

## О ДВУХ СОПРЯЖЕННЫХ (БИО)ПОВЕРХНОСТЯХ, ОПИСЫВАЕМЫХ В ТЕРМИНАХ РАСШИРЕНИЯ ЗАКОНА ТРЕНИЯ КУЛОНА–АМОНТОНА И ЕГО ДЕЙСТВИТЕЛЬНОЙ ПРИМЕНИМОСТИ ДЛЯ БИОТРИБОЛОГИИ В НАНОМАСШТАБЕ

© 2015 г. А. Гадамски, Дж. Хладысовски\*

*Институт математики и физики Университета технологии и наук о жизни,  
PL 85-796, Быдгощ, ал. проф. С. Калиского, 7, Польша*

*E-mail: agad@utp.edu.pl*

*\*Факультет фармакологии Вроцлавского медицинского университета,  
PL 50-140, Вроцлав, пл. Б. Нанкиера, 1, Польша*

*E-mail: jerzy.hladyzowski@umed.wroc.pl*

Поступила в редакцию 18.05.15 г.

После доработки 23.06.15 г.

Предложено расширение закона Кулона–Амонтона на примере схемы  $n$ -го уровня взаимодействия, включая упрощенную перенормировку. Коэффициент трения получен в общей экспоненциальной (нелинейной) форме, характеристика практически бесконечного (или для многих тел) уровня карты взаимодействия. Тем не менее его применение в случае гидратационного отталкивания двухслойной системы, склонной к облегченной смазке, принимается как линейно ограниченное, хотя и с включением решающего фактора отталкивающей силы/давления. Также учтены некоторые перспективы по отношению к смежным системам, лежащим существенно за пределами биотрибологических вопросов.

*Ключевые слова: биотрибология, закон Кулона–Амонтона, трение в биологических системах.*

Трение и сопровождающие его явления смазывания (а также износа) повсеместно распространены в естественной и технологической среде. Их глубокое понимание может сэкономить много напрасных усилий по предотвращению загрязнения окружающей среды и (био)деградации ненужных материалов. Оно также дает перспективы для улучшения состояния здоровья человека, например в частном случае функционирования суставных хрящей, ведь так важно, чтобы это естественное устройство было способно функционировать должным образом [1].

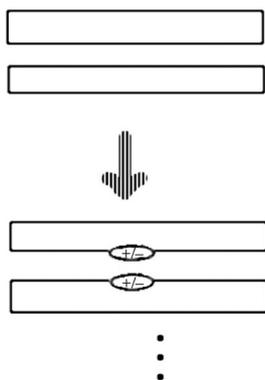
Принято считать, что закон Кулона–Амонтона показывает меру действия взаимного статического трения поверхностей, происходящего между двумя противостоящими поверхностями и количественно измеряемого как безразмерная величина  $\mu_s$ . Эта величина является отношением абсолютных значений двух сил. Одна из них является силой трения  $F$ , тогда как другая, приложенная либо в нормальном либо в латеральном направлении (вызывая, возможно, инициацию сдвига) к поверхности, называется на-

грузкой и обозначается  $L$ . Таким образом, в соответствии с законом Кулона–Амонтона получаем

$$\mu_s = \frac{F}{L}. \quad (1)$$

Можно допустить, что уравнение (1) представляет собой эмпирический закон и не содержит какой-либо информации о специфических свойствах трущихся поверхностей, таких как, например: а) их шероховатости; б) реальном контакте обеих поверхностей при трении; в) их атомном и/или молекулярном составе и, наконец, г) соответствующей внушительной карте взаимодействий между атомами (ионами; диполями) и/или молекулами, имеющими наиболее общие свойства притяжения против отталкивания ван-дер-ваальсова, электростатического, гидрофобного или даже квантово-механического происхождения [1]. Более того, так называемая метрическая шкала легко применимого закона Кулона–Амонтона варьирует в диапазоне величин от макроскопического до наименьшего, например (суб)миллиметрового или даже нанометрового уровня [1–5].

Сокращение: СКТ – статический коэффициент трения.



Две сближающиеся твердотельные поверхности (или границы раздела, стремящиеся к фрикционно противоположному воздействию), обладающие бесструктурными ( $n = 0$ ) и структурированными ( $n > 0$ , вплоть до  $n \rightarrow \infty$ ) характеристиками взаимодействия (символически отображенные знаком  $\pm$ , начинающиеся с  $n = 1$ , и затем многократно возрастающие; см. три точки, поставленные по вертикали в нижней части). Стрелка показывает подключение  $n$ -го уровня взаимодействия, в частности соответствующее сценариям, описанным в работах [2,3,8–10]. Оно начинается с важного линейного подхода (уравнение (10),  $n = 1$ ). Схема показывает в краткой форме наш теоретический эксперимент [6], посвященный трению и, предположительно, (био)смазке, который неплохо соответствует эксперименту, поставленному менее абстрактным образом для несмачиваемых, в принципе, двухповерхностных противостоящих систем [4] и расширяемому до состояния смачивания с участием ответных частей [1–3,8–10].

Не составляет особой проблемы провести несколько измерений макроскопических (преимущественно эластичных) твердых систем, чтобы определить с желаемой точностью величину статического коэффициента трения (СКТ) –  $\mu_s$  (см. уравнение (1)). В условиях сухого трения большинство значений  $\mu_s$  будет лежать в интервале  $\mu_s \in [0,01; 2,0]$ , но, как правило, не превышая предела  $\mu_s = 1,0$ ; эту величину также можно оценить с помощью наклонной плоскости с углом  $\alpha$ , на которой размещен прямоугольный твердый образец, подвергаемый исследованию на трение, – получаем результат, знакомый по учебникам:  $\mu_s = \text{tg}(\alpha)$ , где  $\alpha = \pi/4$ . (В условиях без сухого трения, характерных для вязкоупругих систем при трении, динамическое поведение, напоминающее поведение, характерное для наклонной плоскости, будет локально имитировано с помощью неровности мягкого материала (или, в переносном смысле, «асимметричная шероховатость») подобной формы, принадлежащей нераздельно профилю поверхностной шероховатости при трении.)

Если спускаться вниз по метрической шкале, от макроскопического через мезоскопический

(микрометровый) до микроскопического масштаба, с его характерными нанометровыми размерами, окажется, что не так просто определить СКТ из уравнения (1), особенно предвидя, что: а) явное влияние гравитации – основа самого закона Кулона–Амонтона – судя по всему не будет действовать непосредственно у пределов шкалы; б) предположительно, в процесс трения будет также включено смачивание [2], таким образом, карта взаимодействия окажется не такой, как при трении сухих поверхностей, а скорее той, что будет наблюдаться для двух противодействующих (мягких) поверхностей, подвергающихся чрезвычайно сложному сценарию смазки [2,3], см. рисунок.

Кстати, в таких предвидимых сложных обстоятельствах, как правило, прибегают к подходу с применением теории самосогласованного поля, подчеркивая ключевой (взаимодействующий) фактор и откладывая по тому же принципу некоторые достаточно редкие события на основании некоего возможного флуктуационного несоответствия основному типу двух противодействующих поверхностей. Получается таким образом (по аналогии), что в соответствии, например, с законом электростатики Кулона, если два точечных заряда притягиваются или отталкиваются друг от друга, независимо от среды (например, в вакууме ли они помещены или в диэлектрике), сила взаимодействия между ними обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними. Последнее может быть принято в качестве главного фактора, ответственного за взаимодействие, а относительная диэлектрическая проницаемость с ее температурной зависимостью используется исключительно для перенормировки амплитуды взаимодействия, но не изменяет основной закон квадрата расстояния. Те же рассуждения могут применяться для ван-дер-ваальсова взаимодействия, слабого взаимодействия, описываемого в терминах потенциала Леннарда–Джонса. Аргументация такого рода может быть распространена на все центральные, т.е. зависимые от расстояния, потенциалы физических взаимодействий (например, в теории ДЛФО [4]), – но, продолжая подобные рассуждения, нужно было бы признать и недостатки предлагаемой линии рассмотрения. Это особенно важно, если расстояния между противодействующими поверхностями будет приближаться к нанометровому диапазону, что вызовет преимущественное отталкивание или притяжение при взаимодействии.

Из вышесказанного следует, однако, что если требуется расширить, пусть минимально, но в достаточно общем виде, закон Кулона–

Амонтона, адекватно дополненный некоторыми новыми ключевыми физическими обстоятельствами, то следует по крайней мере попытаться включить соответственно иную, на этот раз правильно выбранную меру взаимодействия, вносящую вклад в общий сложный сценарий трения в направлении либо отталкивания, либо притяжения, а возможно и обоих (рисунок).

Представляя здесь наши логические обоснования, в дальнейшем предложим, как поступить с подобным хоть и минималистичным, но ключевым дополнением в основном с использованием феноменологической процедуры, довольно похожей, скорее всего, на впервые предложенную Дерягиным с соавторами и известную также как подход Дерягина–Мюллера–Топорова к сухому трению [4]. Есть также некоторые другие подходы, например теория Джонсона и Кендалла, основанная на механике контактной поверхности [5]. Мы охотно отложим ее обсуждение, так как это требует некоторых дополнительных геометрических соображений, применяемых к особым деталям поверхности, что, кажется, не принесет пользы для нашего развиваемого далее минималистичного подхода. Кроме того, пренебрежем также (не)соразмерностью трущихся поверхностей, рассмотренной, например, в модели Прандтля–Томлинсона [6]. Следует напомнить, что изобретенная минималистичная процедура на основе ключевого взаимодействия не дает априори адекватного взаимодействия в условиях, отличных от случая сухого трения [2,3].

#### МИНИМАЛИСТИЧНАЯ СХЕМА ПЕРЕНОРМИРОВКИ СТАТИЧЕСКОГО КОЭФФИЦИЕНТА ТРЕНИЯ ДЛЯ ВКЛЮЧЕНИЯ ПОДРОБНЫХ ХАРАКТЕРИСТИК ПОВЕРХНОСТИ ПРИТЯЖЕНИЯ/ОТТАЛКИВАНИЯ

Во-первых, введем величину  $\chi_n^{(L)}$ , эквивалент статического коэффициента трения, подчиняющуюся его карте взаимодействия (для краткости обозначим ее ЭСКТ-в). По аналогии с формулой (1), при некоторой его мере  $n = 0$  (также сравнимой с деталями на рисунке), его можно определить как

$$\chi_n^{(L)} = \frac{F_{\text{int}}/n}{L}, \quad (2)$$

где  $F_{\text{int}}$  – величина силы взаимодействия притяжения (со знаком плюс) или отталкивания (со знаком минус), принятая на  $n$ -м уровне точности измерений взаимодействия между ключевыми деталями противоположных по-

верхностей (например, атомов, ионов, молекул, их агрегатов; различных частей поверхности и т.д.). Следует отметить, что в общем случае  $F_{\text{int}} \neq F$ , как в уравнении (1); обе силы могут, исходя из их величины, либо противодействовать, либо действовать кооперативно друг с другом, они могут также оставаться взаимно нейтральными, если существенно различаются по своим величинам. Вклад  $L/n$  в уравнение (2) следует рассматривать как величину нагрузки на  $n$ -м уровне измерения взаимодействия (например, при исследовании методом атомно-силовой микроскопии).

Благодаря общему характеру взаимодействия отталкивания-притяжения можно ввести очевидное тождество, а именно

$$F_{\text{int}} \equiv \text{sign}(F_{\text{int}})|F_{\text{int}}|, \quad (3)$$

где  $\text{sign}(F_{\text{int}}) = 1$ ;  $F_{\text{int}} > 0$ ;  $\text{sign}(F_{\text{int}}) = -1$ ;  $F_{\text{int}} < 0$  и в итоге  $\text{sign}(F_{\text{int}}) = 0$ ;  $F_{\text{int}} = 0$ ; последнее можно установить из уравнения (1), что хорошо будет видно из приводимых ниже рассуждений (см. уравнение (4)). (Также заметим, что  $|F_{\text{int}}|$  – абсолютное значение дополнительной, согласованной с масштабом, силы  $F_{\text{int}}$ .)

Предположим, что отношение

$$\frac{\mu_n^{(L)}}{\mu_s} \approx 1 + \chi_n^{(L)} \quad (4)$$

может явно выражаться в такой форме отклонения от единицы, где  $\mu_n^{(L)}$  обозначает новый «перенормированный» (вследствие включения в общую карту взаимодействий, см. рисунок) общий СКТ. Его не следует путать с СКТ из уравнения (2), поскольку последний включает только основное описание взаимодействия с деталями поверхности. Он не включает задаваемое  $\mu_s$  описание Кулона–Амонтона, не содержащее информации об особенностях поверхности, что, в свою очередь, неверно в случае  $\mu_n^{(L)}$ , в соответствии с приближенным отношением (4). Конечно, величина  $\chi_n^{(L)}$  должна быть существенно ограничена по своей величине, в лучшем случае не превышая интервала  $[-1, 1]$ . Это было заявлено ранее, после введения знаковой функции в уравнении (3), здесь же отметим, что если  $F_{\text{int}} = 0$ , становится видно, что из уравнения (2) следует  $\chi_n^{(L)} = 0$ , таким образом, в обоих случаях СКТ подчиняются закону Кулона–Амонтона (не существует подробной карты взаимодействий). Это особенно заметно на уровне взаимодействия  $n = 0$  (см. рисунок), где предполагается, что никакие особенности атом-

ных либо молекулярных взаимодействий не отслеживаются траекторией взаимодействия, и поэтому, по определению, применяется уравнение (1), в предположении (ожидании) бесструктурных трущихся поверхностей по умолчанию.

Во-вторых, в целях увеличения точности наших мысленных измерений, будем стремиться к более точной формулировке уравнения (4). Это может быть сделано для каждого  $n > 0$  с учетом того, что  $n$  – конечная величина. (Здесь должна возникать аналогия с термодинамическими подходами для конечных систем; в свою очередь, на квантово-механическом уровне может быть указана дискретность карты взаимодействий). Для большей аккуратности уравнение (4) может быть, по крайней мере с математической точки зрения, слегка изменено следующим образом:

$$\left(\frac{\mu_n^{(L)}}{\mu_s}\right)^{1/n} \cong 1 + \chi_n^{(L)}, \quad (5)$$

сохраняя, благодаря знаку приближенного равенства, более высокий уровень точности карты взаимодействия. Итак, помним, что модификация основана на повышении точности за счет применения корня  $n$ -й степени в левой части уравнения (5). Это повышение точности может продолжать действовать либо линейно ( $n = 1$ ), либо нелинейно ( $n > 1$ , но, тем не менее, конечно). Можно видеть, что дальнейшее применение нашей процедуры повышения точности приведет к участию нелинейных членов главного, чувствительного к взаимодействиям, аргумента  $\chi_n^{(L)}$ . Этот аргумент, за счет применения корня  $n$ -й степени в уравнении (5), вносит достаточно слабую коррекцию в левую часть уравнения (5), по сравнению с его правой частью. Наложённая таким образом нелинейность физически дает шанс проявиться тем или иным образом непарным взаимодействиям следующего уровня.

Далее, конкретизируем, что в случае  $n = 1$  мы просто возвращаемся к уравнению (4). Однако в последующем, для получения несколько более общей картины, предположительно со скрытыми нелинейными взаимодействиями, можно перейти в подходящий (для некоторых анализов) линейно-логарифмический над-режим. Это достигается, например, применением к обеим частям уравнения (5) процедуры натурального логарифмирования, что приводит к некоторой самоподобной форме:

$$\ln(\mu_n^{(L)}) \cong \ln(\mu_s) + n \ln(1 + \chi_n^{(L)}), \quad (6)$$

что может рассматриваться как линейное уравнение  $y(x) = b + a \cdot x$ , если представить, что  $y = \ln(\mu_n^{(L)})$ ;  $x = \ln(\mu_n^{(L)})$  с константами:  $b = \ln(\mu_s)$  и  $a = n$ . Заметим, что коэффициент  $a$  полученной прямой показывает соответствующий уровень зависимой от взаимодействия точности. Другими словами, применяя данную процедуру, мы не теряем контроля над измерением трения, независимо от той (не)линейной области, которая может при этом возникнуть. (Предметом дискуссии будет, однако, как измерить это трение, существуют ли какие-либо методы или оборудование, имеющие к этому отношение, – и в этом наше открытое обращение к экспериментаторам.)

Тем не менее точность, использовавшаяся для измерений на уровне  $n = 0$  и выше, но до некоего конечного значения, должна быть оценена как недостаточная. Таким образом, лишь формальным шагом должен стать, по-видимому, предельный переход  $n \rightarrow \infty$ . Его можно рассматривать в целом как попытку при стремлении к бесконечности (при взаимодействии многих тел) достичь наивысшего уровня точности привлечением любой приемлемой межповерхностной карты взаимодействия, включая в том числе межповерхностный подход, что можно видеть на примере поведения систем, содержащих отдельные частицы, в частности, (нано)поликристаллических, под действием некоего однородного фактора давления [7]. Достижение предела при  $n \rightarrow \infty$  здесь будет похоже на достижение термодинамического предела в (не)равновесных термодинамических системах, иногда заметно отличающегося от предела при значении  $n > 1$ , но при этом конечном. Различие связано главным образом с трудностями при количественной оценке некоторых представляющих интерес физических параметров (см. работу [7] и ссылки в ней).

Далее перепишем уравнение (5) в эквивалентной математической форме:

$$\frac{\mu_n^{(L)}}{\mu_s} \cong (1 + \chi_n^{(L)})^n = (1 + 1/n(F_{\text{int}}/L))^n. \quad (7)$$

Введя здесь выражение для  $\chi_1^{(L)} = F_{\text{int}}/L$ , взятое из уравнения (2), и выполнив предельный переход  $n \rightarrow \infty$ , получим:

$$\left(\frac{\mu_{n \rightarrow \infty}^{(L)}}{\mu_s}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \chi_1^{(L)}/n)^n. \quad (8)$$

Уравнение (8) является, таким образом, эквивалентом простого и достаточно точного выражения для статического коэффициента трения

типа Дерягина–Мюллера–Топорова. Фактически, это главный результат наших теоретических рассуждений – выражение для общего ЭСКТ-в, если записать его в экспоненциальной форме, а именно:

$$\mu_n^{(L)} \rightarrow \infty = \mu_s \exp(\chi_1^{(L)}) \equiv \mu_s \exp(F_{\text{int}}/L), \quad (9)$$

в том случае, если  $\exp(\chi_1^{(L)}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \chi_1^{(L)}/n)^n$ . По-

этому на бесконечном уровне точности измерения взаимодействия (строгий граничный случай) соответствующие значение СКТ ( $\mu_n^{(L)} \rightarrow \infty$ ) удовлетворяет выражению  $\mu_n^{(L)} \rightarrow \infty = \mu_s \exp(F_{\text{int}}/L)$ , представляющему обратную (и по сути, количественную) экспоненциальную форму уравнения Больцмана–Арениуса, где  $\mu_s$ , как было предложено первоначально, берется из закона Кулона–Амонтона (уравнение (1)). Как и предполагалось, линейное уравнение (5) при  $n = 1$  (или эквивалентное ему уравнение (4)) является, в свою очередь, легко восстанавливаемой формой разложения в ряд Тейлора  $\exp(\chi_1^{(L)}) \equiv 1 + \chi_1^{(L)} + \Theta([\chi_1^{(L)}]^2)$  с опущенным следующим (нелинейным) квадратичным членом.

Тогда правомерно, в качестве первого приемлемого приближения основного взаимодействия, в целях рационализации определенных экспериментов по облегчению смазывания в мембранных липидных системах [2,3], взять для целей количественного приближения линейную формулу

$$\mu_1^{(L)} = \mu_s(1 + \chi_1^{(L)}) \quad (10)$$

с соответствующим эквивалентом основного взаимодействия для СКТ, а именно  $\chi_1^{(L)} = F_{\text{int}}/L$ . Следует понимать, что нагрузка  $L$  здесь скорее должна быть измерена в соответствующем немакроскопическом масштабе, т.е. взята в определенной подходящей и эффективной пропорции по отношению к общей величине; это предполагает использование сложного и продуманного распознавания, которое будет использоваться в данном случае, – имеем дело с проблемой точности измерения, качественно аналогичной в некоторой степени соотношениям Гейзенберга в квантовой механике.

Для чувствительной рН-зависимой системы, имитирующей синовиальную среду в артикуляционном пространстве суставов ([1–3], см. также [8,9]) для некоторого микроскопического модельного, т.е. теоретического сравнения, следует оценить значение  $F_{\text{int}}$ , оказавшееся отрицательным ( $F_{\text{int}} < 0$ , [3]) из-за условий отражения поверхности на нанометровом масштабе [8,9],

с соответствующей настройкой по величине эффективной (*in situ*) нагрузки ( $L > 0$ ). Эффект соотношения  $\chi_1^{(L)} < 0$ , изученный на основе давлений, действующих в биосистемах [8,9], называется эффектом гидратационного отталкивания [2,3], так как отрицательное давление, обусловленное электростатическими (деполяризация) и ван-дер-ваальсовыми силами отталкивания, в конечном итоге будет управлять поведением двухслойной системы в целом. Некоторые экспериментальные обоснования величин сил и давлений, измеренных в условиях, когда бислои приближаются друг к другу (на нанометровом масштабе), но еще взаимно отталкиваются, можно найти в работе [10].

## ВЫВОДЫ И ПЕРСПЕКТИВЫ

После принятия представленного выше (направленного к «самосогласованию») обоснования, можно выделить как заключение, так и перспективу (см. пункты I – III) следующим образом.

I. В отношении практического применения: в общей сложности на основании данных из работ [2,3,8,9] после применения уравнения (10) можно показать, что

$$\mu_1^{(L)} \approx 0,98\mu_s \quad (11)$$

с  $\chi_1^{(L)} = -0,02$  или немного меньше (см. данные из работ [8,9]), что характерно для гидратационного отталкивания в слоистых системах.

Давайте коротко обоснуем аргументы, имеющие отношение к этой точке зрения. Так, гидратационное отталкивание между биомембранами происходит вследствие взаимодействия процессов дегидратации и деполяризации, при этом оно доминирует во взаимодействии между полярными (т.е. одинаково заряженными) фосфолипидными поверхностями в воде при несколько-нанометровом расстоянии между ними, а в конечном итоге препятствует их слипанию друг с другом [2,3,10].

При исследовании атомистической компьютерной модели взаимодействующих фосфолипидных мембран было получено количественное выражение для итогового давления взаимодействия [8]. В другом исследовании [9] четко продемонстрировали, что давление отталкивания (измеряется в отрицательных единицах давления), оказываемое одним отталкивающим (лецитин) слоем на другой через прослойку воды определенной толщины, в конечном счете должно экспоненциально падать. Некоторые термодинамические подходы к фазовым переходам (Ландау), в сочетании с электростатикой Больц-

мана–Пуассона и подходом, включающим дебаевскую длину [9], подтверждают оценку отрицательного давления, что приводит к включению в уравнение (10) оптимального («согласованного») значения  $\chi_1^{(L)} = -0,02$  или чуть меньшего.

II. Что касается более теоретической части: предложенное обоснование еще требует надежной оценки  $\mu_s > 0$  из закона Кулона–Амонтона, применяемого к асимметричной шероховатой поверхности или неровности (просто дефекту). Если можно было бы аппроксимировать  $\mu_s \approx \text{tg } \alpha_{\text{contact}}$  углом контакта мембраны  $\alpha_{\text{contact}}$  в так называемом пределе супергидрофильности [2,3]:

$$\alpha_{\text{contact}} \rightarrow 0, \quad (12)$$

можно было бы достичь очень низких значений  $\mu_s - s$ , ожидаемых в здоровых суставных хрящах [3]; в противном случае, чем меньше  $\alpha_{\text{contact}}$ , тем лучше для восстановления низких значений  $\mu_s - s$ . В отличие от этого заметим, что, наоборот, предел супергидрофобности [2,3] мог быть достигнут, если бы не применялось условие  $\alpha_{\text{contact}} \rightarrow 0$ . Однако вне этого предела смазка очень затруднена и величина СКТ достигает несколько больших значений [1]. Кстати, обратим внимание, что пока еще нет буквально ни одного известного закона трения, который бы специально предназначался только для очень влажных противоположных поверхностей, таким образом, закон Кулона–Амонтона часто используется как предпосылка, подходящая для количественного определения смачивающих условий трения [1–3].

III. И сформулированная проблема, и способ ее решения, предложенные в этой дискуссионной заметке, обрисованы в общих чертах, в то время как в перспективе, вероятно, будет продолжено предложение мультидисциплинарных (например, медико-биологических, технологических, и даже социофизических) неявных контекстов при усредненных описаниях. Предложенная здесь полуколичественная схема также может быть качественно применена к социофизическим обстоятельствам, в которых может появиться некоторая «напряженность» между двумя принципиально противоположными «силами» (поверхностями), прежде всего хорошо определяемая в приграничных областях, в которых «двунациональные»/«многонациональные» физические объекты (в преувеличении: атомы; молекулы; части (био)поверхностей), и их группировки или кластеры конкурируют (отталкивание при отрицательном  $\chi_n^{(L)}$ ) или взаимодействуют (притяжение при положительном

$\chi_n^{(L)}$ ) друг с другом в описанных подобным образом условиях взаимодействия.

Интересно, что в общей концепции представленной здесь дискуссии притяжение может иметь тенденцию к увеличению напряжения или фрикционных взаимодействий при проявлении некоторого достаточно заметного (и при этом неуправляемого) влияния кластеризации податливого вещества на общее динамическое поведение [2,3,7]. Например, расщепление контакта на более тонкие  $n$ -уровневые субконтакты вызывает повышение адгезии, что и наблюдается у некоторых животных, например ящериц или гекконов [5].

Наконец, отметим, что, несмотря на рассматриваемое здесь граничное смазывание [1,11], не наблюдались термодинамически обусловленные эффекты сдвига, детально обсуждавшиеся в настоящем исследовании. Более того, как не обсуждались ограничения ультратонкого смазочного слоя как частный случай применимости, так и не было особого обсуждения нелинейных характеристик атомарных (молекулярных) гладких поверхностей [12], например, почти не ведущие к износу (как бы виртуальные) свойства, закономерно проявляющиеся в некоторых более технологически продвинутых системах. И последнее достаточно важное замечание: ожидают своего рассмотрения стохастически-кинетические воздействия на смазку, существенно (не статично) изменяющие свойства трения в некоторых конкретных обстоятельствах [11,12].

Один из авторов (А. ГадоМСки) желает всего хорошего профессору Л. Шимански-Гейеру (Физический факультет университета Гумбольдта, Берлин) по случаю его юбилея.

Исследование выполнено при финансовой поддержке Института математики и физики (Университет науки и технологии Будогожа), грант BS39/14.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. M. Daniel, Wien. Med. Wochenschr. **164**, 88 (2014).
2. Z. Pawlak, W. Urbaniak, M. Hagner-Derengowska, and W. Hagner, Biointerphases **9**, 041004-1 (2014).
3. Z. Pawlak, A. D. Petelska, W. Urbaniak, et al., Cell Biochem. Biophys. **65**, 335 (2013).
4. B. V. Derjaguin, V. M. Muller, and Y. P. Toporov, J. Colloid Interface Sci. **53**, 314 (1975).
5. E. Arzt, S. Gorb, and R. Spolenak, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **100**, 10603 (2003).
6. L. Prandtl and Z. Angew. Math. Mech. **8**, 85 (1928).
7. N. Kruszewska, P. Weber, A. Gadomski, and K. A. Domino, Acta Phys. Pol. B **44**, 1049 (2013).
8. S. Marcelja and N. Radic, Chem. Phys. Lett. **42**, 129 (1976).

9. E. Schneck, F. Sedlmeier, and R. R. Netz, Proc. Natl. Acad. Sci. USA **109**, 14405 (2012).  
10. J. Marra and J. N. Israelashvili, Biochemistry **24**, 4608 (1985).  
11. I. A. Lyashenko, L. S. Metlov, A. V. Khomenko, and S. N. Chepul'skiy, J. Frict. Wear **33**, 244 (2012).  
12. K. Wierzcholski, Acta Bioeng. Biomech. **16**, 83 (2014).

## **On Two Opposing (Bio)surfaces as Comprehended in Terms of an Extension of the Coulomb–Amontons Law of Friction, with Its Virtual Usefulness for Biotribology in Nanoscale**

**A. Gadomski\* and J. Hladyszowski\*\***

*\*Institute of Mathematics and Physics, University of Science & Technology,  
ul. S. Kaliskiego 7, Bydgoszcz, PL85-796 Poland*

*\*\*Faculty of Pharmacy, Wrocław Medical University, pl. B. Nankera 1, Wrocław, PL50-140 Poland*

An extension of the Coulomb–Amontons law is proposed in terms of an interaction-detail involving renormalization (simplified)  $n$ -th level scheme. The coefficient of friction is obtained in a general exponential (nonlinear) form, characteristic of virtually infinite (or, many body) level of the interaction map. Yet, its application for a hydration repulsion bilayered system, prone to facilitated lubrication, is taken as linearly confined, albeit with an inclusion of a decisive repelling force/pressure factor. Some perspectives toward related systems, fairly outside biotribological issues, have been also addressed.

*Key words: biotribology, Coulomb–Amontons law, friction in biological systems*