

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ГЕМОДИНАМИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ ФОРМИРОВАНИЯ ПЕРИФЕРИЧЕСКОЙ ПУЛЬСОВОЙ ВОЛНЫ

© 2015 г. А.А. Федотов

Радиотехнический факультет Самарского государственного аэрокосмического университета им. Академика С.П. Королева (Национальный исследовательский университет), 443086, Самара, Московское шоссе, 34

E-mail: fedoaleks@yandex.ru

Поступила в редакцию 08.11.14 г.

После доработки 08.12.14 г.

Рассмотрена математическая модель процессов формирования сигнала периферической пульсовой волны в сосудах верхних конечностей. Формирование периферической пульсовой волны представлено в виде композиции прямой и отраженной пульсовых волн, распространяющихся по артериальной системе человека. Предложена система формальной аналогии между процессами распространения пульсовых волн по артериальной системе человека и распространением электрических колебаний по линиям с распределенными параметрами. Зависимости распространения пульсовых волн по артериальной системе человека были получены на основе решения одномерных уравнений Навье–Стокса для нескольких частных случаев.

Ключевые слова: гемодинамическая модель, пульсовая волна, уравнения Навье–Стокса, уравнение длинной линии, эластичность, артериальный сосуд.

Одной из самых распространенных и опасных патологий сердечно-сосудистой системы человека является дисфункция эндотелия, приводящая к возникновению таких заболеваний, как атеросклероз, артериальная гипертензия, ишемическая болезнь сердца, инсульт и инфаркт. Ранняя диагностика эндотелиальной дисфункции осуществляется на основе методик оценки показателей эластичности артериальных сосудов [1,2].

Эластические свойства артериальных сосудов могут быть косвенно определены методами контурного анализа периферической пульсовой волны, регистрируемой неинвазивно с помощью плетизмографических или сфигмографических датчиков [2–4]. Форма контура периферической пульсовой волны определяется главным образом характеристиками большого круга кровообращения, скоростью распространения пульсовых волн давления в аорте и крупных артериях, а также тонусом мелких артерий и артериол [1,5].

Математическое моделирование гемодинамических процессов в артериальных сосудах верхних конечностей позволит открыть новые возможности в создании эффективных методов определения показателя эластичности артериальных сосудов на основе неинвазивной регистрации и обработки биосигналов пульсовой

волны [6,7]. Данная работа посвящена разработке математической модели процессов формирования периферической пульсовой волны, наблюдаемой в артериальных сосудах верхних конечностей.

МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

Для описания процессов распространения пульсовых волн давления по артериальному руслу использовали одномерные уравнения Навье–Стокса [8,9]:

$$-\frac{\partial P}{\partial x} = Q \frac{8\mu}{\pi r^4} + \frac{\rho}{\pi r^2} \frac{\partial Q}{\partial t}, \quad -\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{3\pi r^3}{2\xi h} \frac{\partial P}{\partial t},$$

где: x – осевая координата; t – время, Q – расход жидкости; P – давление; μ – вязкость крови; r – радиус артерии; ρ – плотность жидкости; ξ – модуль Юнга артериальной стенки; h – толщина стенки.

Для получения математических зависимостей изменения давления пульсовой волны от времени и координаты воспользуемся аналогией между процессом распространения пульсовых волн по артериальному руслу и распространением электрических колебаний по однородным линиям передачи с распределенными параметрами [6,9]. Телеграфные уравнения, опи-

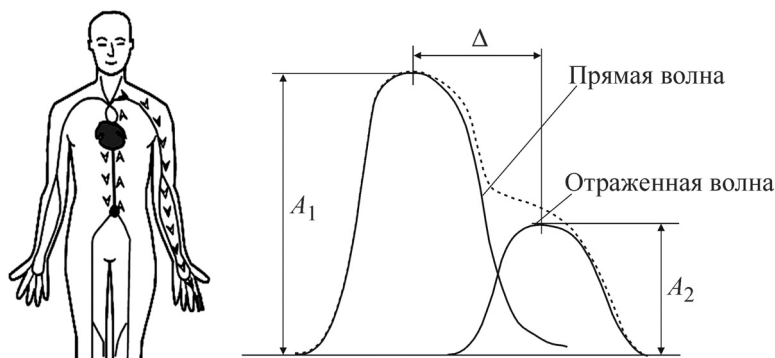


Рис. 1. Процесс формирования артериальной пульсации крови в сосудах верхних конечностей.

сывающие процесс распространения электрических возмущений в длинной линии без утечек (длинная линия типа «подземный кабель» [10]), имеют символическую формальную аналогию с одномерными уравнениями Навье–Стокса:

$$-\frac{\partial U}{\partial x} = IR + L\frac{\partial I}{\partial t}, \quad -\frac{\partial I}{\partial x} = C\frac{\partial U}{\partial t},$$

где U – электрическое напряжение, I – электрический ток, R – электрическое сопротивление единицы длины линии, L – индуктивность единицы длины линии, C – электрическая емкость единицы длины линии.

Таким образом, используется следующая система аналогий: электрическое напряжение $U \leftrightarrow$ давление P , электрический ток $I \leftrightarrow$ расход жидкости Q . Аналогия уравнений позволяет использовать для исследования гемодинамических процессов методы анализа, разработанные для длинных электрических линий, в частности, использовать такие понятия, как импеданс, согласованная нагрузка, линия с отражением и др.

Моделью участка артериального русла является однородная электрическая длинная линия передачи. На одном конце находится источник электрического колебания, другой конец линии замкнут на обобщенное сопротивление [6,9]. В такой модели источник электрического сигнала моделирует импульсное изменение давления, возникающее во время систолы и приводящее к выбросу крови из левого желудочка. В качестве входного сигнала был выбран импульс с экспоненциальными фронтами, как наиболее близкий к наблюдаемой форме сердечного выброса во время систолы [6]:

$$P_0(t) = P_{\max} \left[1 - e^{-\frac{t}{T_1}} - (1 - e^{-\frac{t-t_p}{T_2}}) 1(t - t_p) \right],$$

где P_{\max} – амплитуда импульса давления; T_1 – длительность переднего фронта импульса; t_p –

длительность импульса; T_2 – длительность заднего фронта импульса; $1(t)$ – единичная функция.

Параметры такого сигнала имеют прямой физиологический смысл и определяются параметрами сердечного выброса при систоле. В качестве усредненных значений будем считать, что длительность переднего фронта импульса давления $T_1 = 0,08$ с; длительность импульса давления $t_p = 0,2$ с; длительность заднего фронта импульса давления $T_2 = 0,05$ с [11].

Рассмотрим процесс формирования пульсовой волны в периферических сосудах верхних конечностей. Контур пульсовой волны формируется в результате взаимодействия между левым желудочком и сосудами большого круга кровообращения и отражает слияние прямой и отраженной пульсовых волн давления [5,8,11].

Прямая пульсовая волна давления образуется за счет систолического объема крови, передающегося напрямую от левого желудочка к пальцам верхних конечностей во время систолы. Отраженная пульсовая волна давления образуется за счет отражения объема крови, передающегося по аорте и крупным магистральным артериям к нижним конечностям и направляющегося обратно в восходящий отдел аорты и далее к сосудам верхних конечностей [11].

Процесс формирования периферической пульсовой волны схематично представлен на рис. 1: \blacktriangleright – прямая пульсовая волна давления, \blacktriangleright – отраженная пульсовая волна давления, \bullet – точка бедренной бифуркации аорты.

Прямая пульсовая волна давления формируется на первом участке артериального русла: *аорта–лучевая артерия–артериола пальца*. Отраженная пульсовая волна давления формируется на втором участке артериального русла: *аорта–магистральные артерии–бедренная бифуркация аорты*. На данном участке артериального русла наблюдается отражение пульсо-

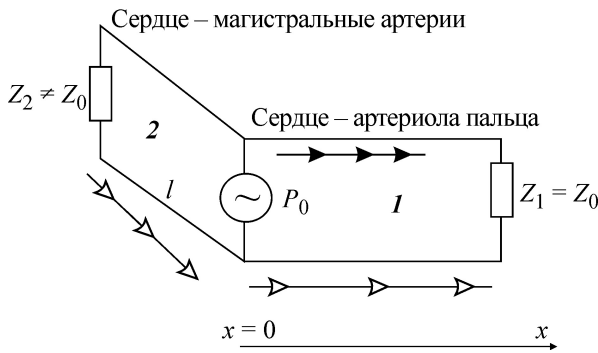


Рис. 2. Эквивалентная схема формирования артериальной пульсации крови в сосудах верхних конечностей.

вой волны. Интенсивность отражения (амплитуда отраженной волны A_2) определяется тоном мелких мышечных артерий. Время отражения пульсовой волны (Δ) будет зависеть от эластичности магистральных артерий и протяженности второго участка артериального русла.

Таким образом, амплитудно-временные характеристики контура пульсовой волны являются важными диагностическими показателями, характеризующими функциональное состояние артериальной системы человека.

Процесс формирования пульсовой волны в сосудах верхних конечностей, на основании использования аналогии с электрической линией передачи с распределенными параметрами, можно представить эквивалентной схемой, состоящей из двух электрических линий передач, представленной на рис. 2: \blacktriangleright – прямая пульсация давления, \blacktriangleleft – отраженная пульсация давления, 1 – электрическая линия с согласованной нагрузкой, 2 – электрическая линия с несогласованной нагрузкой, Z_0 – характеристическое сопротивление линий 1 и 2 , Z_1 – сопротивление нагрузки в линии 1 , Z_2 – сопротивление нагрузки в линии 2 . Для простоты анализа получаемых зависимостей будем считать, что параметры обоих артериальных участков, а следовательно, и соответствующих электрических линий идентичны.

Первый участок артериального русла моделируется электрической линией передачи с согласованной нагрузкой. Второй участок артериального русла моделируется электрической линией передачи с несогласованной нагрузкой.

Решение телеграфных уравнений операторным методом для электрической линии с согласованной нагрузкой позволило получить зависимость изменения прямой пульсовой волны давления от времени и координаты для первого участка артериального русла:

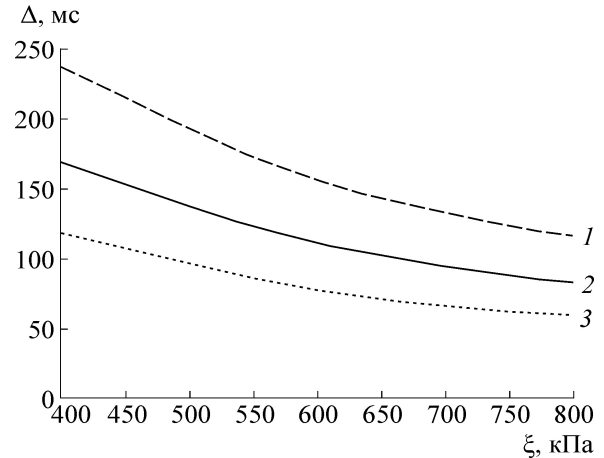


Рис. 3. Зависимости изменения времени задержки распространения отраженной пульсации давления от показателя эластичности и длины второго артериального участка l ($1 - 0,5$ м; $2 - 0,35$ м; $3 - 0,25$ м).

$$P_1(t, x) = \int_0^t \sqrt{\frac{3\mu x^2}{\pi h r \xi \tau^3}} e^{-\frac{3\mu x^2}{h r \xi \tau}} P_0(t - \tau) d\tau.$$

Решение телеграфных уравнений операторным методом для электрической линии с отражением позволило получить зависимость изменения отраженной пульсовой волны давления от времени и координаты для второго участка артериального русла:

$$P_2(t, x) = \delta_1 \int_0^t \sqrt{\frac{3\mu(x-2l)^2}{\pi h r \xi \tau^3}} e^{-\frac{3\mu(x-2l)^2}{h r \xi \tau}} P_0(t - \tau) d\tau,$$

где l – протяженность второго участка артериального русла, δ_1 – коэффициент отражения пульсовой волны, изменяется от 0 до 1.

Пульсовая волна, наблюдаемая в периферических сосудах верхних конечностей, образуется в результате композиции прямой и отраженной пульсовых волн, с учетом времени отражения пульсовой волны Δ :

$$P(t, x) = P_1(t, x) + P_2(t - \Delta, x).$$

Время отражения пульсовой волны обусловлено распространением отраженной пульсовой волны по второму артериальному руслу и определяется величиной временного сдвига между идентичными точками двух пульсовых волн, полученных на различных участках второго артериального русла.

РЕЗУЛЬТАТЫ

На рис. 3 приведены зависимости изменения времени отражения пульсовой волны от пока-

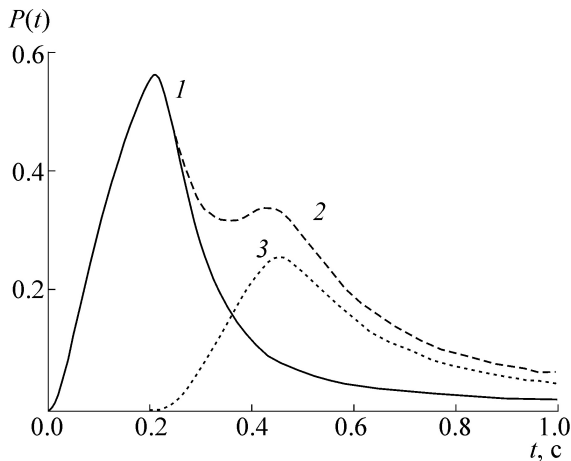


Рис. 4. Композиция артериальной пульсации крови, характерная для эластичных артерий (1 – прямая пульсовая волна, 2 – артериальная пульсация крови, 3 – отраженная пульсовая волна).

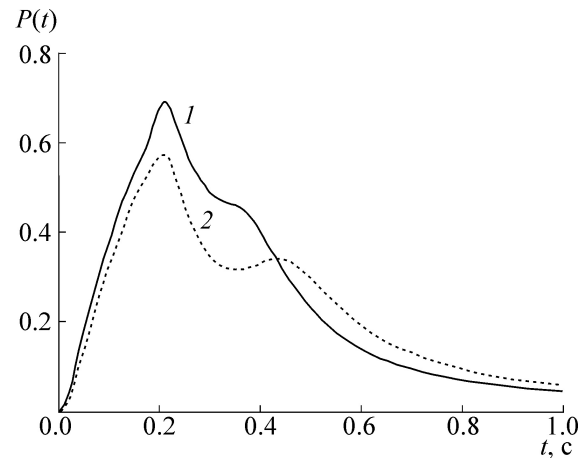


Рис. 5. Зависимости изменения артериальной пульсации крови при различных значениях показателя эластичности ξ (1 – 600 кПа, 2 – 400 кПа).

зателя эластичности ξ при различных значениях протяженности второго артериального участка l (0,5, 0,35 и 0,25 м). Зависимости получены при следующих параметрах модели: $h = 1$ мм, $r = 10$ мм, $\mu = 5 \cdot 10^{-3}$ Па, $\delta_l = 0,5$, $T_1 = 0,08$ с, $T_2 = 0,05$ с, $t_p = 0,2$ с.

Анализ полученных зависимостей показал, что с увеличением показателя эластичности ξ (модуля Юнга артериальной стенки) время отражений пульсовой волны давления уменьшается, что полностью соответствует физиологическим наблюдениям: по ригидным (жестким) артериальным сосудам пульсовая волна распространяется быстрее [1,5,8].

На рис. 4 приведена композиция пульсовой волны, характерной для эластичных артерий (1 – прямая пульсовая волна, 2 – артериальная пульсация крови, 3 – отраженная пульсовая волна), амплитудные характеристики пульсовых волн приведены в относительных единицах. Зависимости получены при следующих параметрах модели: $x = 0,6$ м; $l = 0,5$ м; $\xi = 400$ кПа; $h = 1$ мм; $r = 10$ мм; $\mu = 5 \cdot 10^{-3}$ Па; $\delta_l = 0,5$; $T_1 = 0,08$ с; $T_2 = 0,05$ с; $t_p = 0,2$ с.

На рис. 5 приведены зависимости изменения биосигнала пульсовой волны от времени, полученные при различных значениях показателя эластичности ξ (600 и 400 кПа). Анализ полученных зависимостей показывает, что при увеличении показателя эластичности форма контура пульсовой волны претерпевает значительные изменения: амплитуда увеличивается, временное расстояние между максимумами уменьшается, увеличивается наклон сигнала на начальном участке.

ВЫВОДЫ

Для проверки адекватности предложенной модели процессов формирования сигнала пульсовой волны было проведено сравнение фрагментов опорных сигналов, зарегистрированных у людей с различным состоянием артериального русла, и соответствующих фрагментов модельных зависимостей, полученных при различных значениях показателя эластичности. Сигналы артериальной пульсации крови были получены с помощью сертифицированного компьютерного фотоплетизмографа «Элдар», имеющего стандартные характеристики (полоса пропускания 0,05–15 Гц, разрешение АЦП – 10 бит, частота дискретизации 100 Гц).

Для верификации модели были сформированы три группы добровольцев: группа 1 состояла из 15 здоровых людей в возрасте от 18 до 30 лет без заболеваний сердечно-сосудистой системы, группа 2 – из 15 человек в возрасте от 35 до 50 лет с характерными возрастными изменениями эластичности артериальных сосудов, группа 3 – из 15 человек в возрасте от 55 до 70 лет с сильно выраженными возрастными изменениями эластичности артериальных сосудов. Для нормированных опорных сигналов и нормированных модельных зависимостей пульсовой волны коэффициент корреляции составил не менее 0,8 ($p < 0,05$); что позволяет сделать вывод о том, что предложенная модель адекватно описывает процесс формирования периферической артериальной пульсации крови в сосудах верхних конечностей при различных значениях показателя эластичности артериальных сосудов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Expert Consensus Document on arterial stiffness: methodological issues and clinical applications [Text] // *Eur. Heart J.* **27** (21), 2588 (2006).
2. S. C. Millasseau, R. P. Kelly, et al., *Clinical Sci.* **103**, 371 (2002).
3. S. C. Millasseau, et al., *Hypertension* **8**, 1449 (2006).
4. R. P. Kelly and M. F. O'Rourke, *Circulation* **80**, 1652 (2003).
5. T. Weber, *Circulation* **109**, 184 (2004).
6. Л. И. Калакутский и А. А. Федотов, *Изв. ЮФУ. Технические науки*, Таганрог, № 9, 93 (2009).
7. A. P. Avolio, *Med. Biol. Engineering & Computing* **18**, 709 (1980).
8. Т. Педли, *Механика кровообращения* (Мир, М., 1982).
9. L. R. John, *Med. Biol. Engineering & Computing* **42**, 312 (2004).
10. А. Анго, *Математика для электро- и радиоинженеров* (Наука, М., 1965).
11. Р. Шмидт, *Физиология человека* (Мир, М., 1996), т. 3.

A Mathematical Model of Hemodynamic Processes for Distal Pulse Wave Formation

A.A. Fedotov

Radioengineering Faculty, Samara State Aerospace University, Moskovskoye Shosse 34, Samara, 443086 Russia

A mathematical model of the formation of distal arterial pulse wave signal in the blood vessels of the upper limbs was considered. The formation of distal arterial pulse wave is represented as a composition of forward and reverse pulse waves propagating along the human arterial system. The system of formal analogy between pulse waves propagation along the human arterial system and the propagation of electrical oscillations in electrical transmission lines with distributed parameters was proposed. Dependencies of pulse wave propagation along the human arterial system were obtained by solving the one-dimensional Navier-Stokes equations for a few special cases.

Key words: hemodynamic model, pulse wave, Navier-Stokes equations, equation of long-distance lines, elasticity, arterial vessel