulyakin, D. A. Sarancha, et al., *Russ. J. Numer. Anal. Math. Modelling* **31** (5), 253 (2016).
14. В. А. Орлов, Д. А. Саранча и О. А. Шелепова, *Экология* **2**, 43 (1986).
15. F. A. Pitelka and G. O. Batzli, *Acta Theriol.* **52** (3), 323 (2007).
16. Ф. Б. Чернявский, *Природа*, № 10, 34 (2002).
17. О. Ф. Садыков и И. Е. Бененсон, *Динамика численности мелких млекопитающих: концепции, гипотезы, модели* (Наука, М., 1992).
18. T. Oksanen, L. Oksanen, J. Dahlgren and J. Olofsson, *Evol. Ecol. Res.* **10**, 415 (2008).
19. В. А. Костицын, *Эволюция атмосферы, биосферы и климата* (Наука, М., 1984).
20. А. Н. Шарковский, *Разностные уравнения и динамика численности популяций* (Ин-т математики АН УССР, Киев, 1982).
21. Э. В. Недоступов, Д. А. Саранча, Е. Н. Чигерев и Ю. С. Юрезанская, *Докл. РАН* **430** (1), 23 (2010).
22. V. A. Bushenkov, O. L. Chernykh, G. K. Kamenev, and A. V. Lotov, *Pattern Recognition and Image Analysis* **5** (1), 35 (1995).
23. Г. К. Каменев и Д. Л. Кондратьев, *Математическое моделирование* **4** (3), 105 (1992).
24. А. В. Лотов, В. А. Бушенков, Г. К. Каменев и О. Л. Черных, *Компьютер и поиск компромисса. Метод достижимых целей* (Наука, М., 1997).

25. Г. К. Каменев, Журн. вычисл. матем. и матем. физ. **41** (11), 1751 (2001). *дня рождения академика Н.Н. Моисеева*, под ред. И. Г. Поспелова (ФИЦ ИУ РАН, М., 2017), сс. 315–326.
26. A. V. Lotov, V. A. Bushenkov, and G. K. Kamenev, *Interactive Decision Maps. Approximation and Visualization of Pareto Frontier* (Kluwer Academic Publishers, Boston, 2004).
27. Yu. Ilyashenko and W. Li, *Nonlocal bifurcations* (Amer. Math. Society, Providence, R.I., 1999).
28. Г. К. Каменев, в сб. *Моделирование коэволюции природы и общества: проблемы и опыт. К 100-летию со*
29. B. Hasselblat and A. Katok, *A First Course in Dynamics: with a Panorama of Recent Developments* (Cambridge University Press, 2003).
30. R. M. May, *Science* **186**, 645 (1974).
31. T.-Y. Li and J. A. Yorke, *Amer. Math. Monthly* **82** (10), 985 (1975).

Investigation of the Class of One-Dimensional Unimodal Mappings Obtained in the Modeling of the Lemming Population

G.K. Kamenev*, D.A. Sarancha*, and V.O. Polyanovsky**

*Dorodnitsyn Computing Centre, Russian Academy of Sciences, ul. Vavilova 40, Moscow, 119333 Russia

**Engelhardt Institute of Molecular Biology, Russian Academy of Sciences, ul. Vavilova 32, Moscow, 119991 Russia

The paper analyzes the model describing abrupt periodic changes in the population size of lemmings, depending on the physical characteristics of environmentally important parameters of the habitat. Earlier, the main result of the modeling of the dynamics of the population size of tundra animals was the substantiation of a new class of one-dimensional unimodal mappings that mapped a state space into itself. When studying this class of mappings, the main attention is focused on the dependence of different trajectories on various regimes as control parameter is varied. This can be done with the help of bifurcation diagrams which display some characteristic property of the asymptotic solution of a dynamical system. Methods of approximation of implicitly defined sets are used for numerical analysis of maps; trajectory tubes, attractors and bifurcation diagrams are constructed. For instance, for this class of mappings, we showed how to obtain a bifurcation diagram along the contour at given parameter values, providing an opportunity to observe the dependence of the behavior of trajectories on changes in the parameters of the modeling mapping. Thus, the use of the mapping of the type considered for the model description of the lemming population allowed us to carry out a study on the influence of long-term biospheric rhythms, including time periods and extreme life conditions on the future of these populations. It is shown that these effects do not lead to degeneration of the population: the arising periods with chaotic dynamics in extreme conditions are replaced by a well-ordered behavior with structures in the form of population cycles of a small period.

Keywords: biosphere rhythms, discrete mapping, attractors, methods of approximation of implicitly specified sets, trajectory tubes, bifurcation diagrams