

РАСПРОСТРАНЕНИЕ АВТОВОЛН В КАПИЛЛЯРАХ, ЗАПОЛНЕННЫХ ДВИЖУЩЕЙСЯ ВЯЗКОЙ ВОЗБУДИМОЙ СРЕДОЙ

© 2015 г. В.А. Давыдов, Н.В. Давыдов

Московский государственный технический университет радиотехники, электроники и автоматики,
119454, Москва, просп. Вернадского, 78

E-mail: davydov@mirea.ru, vadavydov@yandex.ru

Поступила в редакцию 23.11.14 г.

Рассмотрено распространение автоволн в движущейся жидкой возбудимой среде. В рамках кинематического подхода определены формы автоволновых фронтов для случаев Куэттова и Пуазейлева течений в плоских капиллярах. Показано, что автоволновые фронты должны рваться при достижении скоростью потока определенных критических значений. Исследована возможность появления диодного эффекта – односторонней проводимости капилляра. Результаты проведенных численных экспериментов находятся в хорошем соответствии с теорией.

Ключевые слова: нелинейность, автоволны, капилляры, кривизна, возбудимые среды.

Автоволновые процессы в активных, в частности, возбудимых средах играют существенную роль во многих нелинейных физических, химических и биологических системах [1]. Возбудимые среды состоят из локально связанных друг с другом активных элементов, способных формировать импульс в ответ на приход внешнего сигнала. Импульсы, распространяющиеся в возбудимых средах, часто называют автоволнами. Свойствами возбудимых сред обладают нервные и мышечные ткани, колонии микроорганизмов, ряд химических растворов и гелей (в частности, знаменитая реакция Белоусова–Жаботинского), магнитные сверхпроводники с током и другие системы.

Как правило, возбудимые среды описываются системой нелинейных параболических уравнений типа «реакция–диффузия»:

$$\frac{\partial \vec{U}}{\partial t} = \vec{F}(\vec{U}) + \widehat{D} \Delta \vec{U}, \quad (1)$$

где \vec{U} – вектор состояния элементарного объема возбудимой среды. Так, в химической среде его компоненты представляют собой концентрации реагентов, матрица \widehat{D} определяет коэффициенты диффузии, а нелинейная функция $\vec{F}(\vec{U})$ задает скорости химических реакций в элементарном объеме. В других системах компоненты вектора состояния могут иметь смысл температуры, потенциала и т.д., а элементы матрицы \widehat{D} могут быть коэффициентами теплопроводности или проводимости. Чаще всего для моделирования пользуются двухкомпонентной моделью, когда

система (1) состоит из двух уравнений. В этом случае компоненты вектора состояния называются активатор и ингибитор.

Многие возбудимые среды представляют собой жидкости. Макроскопические движения в такой жидкости могут оказывать самое существенное влияние на характер протекающих в ней автоволновых процессов. Волновые фронты могут деформироваться и рваться [2,3], что порой приводит к хаотизации процессов.

В настоящей работе мы исследуем автоволновые фронты, распространяющиеся в плоских капиллярах, заполненных движущейся вязкой возбудимой средой. Градиенты скорости движения среды, возникающие вследствие вязкости, как мы увидим, искажают форму стационарного автоволнового фронта и приводят к появлению новых интересных эффектов. Отметим, что ряд эффектов в капиллярах, заполненных покоящейся активной средой, рассмотрен в работе [4].

Для получения аналитических результатов мы воспользуемся аппаратом так называемого кинематического подхода [5,6]. При кинематическом описании автоволна задается указанием линии ее фронта. Каждый участок фронта смещается по нормали со скоростью $V = V(k)$, определяемой локальной кривизной k на этом участке. Для слабоискривленных фронтов зависимость $V(k)$ линейна:

$$V(k) = V_0 - Dk, \quad (2)$$

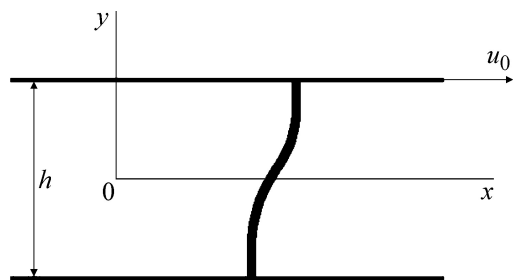


Рис. 1. Форма фронта в плоском капилляре с движущейся верхней плоскостью (течение Куэтта).

где V_0 – скорость плоского фронта, D – коэффициент диффузии активатора. Форма фронта задается натуральным уравнением, которое связывает кривизну линии фронта и длину дуги l . Эволюция автоволны на плоскости описывается основным кинематическим уравнением, которое для фронта без разрывов имеет следующий вид:

$$\frac{\partial k}{\partial t} + \frac{\partial k}{\partial l} \int_0^l k V d l' + k^2 V + \frac{\partial^2 V}{\partial l^2} = 0. \quad (3)$$

ПЛОСКИЙ КАПИЛЛЯР С КУЭТТОВЫМ ТЕЧЕНИЕМ

Рассмотрим плоский капилляр, образованный двумя плоскостями, параллельными оси x и перпендикулярными оси y (рис. 1) и расположенными на расстоянии h друг от друга.

Пусть верхняя плоскость движется горизонтально вдоль оси x со скоростью u_0 . В этом случае реализуется так называемое течение Куэтта с линейной зависимостью скорости потока u от координаты y (начало координат $y = 0$ находится на оси симметрии капилляра):

$$u = u_0 \left(\frac{y}{h} + \frac{1}{2} \right). \quad (4)$$

Рассмотрим стационарный автоволновой фронт, распространяющийся вдоль оси x . В случае, когда верхняя плоскость неподвижна, фронт представляет собой движущуюся со скоростью V_0 часть плоскости, параллельную оси y . При увеличении u_0 фронт будет постепенно искривляться. Найдем форму линии сечения фронта плоскостью $z = \text{const}$. Аналитическое решение основного уравнения кинематики (3) удастся получить в случае слабо искривленных фронтов (для малых значений u_0). В этом случае любой участок сечения фронта распространяется практически параллельно оси x , а его длина l (отсчитываемая от оси капилляра) прак-

тически совпадает с координатой y . Скорость участка сечения фронта имеет вид:

$$V = V_0 - Dk + u_0 \left(\frac{y}{h} + \frac{1}{2} \right). \quad (5)$$

При этом общее решение линейризованного кинематического уравнения (3) оказывается весьма простым: $k = k_0 + Ay$, где k_0 и A – некоторые константы. Эти константы легко найти из следующих соображений. Во-первых, вследствие непроницаемости границ капилляра, автоволновой фронт должен подходить к ним по нормали. Это значит, что $\frac{dV}{dy} = 0$ при $y = \pm h/2$. Дифференцируя соотношение (5), находим константу A : $A = \frac{u_0}{Dh}$. Кроме того, касательные к фронту в точках $y = \pm h/2$ параллельны друг

другу. Это означает, что $\int_{-h/2}^{h/2} k dy = 0$ (напомним,

что этот интеграл представляет собой приращение угла наклона касательной в точке $y = h/2$ по отношению к точке $y = -h/2$). Из равенства нулю этого приращения следует, что $k_0 = 0$. Таким образом, натуральное уравнение, описывающее форму линии сечения фронта, имеет следующий вид:

$$k = \frac{u_0}{Dh} y, \quad (6)$$

а само сечение фронта представляет собой часть спирали Корню. На рис. 1 изображена типичная форма этого сечения, полученная в рамках кинематического подхода. Форма сечения стационарного фронта, распространяющегося против оси x , получается из уравнения (6) простым изменением знака скорости u_0 .

Скорость фронта относительно неподвижной системы отсчета получается подстановкой уравнения (6) в (5):

$$V = V_0 + \frac{u_0}{2}. \quad (7)$$

Определение формы сечения фронта и сравнение его с уравнением (6), а также проверка простого соотношения уравнения (7) являлись одной из целей наших численных экспериментов с двухкомпонентной системой (1), результаты которых приводятся ниже.

ПЛОСКИЙ КАПИЛЛЯР
С ПУАЗЕЙЛЕВЫМ ТЕЧЕНИЕМ

Рассмотрим теперь плоский капилляр, жидкая возбудимая среда в котором движется под воздействием разности давлений на входе и выходе. Такое течение называется пуазейлевым. При этом зависимость скорости среды от координаты y описывается квадратичной функцией [7]:

$$u = u_0 \left(1 - \frac{4}{h^2} y^2 \right), \quad (8)$$

где u_0 – скорость жидкости в центре потока. Решением линеаризованного кинематического уравнения является следующая зависимость кривизны от координаты y :

$$k = \frac{u_0}{3D} \left(1 - 12 \frac{y^2}{h^2} \right). \quad (9)$$

Соответствующая форма фронта представлена на рис. 2. Обратим внимание на то, что кривизны в центре капилляра и на его границах отличаются по абсолютной величине в два раза. Что касается формы фронта, распространяющегося против оси x , она получается из уравнения (9) заменой знака u_0 . Используя уравнение (9), можно получить скорость фронта относительно неподвижной системы отсчета:

$$V = V_0 + \frac{2}{3} u_0. \quad (10)$$

Соотношение уравнения (10) наряду с (7) может быть проверено в численных экспериментах на уравнениях «реакция–диффузия».

КРИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА
И ДИОДНЫЙ ЭФФЕКТ

В работе [8] В.С. Зыков показал, что при достаточно большой кривизне фронта, превышающей критическое значение k_{cr} , устойчивое распространение автоволны становится невозможным. При этом фронт, как правило, рвется в области, где его кривизна превышает критическую.

Из уравнений (6) и (9) следует, что при увеличении скорости u_0 кривизна фронта увеличивается. Мы, следовательно, вправе ожидать, что при увеличении скорости u_0 до некоторого критического значения u_{cr} кривизна фронта превысит k_{cr} и волна разорвется. В случае течения (4) величина критической скорости может быть получена из уравнения (6) при подстановке k_{cr} вместо k ($y = h/2$):

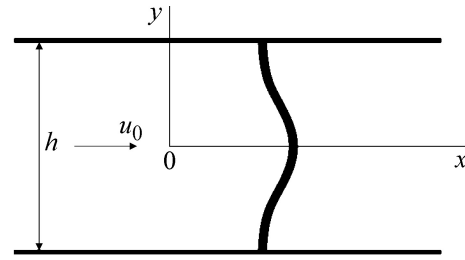


Рис. 2. Форма фронта в плоском капилляре в случае течения Пуазейля.

$$u_{cr} = 2Dk_{cr}. \quad (11)$$

В случае фронта, распространяющегося против оси x , критическая кривизна также описывается соотношением (11). Таким образом, устойчивое распространение стационарного фронта в случае течения (4) возможно только, если скорость u_0 достаточно мала и не превышает значения $2Dk_{cr}$. Отметим также, что критическая скорость не зависит от ширины капилляра.

Еще более интересный результат получается для пуазейлева течения (8). Из уравнения (9) следует, что самое большое значение кривизны достигается в центре капилляра, если волна распространяется вдоль потока. Подстановка $k = k_{cr}$ в уравнение (9) при $y = 0$ дает значение критической скорости: $u_{cr1} = 3Dk_{cr}$, и при достижении потоком этой скорости волна должна разорваться в центре капилляра. Если же фронт распространяется против потока, то критическая кривизна будет достигнута вблизи границ капилляра ($y = \pm h/2$), а соответствующая критическая скорость будет вдвое меньше: $u_{cr2} = \frac{3}{2} Dk_{cr}$. Таким образом, в интервале скоростей $\frac{3}{2} Dk_{cr} < u_0 < 3Dk_{cr}$ капилляр с пуазейлевым течением работает как автоволновой диод, допуская устойчивое распространение волн только в одном направлении, а именно вдоль потока жидкости. Отметим, что диодные свойства обнаружены у некоторых неоднородных возбудимых систем [9], а также у ряда искривленных поверхностей, по которым могут распространяться автоволновые фронты [10].

ЧИСЛЕННЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ

Для проверки приведенных выше аналитических предсказаний свойств автоволн в плоских капиллярах с различными типами течения возбудимой среды мы провели компьютерное моделирование с использованием кусочно-ли-

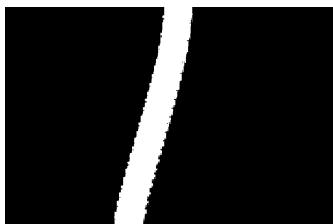


Рис. 3. Форма фронта волны для куэттова потока, полученная в ходе компьютерного эксперимента (отношение $u_0/V_0 = 0,2$).

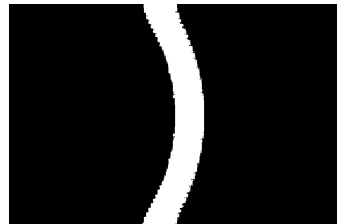


Рис. 4. Форма фронта волны для пуазейлева потока, полученная в ходе компьютерного эксперимента (отношение $u_0/V_0 = 0,2$).

нейной модели для двухкомпонентной (активатор и ингибитор) возбудимой среды, которая достаточно часто используется в современных работах по исследованию автоволновых структур.

Модель описывается двумя дифференциальными уравнениями:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = F_u(u, v) + D_u \Delta u \\ \frac{\partial v}{\partial t} = \varepsilon F_v(u, v) + D_v \Delta v, \end{cases} \quad (12)$$

где u и v – концентрация активатора и ингибитора соответственно, D_u и D_v – коэффициенты их диффузии в среде. Функции $F_u(u, v)$ и $F_v(u, v)$ задаются следующим образом:

$$F_u(u, v) = f(u) + v,$$

$$f(u) = \begin{cases} -uk_1, & u < \sigma, \\ (u - a)k_f, & \sigma \leq u \leq 1 - \sigma, \\ (1 - u)k_2, & 1 - \sigma < u, \end{cases}$$

$$k_1 = \frac{a - \sigma}{\sigma} k_f, \quad k_2 = \frac{1 - \sigma - a}{\sigma} k_f,$$

$$F_v(u, v) = \begin{cases} k_g u - v, & k_g u - v \geq 0, \\ k_\varepsilon (k_g u - v), & k_g u - v < 0. \end{cases}$$

При численном моделировании мы использовали следующие значения параметров: $\varepsilon = 0,47$, $\sigma = 0,01$, $a = 0,1$, $k_f = 1,7$, $k_g = 2,0$, $k_\varepsilon = 1,0$, $D_u = 3,0 \cdot 10^{-4}$, $D_v = 0,0$.

Моделирование проводилось путем решения уравнений (12) методом Рунге–Кутты на матрице 150×51 и 150×101 точку. Серии компьютерных экспериментов проводились для случаев куэттова и пуазейлева течения. Для куэттова потока лапласиан выглядит следующим образом:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - u_0 \left(\frac{y}{h} + \frac{1}{2} \right) \frac{\partial}{\partial x}.$$

Для пуазейлева потока имеем соответственно:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} - u_0 \left(1 - \frac{y^2}{(h/2)^2} \right) \frac{\partial}{\partial x}.$$

На рис. 3 и 4 показаны формы стационарных фронтов для куэттова и пуазейлева потока, полученные в ходе компьютерного моделирования.

На рис. 5 показана зависимость скорости фронта V за вычетом скорости плоского фронта V_0 от максимальной скорости потока u_0 (т.е. на графике показана зависимость $V(u_0) - V_0$) для куэттова потока (ширина капилляра равна 51) и для пуазейлева потока (ширина капилляра равна 51 и 101), полученная в ходе компьютерного моделирования. Графики заканчиваются в точках, где фронты рвутся.

Для пуазелевого потока волна, двигаясь по направлению потока, достигает критической кривизны при больших значениях u_0 , чем при движении против потока.

На рис. 6–8 показана эволюция разрывов автоволновых фронтов при достижении скоростью потоков соответствующих критических значений.

Сравним результаты компьютерного моделирования и предсказания кинематической теории.

1. Моделирование хорошо подтверждает выводы кинематического подхода об универсальных зависимостях скорости фронтов от скорости u_0 (см. уравнения (7), (10)).

2. Формы фронтов, полученные в результате численных экспериментов, весьма хорошо описываются натуральными уравнениями (6) и (9).

3. Подтверждается также наличие критических скоростей при распространении фронтов как вдоль, так и против течения жидкости.

4. В случае распространения фронтов в пуазейлевых потоках наблюдается выраженный ди-

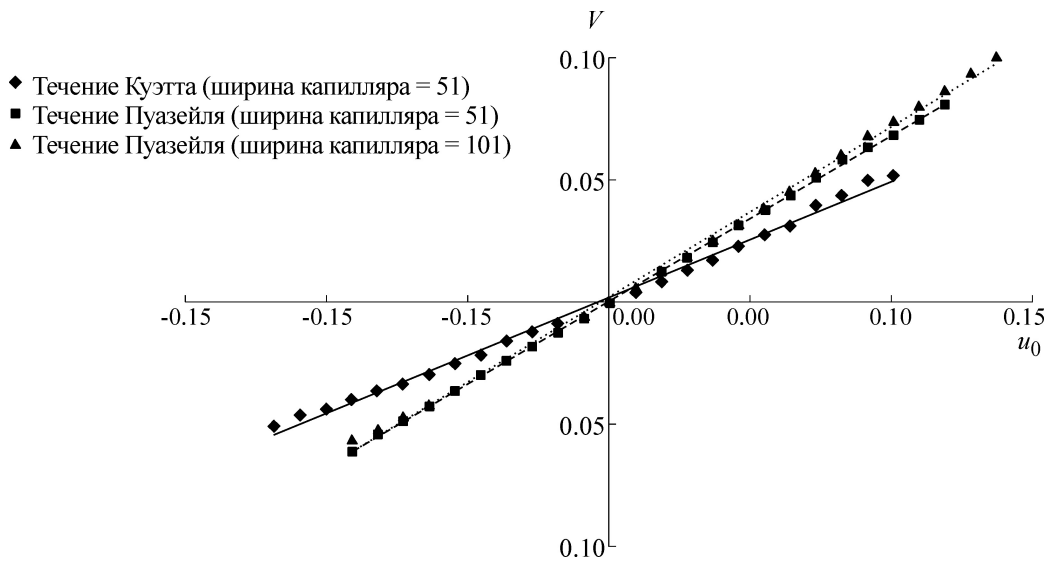


Рис. 5. Графики зависимости приращения скорости волны $V(u_0) - V_0$ от скорости потока u_0 для куэттова и пуазейлева потоков по данным компьютерных экспериментов.



Рис. 6. Разрыв фронта при движении волны по направлению куэттова потока.



Рис. 7. Разрыв фронта при движении волны по направлению пуазейлева потока.

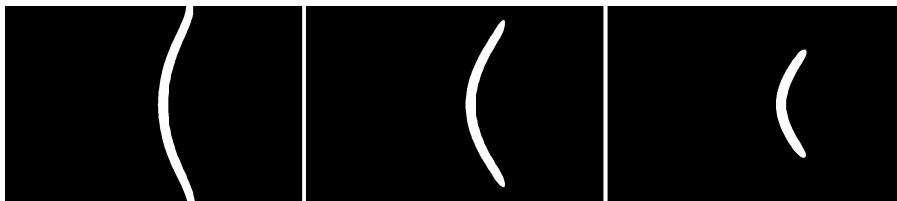


Рис. 8. Разрыв фронта при движении волны против направления пуазейлева потока.

одный эффект. А именно, волна, распространяющаяся вдоль потока, рвется и исчезает при большей скорости u_0 , чем волна, распространяющаяся в противоположном направлении. Однако отношение соответствующих критиче-

ских скоростей (примерно 1,5) отличается от предсказаний кинематики (напомним, что в рамках линеаризованной кинематической теории это отношение равно двум). Это расхождение, без сомнения, связано с тем, что в кри-

тических случаях фронты весьма сильно искривлены, и при этом линейное приближение, использованное нами для получения простых аналитических результатов, работает не слишком точно. С этим же связан факт наблюдения слабого диодного эффекта при распространении фронтов в куэттовых потоках.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе мы исследовали распространение автоволн в плоских капиллярах, заполненных движущейся вязкой возбудимой средой. При этом хочется отметить два обстоятельства.

Во-первых, за рамками настоящей статьи осталось исследование волн, распространяющихся в капиллярах круглого сечения, хотя соответствующие теоретические и численные расчеты нами уже проведены. Эти результаты будут опубликованы в отдельной статье.

Кроме того, в численных экспериментах в плоских и круглых капиллярах нами обнаружены осциллирующие режимы, когда автоволновые фронты теряют устойчивость, рвутся, а потом опять восстанавливаются до первоначальной формы. Этот процесс периодически повторяется, несмотря на то, что скорость по-

тока не зависит от времени. Описание этих эффектов также требует отдельной публикации.

Авторы благодарны В.С. Зыкову и С.В. Зыкову за плодотворные дискуссии.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. A. S. Mikhailov, *Foundations of Synergetics I. Distributed Active Systems* (Springer, Berlin, 1994).
2. V. A. Davydov, N. V. Davydov, M. V. Stolyarov, and T. Yamaguchi, in: *Abstracts of International conference «Criteria of self-organization in physical, chemical and biological system»* (Moscow – Suzdal, Russia, 1995), p. 119.
3. V. A. Davydov, N. V. Davydov, V. G. Morozov, et al., *Condensed Matter Physics* **39**, 565 (2004).
4. A. Toth, V. Gaspar, and K. Showalter, *J. Phys. Chem.* **98**, 522 (1994).
5. В. А. Давыдов, В. С. Зыков и А. С. Михайлов, *Успехи физ. наук* **161**, 45 (1991).
6. A. S. Mikhailov, V. A. Davydov, and V. S. Zikov, *Physica D* **70**, 1 (1994).
7. Л. Д. Ландау и Е. М. Лифшиц, *Гидродинамика* (Наука, М., 1986).
8. В. С. Зыков, *Биофизика* **25**, 888 (1980).
9. K. I. Agladze, R. R. Aliev, T. Yamaguchi, and K. J. Yoshikawa, *J. Phys. Chem.* **100**, 138 (1996).
10. V. A. Davydov, V. G. Morozov, and N. V. Davydov, *Phys. Lett. A* **267**, 326 (2000).

Propagation of Autowaves in Capillaries Thick with Moving Viscous Excitable Medium

V.A. Davydov and N.V. Davydov

Moscow State Technical University of Radio Engineering, Electronics and Automation, prosp. Vernadskogo 78, Moscow, 119454 Russia

We consider the propagation of autowaves in the moving liquid excitable medium. The shapes of the autowave fronts in cases of the Poiseuille and Couette flows are determined in flat capillaries within a kinematic approach. We show the existence of a critical velocity for the flows above which the autowave fronts should break off. The possibility of a diode effect – the one-way capillary conductivity – is studied. The results of computer simulations are in good agreement with the theoretical predictions.

Key words: non-linearity, autowaves, capillaries, curvature, excitable media