

Масштабная инвариантность коровой сейсмичности и прогностические признаки землетрясений

И.Р. Стаховский

Результаты исследований сейсмичности на основе методов теории неравновесных процессов и теории самоподобия позволяют рассматривать коровое землетрясение как критический переход в эволюции неравновесной сейсмогенерирующей системы, предваряемый таким явлением, как масштабная инвариантность пространственно-временных сейсмических структур. Тем самым сейсмичность следует интерпретировать как принципиально мультифрактальный процесс. Модель сейсмического очага в виде фрактального кластера микротрещин позволяет сформулировать прогностические признаки землетрясений, которые обнаруживаются в реальных сейсмических данных. Сейсмический скейлинг даёт возможность мониторинга состояния сейсмогенерирующей системы по мере её приближения к моменту потери устойчивости.

Ключевые слова: сейсмичность, мультифрактальная мера, прогностические признаки землетрясений, сейсмическая кинетика, скейлинг, разломное поле, сейсмическое поле, согласование скейлингов

PACS numbers: 91.30. – f, 91.30.Px

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2016.09.037970>

Содержание

1. Введение (505).
 2. Масштабная инвариантность в неравновесных многокомпонентных системах (506).
 - 2.1. Теория диссипативных структур.
 - 2.2. Концепция самоорганизации многокомпонентных систем в критическом состоянии.
 - 2.3. Теория мультифрактальных мер.
 3. Масштабная инвариантность дизъюнктивных структур земной коры и сейсмичности (510).
 - 3.1. Реальные структуры.
 - 3.2. Некоторые модельные результаты.
 4. Микроуровень разрушения (515).
 - 4.1. Кинетика микроразрушения.
 - 4.2. Масштабная инвариантность на этапе слияния микротрещин.
 5. Прогностические признаки землетрясений (518).
 - 5.1. Пространственные распределения эпицентров.
 - 5.2. Временной ход сейсмичности.
 6. Заключение (522).
- Список литературы (522).

1. Введение

Коровое землетрясение — чрезвычайно сложное для изучения природное явление, по сей день не имеющее адекватного описания не только на теоретическом, но и на феноменологическом уровне. Процессы подготовки коровых землетрясений трудно отнести к предмету какой-либо одной научной дисциплины или междисциплинарной области знания. Свой вклад в исследование коровых землетрясений вносят сейсмология и геофизика

[1, 2], причём в течение длительного времени землетрясения определялись как акты механического разрушения материала земных недр [3]. С появлением кинетической концепции прочности и квантовых моделей разрыва химических связей в кристаллах само разрушение кристаллических тел (горных пород) оказалось в круге вопросов, рассматриваемых физической химией и квантовой химией [4, 5], а явление магнитоэластичности обуславливает интерес к сейсмичности со стороны химической физики [6]. Тем не менее в последнее время прогресс в исследовании процессов подготовки коровых землетрясений связан в основном с достижениями теории неравновесных процессов, т.е. нелинейной динамики и теории катастроф [7, 8], теории мультифрактальных мер [9, 10], теории диссипативных структур и самоорганизации [11, 12].

В рамках теории неравновесных процессов многие особенности коровой сейсмичности находят естественное объяснение, а многие сейсмические объекты — естественную форму описания. Развитие методов нелинейной динамики, общих для неравновесных систем различной природы, позволяет понять процессы подготовки землетрясений глубже, чем исследование собственно сейсмических объектов методами классической физики. Так, целый ряд новых нетривиальных свойств сейсмичности выявляется методами теории катастроф [13], не менее плодотворна для исследования сейсмичности концепция самоорганизации сложных систем в критических состояниях (Self-Organized Criticality) [14]. И хотя создание единой, законченной и внутренне замкнутой теории неравновесных процессов пока впереди, сегодня роль уже известных законов эволюции неравновесных систем в сейсмическом процессе настолько очевидна, а количество экспериментальных и модельных работ по этой теме настолько велико, что наступила пора некоторых (пока ещё предварительных) обобщений.

Данный обзор посвящён исследованиям фундаментального свойства коровой сейсмичности, вытекающего

И.Р. Стаховский. Институт физики Земли им. О.Ю. Шмидта РАН, ул. Большая Грузинская 10, стр. 1, 123242 Москва, Российская Федерация. E-mail: stakhov@ifz.ru

Статья поступила 5 июля 2016 г., после доработки 8 сентября 2016 г.

из сугубо неравновесного, диссипативного характера этого процесса, — масштабной инвариантности пространственно-временных сейсмических структур. Это свойство, эмпирически изученное на сегодняшний день во многих сотнях экспериментальных и модельных работ, а также работ по анализу сейсмических каталогов, показывает, что землетрясения не могут более рассматриваться как механический феномен — характерные для классической механики решения уравнений в частных производных лишены масштабной инвариантности (самоподобия) или масштабная инвариантность присутствует в них только в тривиальных формах. Для процесса разрушения горных пород (а сейсмичность — часть этого процесса) характерен гигантский масштабный диапазон: отношение длины микротрещин, образующихся в земных недрах, к длине разломов, возникающих при землетрясениях, достигает 2^{-50} , тогда как классическая физика вынужденно исследует преимущественно один масштабный уровень любого процесса. Между тем многие макрофизические свойства сейсмичности вследствие её масштабной инвариантности определяются причинами, связанными с микроуровнем, и игнорирование этого факта приводит к качественным аналитическим потерям. Масштабная инвариантность — это одновременно и "микроскоп", позволяющий получить информацию о микроскопических процессах, с которых начинается подготовка землетрясений в земных недрах, и путь к статистической генерализации сейсмического процесса в целом.

Самоподобие возникает как следствие самоорганизации в неравновесных системах, что применительно к сейсмичности означает самоорганизацию сейсмогенерирующей системы. Исторически теория самоподобия (теория мультифрактальных мер) развивалась в тесной связи с изучением не только математических объектов, подобных странным аттракторам [15], но и неравновесных физико-химических процессов, таких как турбулентность [16], коагуляция [17] или даже происхождение и распределение в земных недрах полезных ископаемых [9]. Хорошо известны так называемые термодинамические аналогии в теории мультифрактальных мер [9, 18], позволяющие наполнить математические уравнения физическим содержанием. В этом ряду неравновесных природных процессов, практически демонстрирующих примеры масштабной инвариантности, находится и сейсмичность, "турбулентность в твёрдом теле" [19], что и определяет рассмотрение сейсмической статистики в терминах теории самоподобия.

В дальнейшем под термином "сейсмичность" будет подразумеваться коровая сейсмичность, т.е. мелкофокусная внутриплитовая сейсмичность, механизм которой можно связать с самоорганизацией и хрупким разрушением многокомпонентных горных пород. Такова, в частности, сейсмичность Южной Калифорнии, Забайкалья или Северной Анатолии. Механизм глубокофокусных землетрясений, наблюдаемых в таких регионах, как Новая Зеландия, острова Тонга или Охотское море, может быть иным. Физические процессы, приводящие к глубокофокусной сейсмичности, пока плохо известны. Они требуют дальнейших исследований.

2. Масштабная инвариантность в неравновесных многокомпонентных системах

2.1. Теория диссипативных структур

Теория диссипативных структур, созданная лауреатом Нобелевской премии Пригожиным и возглавлявшейся им

до 2003 г. брюссельской школой физхимиков, заложила основы современного представления о неравновесных диссипативных процессах и ввела терминологию, используемую ныне во многих областях науки [11, 12]. Теория рассматривает эволюцию открытых диссипативных систем, которые находятся в состояниях, далёких от равновесия, и состоят из метастабильных флуктуирующих подсистем. Нетрудно увидеть, что столь общее определение включает в себя чрезвычайно широкий класс систем, в том числе многие природные системы. Если в открытую диссипативную систему поступает энергии больше, чем она способна аккумулировать, то система сбрасывает энергию в точках "стока", или точках диссипации. Множества точек диссипации образуют пространственно-временные диссипативные структуры.

В 1945 г. Пригожин доказал теорему о минимуме производства энтропии в открытых системах [20]. Обозначим (следуя Пригожину) энтропию системы через S , перенос энтропии сквозь границы системы — как $d_e S$, а производство энтропии внутри системы — как $d_i S$. Для стационарных состояний

$$\frac{dS}{dt} = \frac{d_e S}{dt} + \frac{d_i S}{dt} = 0, \quad (1)$$

где t — время. Если граничные условия не позволяют системе достичь термодинамического равновесия (нулевого производства энтропии), то система переходит в состояние "наименьшей диссипации":

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \left(\frac{d_i S}{dt} \right) = 0, \quad (2)$$

где \mathbf{X} — обобщённая сила. Принцип минимума производства энтропии справедлив только в окрестности состояния равновесия, т.е. в слабонеравновесных системах. В сильнонеравновесных состояниях свойства системы могут изменяться самым радикальным образом: эволюция системы реализуется через последовательность бифуркаций, вблизи которых амплитуды флуктуаций могут превосходить средние значения параметров системы. Таким образом, свойства системы начинают определяться флуктуациями. Следствием сильнонеравновесных состояний являются появление диссипативных структур и самоорганизация. Пригожин так определяет самоорганизацию: "Самоорганизация — выбор одного из решений, возникающих в точке бифуркации, определяемый вероятностными законами. Сильно неравновесная самоорганизация приводит к увеличению сложности" [12].

С одной стороны, реализация будущего состояния сильнонеравновесной диссипативной системы через последовательность бифуркаций делает эволюцию системы необратимой, что, в частности, исключает описание системы в терминах детерминистической, допускающей обращение времени ($t \rightarrow -t$) механики, например описание процесса деформирования сейсмогенерирующей среды в терминах теории упругости. Однако, как это ни странно, термодинамическим флуктуациям в теории диссипативных структур отводится конструктивная роль — в многокомпонентных системах они являются причиной возникновения далекодействующих корреляций и процессов самоорганизации. Система, состоящая из метастабильных подсистем, в сильнонеравновесном состоянии начинает эволюционировать как единое целое, т.е., по сути, переходит в более упорядоченное состояние или даже последовательность более упорядоченных состояний. Вопреки классическому определению второго начала термодина-

мики для неравновесных, но закрытых систем, в открытых сильнонеравновесных диссипативных системах энтропия в процессе самоорганизации может понижаться, что является содержанием так называемой S -теоремы [21]. За пределами условия (2) открытые системы, в которых происходят необратимые флуктуационные, т.е. по сути своей — случайные, процессы, порождают высокие уровни организации — диссипативные структуры. Соответственно, энтропия, в традиционной физике считающаяся мерой неупорядоченности, в сильнонеравновесных системах может стать источником порядка.

С другой стороны, реализация будущего состояния сильнонеравновесной диссипативной системы через последовательность бифуркаций меняет понятие времени, делая его качественно более содержательным. Пригожин вводит понятие "внутреннего" времени неравновесной системы, являющегося мерой изменений термодинамической энтропии. Внутреннее время вводится как оператор, "подобный операторам, соответствующим различным физическим величинам в квантовой механике" [12], а измеряемые времена качественных изменений системы определяются собственными значениями этого оператора. Астрономическое время "становится средним оператора нового времени" [12]. Иными словами, внутреннее время в среднем совпадает с астрономическим, но может отличаться от него в периоды неустойчивостей.

Самоорганизация возникает только в системах с высоким уровнем нелинейности, в диссипативных неравновесных системах, эволюционирующих далеко за пределами применимости законов классической физики. Более того, для возникновения диссипативных структур обычно требуется, чтобы размеры системы превышали некоторое критическое значение, т.е. были достаточно велики. Такой системой и является сейсмогенерирующая система. Коровую сейсмичность, по всей видимости, следует понимать именно как результат самоорганизации материала земной коры, что и определяет средства её исследования.

2.2. Концепция самоорганизации

многокомпонентных систем в критическом состоянии

Введённая Пригожиным парадигма самоорганизации как спонтанного перехода от хаоса к порядку, образования и эволюции диссипативных структур в открытых нелинейных средах оказалась чрезвычайно плодотворной. В 1987 г. в работе [22] была предложена модель такого спонтанного перехода, вошедшая в литературу под названием "песчаная горка" (sandpile). Если струя песка сыплется на плоскость, то при достижении критического значения угла наклона поверхности горки к плоскости процесс переходит в установившийся режим: с горки съезжают "лавины", новый песок компенсирует потери массы горки, вызванные "лавинами", и форма горки перестаёт изменяться. При этом число лавин N , содержащих s песчинок, удовлетворяет соотношению

$$N(s) \propto s^{-\alpha}, \quad (3)$$

где α — константа. Свойство (3) оказалось универсальным для широкого класса неравновесных систем. Авторы работы [22] обозначили его термином *Self-Organized Criticality* — SOC. В русскоязычных статьях обычно используется термин "самоорганизованная критичность". Модель легко реализуется программно, что стимулировало её исследование многими авторами [23–25].

Концепция SOC сводит множество сложных процессов, в том числе наблюдаемых в природе, к простой модели, содержащей степенную зависимость (3), предлагая лишь по-разному интерпретировать входящие в зави-

симость переменные. Так, в качестве первого примера природного процесса, демонстрирующего самоорганизацию в критическом состоянии, авторы концепции SOC назвали сейсмичность [14]. Это объяснялось тем, что сейсмичность подчиняется твёрдо установленному эмпирическому закону Гутенберга–Рихтера, который в "энергетической" форме может быть представлен как

$$E(N) \propto N^{-\beta}, \quad (4)$$

где N — число землетрясений с энергией E , β — константа (из соображений логики показатель степени записан в (4) при безразмерном параметре). Далее последовал целый поток работ, в которых исследовался сейсмический процесс с позиций самоорганизации сложных систем в критическом состоянии [26–28].

Концепция SOC нашла применение во многих областях знаний [29]. Несмотря на предпринимавшиеся попытки придать ей форму классической теории с помощью, в частности, операторного формализма и теории групп [29, 30], SOC и сегодня остаётся "библиотекой компьютерных моделей", формально объединённых математическими аналогиями. Причина заключается в том, что SOC ориентирована на моделирование принципиально неинтегрируемых систем. Интегрируемые динамические системы изоморфны свободным, не взаимодействующим, частицам или допускают разложение по не взаимодействующим подсистемам. Самоорганизация в таких системах невозможна. Самоорганизация появляется только в тех системах, в которых свойства целого и частей не совпадают.

Степенные распределения (3), (4) служат статистическим выражением масштабной инвариантности. В реальных системах масштабная инвариантность имеет значительно более сложные формы, однако практически всегда указывает на то, что в результате самоорганизации система достигла критического состояния. Степенные распределения (или, как их иногда называют, распределения с "тяжёлым хвостом") дают высокую вероятность катастрофических событий, существенно большую, чем нормальное или экспоненциальное распределения. В этом смысле масштабно-инвариантные структуры часто связаны с опасностью разрушительных катастроф в системе и сами по себе могут служить индикатором этой опасности.

В сейсмическом процессе точками диссипации являются гипоцентры землетрясений. Множества гипоцентров (или эпицентров, если исследуются двумерные распределения) можно рассматривать как диссипативные структуры сейсмогенерирующей системы. Они возникают спонтанно в результате самоорганизации материала земной коры, причём самоорганизация приводит к их масштабной инвариантности (самоподобию). К счастью, абсолютное большинство землетрясений слишком слабо, чтобы нанести сколь-либо значительный ущерб хозяйственной деятельности человека. Однако, подчиняясь степенной зависимости (4), земная кора в сейсмоактивных регионах оказывается способной индуцировать редкие, но катастрофические события. Масштабная инвариантность сейсмических (т.е. диссипативных) структур, таким образом, может быть предупреждением о грозящей опасности, т.е. о переходе материала земной коры в критическое состояние.

2.3. Теория мультифрактальных мер

Теория мультифрактальных мер появилась как математическое средство для описания общего случая самоподобия,

возникающего во многих математических задачах и природных объектах, находящихся в критическом состоянии. Рождение фрактальной геометрии относится к 1982 г., когда была опубликована книга Мандельброта *Фрактальная геометрия природы* [31]. Впоследствии общая теория самоподобия (теория мультифрактальных мер) создавалась в работах Фриша и Паризи [32], Грассбергера [15], Хэлси [33], Мандельброта [9], Шертзера и Лавджоя [34, 35].

Приведём краткие пояснения к теории с определением используемых в дальнейшем терминов. Пусть F — ограниченная область D -мерного евклидова пространства. Будем считать, что в F определена (вероятностная) мера P . Покроем F сеткой одинаковых прямоугольных D -мерных боксов (ячеек), причём содержание меры P в i -м боксе обозначим p_i . Проводя ренормпреобразование меры (масштабное преобразование, ренормирование), мы можем изменять пространственное разрешение, объединяя несколько боксов исходной сетки в единый бокс на новом масштабном уровне (за создание общей теории ренормгрупп Вильсон [36] был удостоен Нобелевской премии). При исследовании физических систем мера P может характеризовать, например, распределение вероятности появления точек диссипации при переходе системы в критическое состояние. Если геометрические свойства критической системы одинаковы на всех масштабах, то критическое состояние будет для неё неподвижной точкой масштабного преобразования.

Введём в рассмотрение так называемую статистическую сумму (partition function):

$$Z_q(r) = \sum_{i=1}^N p_i^q(r), \quad q \in \{-\infty, +\infty\}, \quad (5)$$

где r — размер бокса масштабной сетки (масштаб), N — число непустых боксов, q — порядок момента меры. Для самоподобной меры справедлива степенная зависимость статсуммы от масштаба:

$$\sum_{i=1}^N p_i^q(r) \propto r^{-d}. \quad (6)$$

Если соотношение (6) выполняется, то показатель степени d является функцией q , т.е. $d = \tau(q)$, где $\tau(q)$ называют кумулянт-генерирующей функцией (cumulant generating function). В пределе $r \rightarrow 0$ она может быть определена как

$$\tau(q) = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln(\sum_{i=1}^N p_i^q(r))}{\ln(1/r)}. \quad (7)$$

При скейлинговом анализе физических систем функция $\tau(q)$ может быть получена непосредственно из результатов эксперимента. Пусть, например, при исследовании стохастического процесса в ходе какого-либо опыта, компьютерного или физического, получен результат в виде некоторого множества A , элементы которого могут иметь любую физическую природу. Считаем, что элементы множества находятся в конечномерном евклидовом пространстве $A \subset R^D$ ($D = 1, 2, 3, \dots$). Определим меру P как функцию множества A , которая характеризует вероятность обнаружения элементов множества в данной области пространства. Используем обозначения: A_i — число элементов множества A в i -м боксе масштабной сетки, N_A — полное число элементов множества. Вероятность p_i попадания элементов множества A в i -й бокс (или содержание меры P в i -м боксе) может быть аппроксимирована отношением $p_i = A_i/N_A$, соответственно, справедливо равен-

ство $\sum_{i=1}^N p_i = 1$. С помощью ренормировки мы можем рассматривать множество A на разных масштабных уровнях, что позволяет, в частности, формализовать само понятие "масштабный уровень". Значение $\tau(q)$ при данном q может быть оценено как коэффициент линейной регрессии $\ln(\sum_{i=1}^N p_i^q(r))$ на $\ln r$.

Спектром обобщённых фрактальных размерностей самоподобной меры называется функция [15]

$$D_q = \frac{\tau(q)}{1-q} = \frac{1}{q-1} \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln(\sum_{i=1}^N p_i^q(r))}{\ln r}. \quad (8)$$

Для обобщённых размерностей характерно свойство монотонности: $D_{q_1} \leq D_{q_2}$ при $q_1 \geq q_2$. Так же как и $\tau(q)$, функция D_q определена на бесконечном интервале от $q = -\infty$ до $q = \infty$. Как видим, фрактальные размерности D_q могут быть дробными.

При $q = 0$ величину D_0 называют монофрактальной размерностью или просто фрактальной размерностью d_f множества A (а также меры P , индуцированной множеством A). Фрактальная размерность обладает следующими свойствами:

— если множество A всюду плотно в R^D , то $d_f = D$; так, гладкая линия имеет размерность 1, гладкая поверхность — размерность 2 и т.д.;

— если $A_1 \subset A_2$, то $d_f(A_2) \geq d_f(A_1)$;

— если A_1, A_2, A_3, \dots — счётное число множеств N , то

$$d_f\left(\bigcup_{i=1}^N A_i\right) = \sup_i \{d_f(A_i)\};$$

— если A конечно, то $d_f = 0$.

Последнее свойство делает невозможным строгое применение понятия фрактальной размерности к анализу данных эксперимента, результатом которого может быть только конечное множество. Поскольку непосредственные расчёты с бесконечностями невозможны, вычисленные по данным эксперимента параметры скейлинга имеют смысл выборочных оценок размерностей (sampling dimension), определяемых в конечном диапазоне масштабов или с помощью конечной выборки.

Если множество A характеризуется единственным значением фрактальной размерности d_f , то его называют однородным (идеальным) фракталом или монофракталом. Мандельброт определяет фрактал как множество, для которого фрактальная размерность строго больше его топологической размерности [31] (признавая, что такое определение, возможно, является слишком строгим). Монофракталы относятся к простейшим нетривиальным самоподобным множествам, сохраняющим свою форму при центроаффинном преобразовании масштаба:

$$\mathbf{X}' = C\mathbf{X}, \quad (9)$$

где $\mathbf{X} = (x_1, \dots, x_n)^T$ — вектор-столбец координат элементов множества до преобразования, $\mathbf{X}' = (x'_1, \dots, x'_n)^T$ — вектор-столбец координат элементов множества после преобразования, C — оператор изменения масштаба. Если C — положительное действительное число, то соотношение (9) определяет группу преобразований подобия. Оператору изменения масштаба можно придать и более общий смысл (см. (19)–(21)).

Монофрактал — не самая реалистичная модель геометрии (точнее, топологии) реальных объектов. В общем случае самоподобное множество представляет собой суперпозицию фрактальных подмножеств, характеризующих собственными значениями фрактальных размерностей. При бесконечном числе подмножеств структура

объединяющего их множества описывается D_q -спектром, построенным с помощью индуцируемой множеством меры.

Альтернативным способом описания структуры самоподобной меры является вычисление масштабно-инвариантной функции $f(a)$ [33]. Для самоподобных мер (полей) выполняется условие

$$p_i \propto r^{a_i}, \quad (10)$$

где индекс сингулярности a_i зависит от положения i -го бокса. Индекс сингулярности a_i характеризует локальное самоподобие исследуемого поля. В работе [33] меру P предложено называть мультифракталом, если для неё выполняется также условие глобального самоподобия:

$$\sum N_a(r) \propto \rho(a, r) r^{-f(a)}. \quad (11)$$

Здесь $\sum N_a(r)$ — число боксов с общим значением a , $\rho(a, r)$ — медленно изменяющаяся по a и r функция, для которой

$$\frac{\ln \rho(a, r)}{\ln(1/r)} \xrightarrow{r \rightarrow 0} 0. \quad (12)$$

Префактор $\rho(a, r)$ служит для коррекции соотношения (11) при r , далёких от нуля, и может использоваться для оценки степени лакуарности объекта. Функция $f(a)$ получила название спектра сингулярностей мультифрактальной меры.

Из (10) находим (если предел существует)

$$a_i = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln p_i}{\ln r}. \quad (13)$$

Из (11) следует

$$f(a) = -\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\ln \sum N_a}{\ln r}. \quad (14)$$

Можно показать, что спектр обобщённых фрактальных размерностей D_q связан со спектром сингулярностей $f(a)$ преобразованием Лежандра [9]:

$$a = \frac{d[(q-1)D_q]}{dq}, \quad (15)$$

$$f(a) = aq + (1-q)D_q. \quad (16)$$

Преобразование Лежандра позволяет практически вычислить спектр сингулярностей $f(a)$ при скейлинговом анализе физических объектов. Отметим, однако, что преобразование Лежандра, которое включает в себя ряд сглаживающих операций, чувствительно к конечному разрешению сетки и недостаточной статистической представительности данных. В результате слабые возмущения функции $\tau(q)$, являющиеся предметом поиска, могут быть потеряны в процессе численных расчётов. Искажение или линейаризация $\tau(q)$ могут быть вызваны также непредставительностью исходных данных. При малых значениях $|q|$ малоамплитудные осцилляции кумулянт-генерирующей функции могут быть связаны с наличием собственного шума в исследуемом физическом объекте, а также с наличием шума в системе измерения, где его появление часто бывает неизбежным. Для вычисления $f(a)$ без использования преобразования Лежандра предложен алгоритм прямого вычисления спектра сингулярностей [37]. Разработаны и другие алгоритмы определения масштабно-инвариантной функции $f(a)$, например с помощью построения гистограммы распределения отношения

$\ln(\sum_a N_a)/\ln(1/r)$ и последующей параболической интерполяции гистограммы [38]. Каждый из алгоритмов имеет свою область применения, что требует осторожности при их использовании, так как при обработке экспериментальных данных пределы в (8), (13) и (14) могут быть получены только приближённо.

Кумулянт-генерирующая функция не имеет экстремумов. Экстремум $f(a)$ равен монофрактальной размерности меры $f_{\max}(a) = D_0$. Размерности D_1 и D_2 обычно называют энтропийной и корреляционной размерностями исследуемой меры и поддерживающего её множества соответственно. В случае, когда исследуемое множество представляет собой монофрактал, энтропийная и корреляционная размерности индуцируемой множеством меры, так же как и все прочие размерности, совпадают со значением монофрактальной размерности множества-носителя. Мультифрактальные меры недифференцируемы, соответственно вероятность, представляющая собой содержание меры, не может быть соотнесена с плотностью вероятности.

Таким образом, если носителем мультифрактальной меры P является множество A , которое может быть представлено как объединение фрактальных подмножеств A_a с фрактальными размерностями a :

$$A = \bigcup_a A_a, \quad (17)$$

то топологические свойства меры могут быть описаны с помощью таких масштабно-инвариантных функций, как спектр обобщённых фрактальных размерностей D_q или спектр сингулярностей $f(a)$.

В работах Шертзера и Лавджоя [34, 35] теория строится на понятии коразмерности, т.е. числа, дополняющего фрактальную размерность до размерности пространства вложения множества. В работах этих авторов используется $(\gamma, c(\gamma))$ -нотация, которую они называют "турбулентной", в отличие от использованной выше $(a, f(a))$ -нотации, которую они называют "аттракторной". С точки зрения исследования объектов физического пространства (т.е. объектов, существующих в виде единственной реализации) обе нотации эквивалентны. Упомянутые авторы ввели в рассмотрение понятие "обобщённой масштабной инвариантности" [35]. В качестве операции преобразования масштаба они используют отображение

$$B' = T_\lambda B, \quad (18)$$

где B и B' — координаты элементов множества до и после преобразования, T_λ — оператор изменения масштаба. Оператор T_λ авторы записывают в виде

$$T_\lambda = \lambda^{-G}, \quad (19)$$

где λ — безразмерный масштабный фактор. В случае линейного масштабного преобразования показатель степени G в (19) выражается через суммы матриц, известных в алгебре кватернионов (ограничимся рассмотрением двумерного (2D) пространства):

$$G = a\hat{1} + b\hat{I} + c\hat{J} + d\hat{K}, \quad (20)$$

где $\hat{1}, \hat{I}, \hat{J}, \hat{K}$ — аналоги матриц Паули,

$$\hat{1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \hat{I} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (21)$$

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \hat{K} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

a, b, c, d — масштабные множители. Таким образом, в частности, в случае анизотропного линейного масштабного преобразования форма бокса масштабной сетки становится функцией масштаба. Заметим, что в общем случае преобразование масштаба может быть нелинейным.

Фрактальное описание физических систем представляет собой, по сути, статистическое описание, которое можно сравнить с термодинамическим описанием системы в терминах ансамблей. Так, функция $f(a)$ играет в теории мультифрактальных мер роль, аналогичную роли энтропии в термодинамике [18]. Такое сравнение отнюдь не формально, поскольку в физическом смысле отражает направленность и термодинамики, и теории фракталов на описание многокомпонентных систем. Напомним, что возможность геометрической формулировки термодинамики была продемонстрирована в работах Гиббса ещё в начале XX в. [39]. Если классическая физика всегда понималась как наука о преобразованиях энергии, то неравновесная физика — это, скорее, наука о преобразованиях структур.

Термодинамические аналогии в теории мультифрактальных мер ($f(a) \sim -S$, $q \sim T^{-1}$, $a \sim -E$, где S — энтропия, T — абсолютная температура, E — свободная энергия Гиббса) были, разумеется, немедленно замечены автором теории диссипативных структур. В книге [11] Пригожин отмечает, что исследования неравновесных систем с самого начала требовали расширенного функционального пространства и отсутствие адекватного математического аппарата создавало "технические" проблемы. Сильная неустойчивость неравновесных процессов разрушает траектории системы в фазовых пространствах (даже при сколь угодно точном задании начальных условий), поэтому статистическое описание системы становится единственно возможным. Фрактальная геометрия предоставила теории диссипативных структур недостающий функциональный аппарат. В предложенной Мандельбротом терминологии диссипативные структуры можно назвать структурами, обладающими фрактальной организацией, что привело Пригожина к выводу: "В понимании законов природы фракталы играют решающую роль" [11].

3. Масштабная инвариантность дизъюнктивных структур земной коры и сейсмичности

3.1. Реальные структуры

Появление фрактальной геометрии и разработка компьютерных алгоритмов обработки экспериментальных данных привели к быстрому росту числа работ, исследующих самоподобие природных объектов. Оказалось, что многие природные процессы и геометрические формы, принимаемые природными системами, являются самоподобными, что почти буквально подтвердило основной тезис теории диссипативных структур: природа создана неравновесными процессами и создаётся ими в настоящее время. С середины 1980-х годов началось также исследование пространственно-временных самоподобных структур, возникающих при разрушении поликристаллических горных пород и сейсмичности. Сегодня можно говорить о том, что экспериментаторам удалось изучить геометрию разрушения горных пород практически во всём масштабном диапазоне, в котором происходит разрушение. Экспериментальные результаты в связи с их большим количеством и многократной повторяемостью не оставляют сомнений в том, что масштабная симметрия является фундаментальным атрибутом разрушения.

Низший масштабный уровень трещинообразования определяется лишь возможностью отличить микротрещины от точечных дефектов в кристаллах, что соответствует длинам трещин в $10^{-9} - 10^{-7}$ м. С помощью прямых измерений методами рентгеновской и электронной сканирующей микроскопии, а также методом малоуглового рассеяния нейтронов неоднократно показано, что микротрещины формируют множества масштабно-инвариантной, фрактальной структуры уже на уровне кристаллической решётки [40–44]. По всей видимости, это означает, что пространственные распределения точечных дефектов в кристаллах также подчинены мультифрактальной статистике, однако на этот вопрос пока трудно ответить определённно в связи со сложностью проведения непосредственных наблюдений.

Следующий масштабный уровень исследования разрушения — это уровень возможностей оптической микроскопии и метода акустической эмиссии (длина трещин $10^{-6} - 10^{-3}$ м). Разрушение при этом реализуется, как правило, в результате нагружения образцов горных пород на лабораторных прессах. Макрохарактеристики разрушения в таких экспериментах могут зависеть от типа породы, её водонасыщенности, жёсткости нагружающей машины, величины гидростатического давления или скорости деформирования, однако пространственное распределение трещин в образце практически всегда оказывается фрактальным, масштабно-инвариантным. Количество работ в этой области также весьма значительно, сошлёмся только на некоторые из них [45–49].

Более высокий масштабный уровень разрушения — геофизический, при котором пространственные распределения трещин исследуются на таких объектах, как разрушенная порода между берегами сейсмоактивного разлома (fault-gouge — в англоязычной литературе), зеркала скольжения на горных обнажениях и других естественных объектах (длина трещин $10^{-2} - 10^2$ м). Методы исследований — люминесцентная или капиллярная дефектоскопия, картирование на местности, компьютерная обработка фотографий и т.д. Фрактальный характер распределений трещин обнаруживается и здесь [50–53].

Наконец, наиболее крупный масштабный уровень разрушения материала земной коры, доступный исследованию, — это уровень сейсмоактивных разломов, изучаемых географическими или геологическими методами, а также с помощью аэрофотосъёмки или космической съёмки (длина разломов $10^3 - 10^5$ м). Фрактальный анализ этих объектов проводился ещё в начале 1990-х годов, а через некоторое время было доказано, что пространственные распределения разломов земной коры демонстрируют общий случай самоподобия, т.е. они подчинены мультифрактальной структурной организации [54–58]. Отметим, что из всех случаев разрушения горных пород именно разломные структуры земной коры (ввиду их больших размеров) могут быть изучены в наиболее широком масштабном диапазоне. Так, в работах [56, 57] разрешение масштабной сетки составляло $2^9 \times 2^9$. Такое масштабное разрешение не всегда может быть достигнуто даже при исследовании метеорологических или гидрологических объектов [58–60].

Наличие скейлинга в пространственных распределениях эпицентров землетрясений было обнаружено ещё до появления фрактальной геометрии с помощью метода вычисления корреляционного интеграла [61], а исследования сейсмичности методами теории мультифракталов начались с 1990 г. [62–64]. В середине 1990-х годов мультифрактальный характер сейсмического процесса ещё подвергался тщательному исследованию [65], но в последую-

щем сложилось ясное представление о том, что и сейсмичность, и разломообразование объединены общей мультифрактальной природой [66, 67]. В современных работах мультифрактальность понимается уже как фундаментальное свойство сейсмичности [68–72].

С середины 1990-х годов начались исследования самоподобия временного хода сейсмичности [73–75], т.е. исследования временных диссипативных структур сейсмического процесса. Сделаем здесь необходимую оговорку. Между мультифрактальностью пространственных распределений эпицентров землетрясений и мультифрактальностью временного хода сейсмичности существует определённая разница. Пространственные сейсмические поля — это мультифракталы с локализованными сингулярностями. Для пространственных сейсмических полей (т.е. мультифрактальных мер, моделирующих пространственное распределение эпицентров землетрясений) характерны существование предела (13) и многократная генерация микроземлетрясений в одних и тех же точках поля. В частности, это приводит к тому, что пространственные распределения эпицентров палеосейсмичности практически совпадают с распределениями современной сейсмичности в тех областях, для которых имеются представительные исторические каталоги (Италия, Греция, Кавказ, Скандинавия). Иными словами, пространственные распределения сейсмичности описываются "геометрическими" мультифракталами.

Но временной ход сейсмичности этим свойством не обладает, для него характерна мультифрактальность иного рода. Временной ход сейсмичности описывается "стохастическими" мультифракталами, для которых предел (13) отсутствует, т.е. во временном ходе сейсмичности обнаруживается статистическое самоподобие. Разницу между геометрическими и стохастическими мультифракталами удобнее всего пояснить с помощью такой математической процедуры, как мультипликативный каскад (см. ниже).

Исследования самоподобия временного хода сейсмичности интенсивно продолжают по сей день [76, 77]. Несомненно, что масштабная инвариантность во временном ходе сейсмичности обнаруживается, однако это вызывает естественный вопрос: являются ли временные сейсмические ряды самоподобными *всегда* или только на определённых этапах сейсмического процесса? Ведь сейсмический процесс можно считать практически бесконечным, хотя сегодня мы можем исследовать выборки данных как максимум за 20–30 лет. Далее мы попробуем найти ответ на этот вопрос, а пока подведём итоги экспериментальных работ.

Фрактальная организация множеств трещин характерна для всех мезомасштабов разрушения от микро- до макроуровня, т.е. от масштабного уровня кристаллической решётки до масштабов землетрясений и сейсмоактивных разломов. Уже ввиду этого принципиального подобия сейсмичность и микротрещинообразование следовало бы отнести к одному классу универсальности [78], однако подлинная связь между ними глубже. Независимость структуры разрушения от масштаба позволяет (в качестве обоснованного предположения) рассматривать микротрещинообразование и сейсмичность как противоположные границы масштабного спектра единого масштабно-инвариантного процесса, управляемого едиными параметрами порядка. У нас нет оснований различать микротрещинообразование и сейсмичность по уровню сложности, количеству управляющих параметров или по геометрии разрушения, поскольку во всём масштабном диапазоне между микротрещинообразованием и сейсмичностью нам неиз-

вестны какие-либо масштабные границы. По данным работы [50] даже монофрактальные размерности трещинных структур в широком масштабном диапазоне существования разрушения горных пород укладываются в довольно узкий интервал значений: $d_f \approx 2,6 \pm 0,11$ (для трёхмерных распределений). Разрушение горных пород сохраняет масштабную симметрию в настолько широком масштабном диапазоне, что по этому параметру его трудно сравнить с каким-либо другим физическим процессом на Земле!

3.2. Некоторые модельные результаты

Появление мощных быстродействующих компьютеров позволило приступить к программированию численных многошаговых алгоритмов в различных моделях кинетического роста, в частности сеточных моделях квазистатического разрушения структурированных твёрдых тел. В моделях такого рода предполагается, что деформационные свойства сетки описываются уравнениями механики сплошной среды, а рост трещины моделируется разрывом связей сетки. Напомним, что неравновесное состояние материала в вершине трещины, согласно теории диссипативных структур, должно приводить к определяющей роли термодинамических флуктуаций при разрушении. Воспроизведение флуктуационного характера роста трещины обеспечивается включением в компьютерную программу генератора случайных чисел для выбора направления распространения разрыва. Приоритет в этой области принадлежит работам [79, 80], в которых получены фрактальные кластеры трещин в виде полостей в сетке с треугольными ячейками. В последующих работах [81, 82] были использованы как треугольные, так и прямоугольные сетки. Алгоритмы включали в себя как генератор случайных чисел, так и фиксированные правила разрыва связей [83]. Сеточные модели разрушения устойчиво приводят к генерации монофрактальных трещинных структур, фрактальная размерность которых слабо зависит от конкретного вида поля напряжений. Однако в этих работах рассматривалась только упругая реология материала. Совместить флуктуационный характер разрушения с неравновесным состоянием всей сетки удалось в работе [84] на прямоугольной упруго-вязкой сетке. Рассмотрим эту модель и получаемый с её помощью результат.

Разрушение (рост трещинного кластера) в модели осуществлялось посредством пошагового алгоритма разрыва связей в сетке следующим образом. Внесём в сетку начальный дефект (один или несколько), уничтожив одну связь (или несколько). Введём ортогональную систему координат x_1, x_2, x_3 , причём оси x_1 и x_2 расположим в плоскости сетки. Модельные построения начнём с уравнений равновесия напряжений в деформированном теле: $\sigma_{ij,j} = 0$, где σ_{ij} — тензор напряжений. Учитывая, что ключевая роль в процессе тектонического разрушения земной коры принадлежит касательным напряжениям, будем связывать рост трещин с поведением девиатора напряжений. Оставаясь в рамках плоской задачи, будем считать, что $\sigma_{13} \neq 0$ и $\sigma_{23} \neq 0$ ($\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{12} = 0$). Обозначим через U вектор смещения с компонентами U_1, U_2, U_3 , а через γ_{ij} тензор деформации, тогда деформации сдвига будут выражаться как $\gamma_{13} = U_{3,1}, \gamma_{23} = U_{3,2}$. Рассмотрим разрушение в неравновесной (упруго-вязкой) сетке, т.е. будем считать, что связи сетки деформируются в соответствии с реологическим уравнением тела Кельвина, предложенным в [85] для описания тектонического деформирования материала земной коры. Тогда соотношение между напряжениями и деформациями выразится как

$$\sigma_{ij} = L(2\gamma_{ij}), \quad (22)$$

где $L = \mu + \eta \partial/\partial t$ — линейный упруго-вязкий оператор, μ — модуль сдвига, η — коэффициент вязкости, t — время.

Таким образом, разрешающее уравнение модели примет вид

$$L(\Delta U_3) = 0, \quad (23)$$

где Δ — двумерный оператор Лапласа, U_3 — смещение, нормальное к плоскости сетки. При $\sigma_{ij,t} = 0$ решение уравнения (23) можно представить как

$$U_3 = U_3^\infty + (U_3^0 - U_3^\infty) \exp\left(-t \frac{\mu}{\eta}\right). \quad (24)$$

Рост трещины в сеточных моделях дискретен, разбит на "шаги", под которыми понимается переход сетки из состояния с \mathfrak{R} разрушенными связями в состояние с $\mathfrak{R} + 1$ разрушенными связями, $\mathfrak{R} = 1, 2, 3, \dots$. Под t^0 будем подразумевать момент времени, соответствующий началу очередного "шага" ($t^0 = 0$), t^∞ — время, за которое сетка приходит в состояние, близкое к равновесному. В выражении (24) U_3^0 — поле смещений в момент t^0 , U_3^∞ — поле смещений в момент t^∞ . Можно показать, что выражение (24) является решением уравнения (23), если U_3^∞ представляет собой гармоническую функцию, $\Delta U_3^\infty = 0$, удовлетворяющую граничным условиям. Для целей численного интегрирования уравнение (23) с помощью центрально-разностных аппроксимаций второго порядка заменялось системой конечно-разностных уравнений, решаемых итерационно. Граничные условия на внешнем контуре G задавались в смещениях $U_3(G) = f(G)$. На внутреннем контуре сетки устанавливались граничные условия в виде $\sigma_{ij}n_j = 0$, где \mathbf{n} — единичный вектор, направленный по внешней нормали к поверхности.

Флуктуационный характер разрушения в природных условиях означает, что время и направление разрушения определяются термодинамическими флуктуациями. В модели функцию флуктуаций выполнял генератор случайных чисел. С его помощью определялись время разрушения t^f ($t^f < t^\infty$) и очередная разрушаемая связь сетки из 5–10% наиболее напряжённых связей на момент разрушения. Процесс роста трещинного кластера представлял собой многократное (до 10^3 раз) повторение процедуры разрушения связей сетки. Поле смещений на момент разрушения очередной связи определяло начальные условия для следующего "шага" генерации кластера. При этом сетка *никогда* не находилась в равновесии, она непрерывно пребывала в условиях вязкого деформирования, и разрывы очередных связей изменяли параметры деформирования.

Рисунок 1а показывает одну из реализаций трещинного кластера, полученную в этой компьютерной модели. Трещинный кластер сгенерирован на сетке с разрешением 100×100 из двух начальных дефектов, помещённых в центр сетки. Множество разрушенных связей сетки исследовано методами мультифрактального анализа; $f(a)$ — спектр меры, индуцированной множеством разрушенных связей, приведён на рис. 1б.

Если упругие сетки дают преимущественно монофрактальные кластеры (или очень слабо мультифрактальные), то в данном случае в доступном для моделирования диапазоне масштабов спектр сингулярностей $f(a)$ не вырождается в точку, т.е. множество разрушенных связей сетки не является монофракталом. Трещинный кластер демонстрирует развитый мультифрактальный скейлинг. Неравновесного состояния сетки и "флуктуационного" выбора направления роста трещин (даже при постоянных значениях параметров "макросостояния среды" $U_{3,t}(G) = 0$)

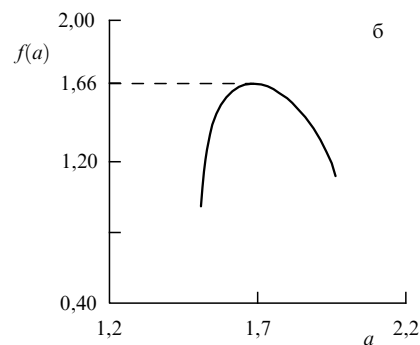
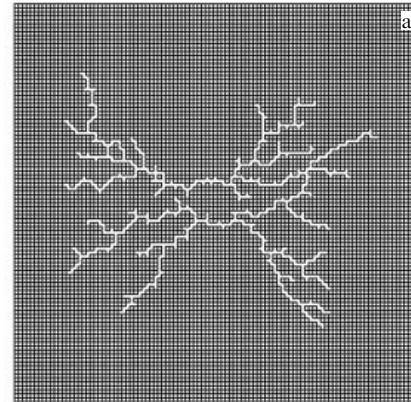


Рис. 1. (а) Трещинный кластер, сгенерированный на сетке 100×100 из двух начальных дефектов в центре сетки. (б) Спектр сингулярностей мультифрактальной меры, индуцированной множеством разрушенных связей сетки.

вполне достаточно для того, чтобы получить структурную организацию дизъюнктивных нарушений сплошности, которая наблюдается в земной коре на разных масштабах. Модель описывает всё разнообразие структурных элементов, встречающихся в природных системах: непрямолинейность траекторий, бесконечно повторяющее само себя ветвление, слияние трещин и даже образование ими замкнутых петель. И хотя моделируемый процесс не сводится к аналитически интегрируемой системе дифференциальных уравнений (генератор случайных чисел непрерывно разрушает аналитичность решения), компьютерное моделирование оказывается адекватным физической сути объекта моделирования (нединамического роста трещин или разломов в земной коре). Мультифрактальные аппроксимации пространственных распределений трещин могут рассматриваться как реалистичные, а возможно, и адекватные модели природных распределений.

Природный процесс, однако, характеризуется многофакторностью, большим количеством взаимодействующих физических полей. Разломообразование и сейсмичность происходят одновременно в одной и той же природной системе (вместе с ними наблюдаются и такие явления, как вертикальные смещения дневной поверхности, изменение водопроницаемости и т.д., причём масштабная инвариантность присуща и им [60, 86, 87]). Независимы ли скейлинги этих процессов? Этот вопрос заставляет искать принципиально новые статистические модели, позволяющие раскрыть взаимодействие природных процессов на качественно новом уровне.

Основой такого моделирования стала мультипликативная каскадная процедура, предложенная первоначально в работах [88, 89] для описания турбулентности. В общем случае эту процедуру можно определить следую-

щим образом. Единичный D -мерный отрезок подвергается λ^D -адическому разбиению, где λ — целое число, $\lambda \geq 2$. На первой итерации каждому i -му элементу разбиения ставится в соответствие положительный множитель m_j и все m_j образуют конечный набор чисел (начальных множителей), удовлетворяющих условиям

$$0 \leq m_1 \leq m_2 \leq \dots \leq m_{\lambda^D} < 1, \tag{25}$$

$$\sum_{j=1}^{\lambda^D} m_j = 1. \tag{26}$$

На второй итерации каждый элемент разбиения вновь подвергается λ^D -адическому разбиению и каждому вновь образованному элементу вновь ставится в соответствие один из начальных множителей. Результатом мультипликативной процедуры на второй итерации являются произведения множителей "материнского" и "дочернего" элементов разбиения. На последующих итерациях процедура повторяется. Обозначим через k номер итерации. На k -й итерации i -му элементу разбиения ставится в соответствие произведение $\prod m_j^{k\phi_j}$, где ϕ_j — относительные частоты, с которыми множители m_j присутствуют в этих произведениях. Поскольку

$$\sum_{i=1}^{\lambda^{kD}} \prod m_j^{k\phi_j} = 1, \quad k \rightarrow \infty, \tag{27}$$

величины $p_i = \prod m_j^{k\phi_j}$ могут рассматриваться как доли некоторой мультиномиальной меры P , сосредоточенные на i -х элементах разбиения (в i -х боксах масштабной сетки). Каждая последующая итерация модулирует наследуемое от предыдущего масштабного уровня распределение меры, повышая перемежаемость распределения. Сингулярная, нигде не дифференцируемая мера P в пределе $k \rightarrow \infty$ является мультифракталом, в том числе и при произвольных перестановках множителей "дочерних" боксов в рамках "материнского" бокса. Мультипликативные генераторы позволяют получить бесконечное разнообразие самоподобных распределений.

Если множители m_j в каскадной процедуре сохраняют постоянные значения, то результатом будет самоподобная, строго ренормируемая мера, или так называемый геометрический мультифрактал. Однако мера P сохранит статистическое самоподобие и тогда, когда множители m_j будут случайными числами, для которых условие

$$\sum_{j=1}^{\lambda^D} m_j = 1$$

выполняется лишь в среднем по полю. В этом случае сингулярности мультифрактального поля уже не будут локализованными, при смене масштабных уровней они будут совершать случайные блуждания по полю. Такие стохастические мультифракталы в работах [34, 35, 65] названы "универсальными".

Термин "универсальные мультифракталы" (не слишком удачный и по мнению самих авторов) не должен вводить в заблуждение — повышение роли случайности при формировании меры приводит не к обобщению, а к изменению свойств мультифрактала. Геометрические и стохастические мультифракталы относятся к моделям разных по свойствам физических процессов. Так, для процессов, происходящих в твёрдом теле, случайные блуждания сингулярностей по пространственным полям или распределениям явно нетипичны. Соответственно, адекватной моделью пространственных распределений разломообразо-

вания и сейсмичности естественно считать геометрические мультифракталы. Стохастические мультифракталы применяются для целей математического моделирования в метеорологии и гидрологии [34, 35, 60] и могут использоваться для моделирования временного хода сейсмичности.

Рассмотрим подробнее структуру двумерного мультифрактального поля, которое может быть сгенерировано с помощью геометрического мультипликативного каскада (в дальнейшем мы воспользуемся такими полями для моделирования пространственных распределений сейсмичности). Пусть 2D-каскад (геометрический) содержит n неповторяющихся множителей, не связанных между собой другими соотношениями, кроме условий генерации мер (25), (26). Каждая итерация создаёт λ^{2k} боксов масштабной сетки, представляющей собой суперпозицию $\Lambda(n, k)$ подмножеств боксов, характеризующихся общим значением сосредоточенных на них долей меры p_i . Эти подмножества являются фрактальными или, точнее, становятся таковыми при $k \rightarrow \infty$. Очевидно, на первой итерации $\Lambda(n, 1) = n$. При $n = 2$, как известно из теории биномиальной меры, $\Lambda(2, k) = k + 1$. Значения $\Lambda(n, k)$ при произвольных n и k могут быть получены с помощью рекуррентной формулы [90]

$$\Lambda(n, k) = \Lambda(n, k - 1) + \Lambda(n - 1, k), \quad n > 2, \quad k > 1. \tag{28}$$

Для описания структуры меры применим полиномиальную теорему, известную в комбинаторике [91]. Доли меры на боксах сетки имеют вид

$$p_i = m_1^{\zeta_1} m_2^{\zeta_2} \dots m_{\lambda^2}^{\zeta_{\lambda^2}}, \tag{29}$$

где $\zeta_1, \dots, \zeta_{\lambda^2}$ — количества множителей $m_1, \dots, m_{\lambda^2}$ в произведениях (29). Количество боксов в каждом из $\Lambda(n, k)$ подмножеств на k -й итерации выражаются как

$$\sum N_a = \frac{k!}{\zeta_1! \zeta_2! \dots \zeta_{\lambda^2}!}, \tag{30}$$

причём для показателей степеней в (29) выполняется условие

$$\zeta_1 + \dots + \zeta_{\lambda^2} = k. \tag{31}$$

Кумулянт-генерирующая функция выражается через значения множителей следующим образом:

$$\tau(q) = \frac{\ln \left(\sum_{j=1}^{\lambda^2} m_j^q \right)}{\ln \lambda}. \tag{32}$$

Проведя преобразование Лежандра, получим выражения для спектра сингулярностей мультифрактального поля:

$$a(q) = \frac{\sum_{j=1}^{\lambda^2} m_j^q \ln m_j}{\ln \lambda \sum_{j=1}^{\lambda^2} m_j^q}, \tag{33}$$

$$f(a(q)) = \tau(q) + aq. \tag{34}$$

Продолжим модельные построения и построим теперь модель двух структурно взаимосвязанных мультифрактальных процессов. Пусть два двумерных геометрических мультипликативных каскада, Γ' и Γ'' , моделируют два мультифрактальных поля. Будем считать, что:

- 1) каскады имеют одинаковую структуру, т.е. $\lambda' = \lambda''$;
- 2) между множителями каскадов установлено взаимно однозначное соответствие, $m'_j \leftrightarrow m''_j$, т.е. при построении модельных полей могут использоваться только попарно

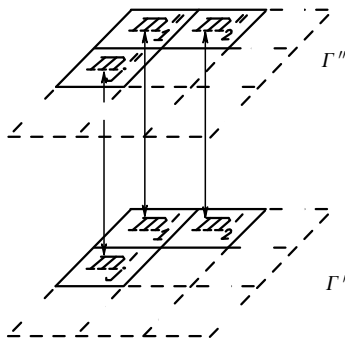


Рис. 2. Распределение модельных мер на второй итерации мультипликативного процесса в модели согласования скейлингов при использовании двумерных мультипликативных каскадов. Стрелки указывают на множители, находящиеся во взаимно однозначном соответствии при любых допустимых перестановках в ходе следующих итераций.

сопряжённые перестановки множителей, при которых в боксах обеих масштабных сеток с одним номером i очередные сомножители на k -й итерации находятся во взаимно однозначном соответствии (рис. 2).

При всех произвольных перестановках множителей "дочерних" боксов в рамках "материнского" бокса в процессе генерации мер множители разных каскадов, но с одинаковыми индексами будут переставляться одинаково. Свяжем численные значения множителей этих каскадов m'_j и m''_j степенной зависимостью:

$$m''_j = c(m'_j)^\omega, \quad (35)$$

где c — коэффициент пропорциональности. В работе [92] показано, что, выражая параметры одного поля через параметры другого, мы придём к следующим соотношениям для характеристик генерируемых каскадами полей:

$$a'' = \omega a' + \frac{\omega \ln(\sum_{j=1}^{\lambda^2} m'_j) - \ln(\sum_{j=1}^{\lambda^2} (m'_j)^\omega)}{\ln(1/\lambda)}, \quad (36)$$

$$f''(a'') = f'(a'), \quad (37)$$

где a' , a'' — индексы сингулярности двух полей в точках с одинаковыми координатами, $f'(a')$, $f''(a'')$ — спектры сингулярностей этих полей. Кроме того, мы получим ещё одно важное соотношение:

$$\omega = \frac{a''_{\max} - a''_{\min}}{a'_{\max} - a'_{\min}}, \quad (38)$$

где a'_{\max} , a'_{\min} — максимальное и минимальное значения индексов сингулярности для поля, генерируемого каскадом Γ' , а a''_{\max} , a''_{\min} — соответствующие значения индексов сингулярности для поля, генерируемого каскадом Γ'' . Мы видим, что скейлинги генерируемых полей не тождественны друг другу, но они согласованы между собой, поэтому в работах [92, 93] эта модель была названа моделью согласования скейлингов.

Сейсмичность даёт нам пример двух мультифрактальных полей с согласованными скейлингами: пространственные распределения эпицентров землетрясений (сейсмические поля) и пространственные распределения сейсмической энергии (сейсмоэнергетические поля). Будем считать, что каскад Γ' генерирует модель сейсмического поля, а каскад Γ'' — модель сейсмоэнергетического поля. Напом-

ним, что закон Гутенберга–Рихтера может быть представлен также в виде [92]

$$E_{\text{sum}} \propto N_{\text{sum}}^\beta, \quad (39)$$

где E_{sum} — суммарная энергия представительного числа землетрясений, N_{sum} — суммарное число этих землетрясений, β — показатель степени (абсолютное значение) из формулы (4). Отражающее этот факт соотношение между множителями мультипликативных каскадов принимает вид $m''_j = c(m'_j)^\beta$ [90], а выражения (36) и (38) можно представить в виде, допускающем непосредственную проверку с помощью сейсмических данных:

$$a'' = \beta a' + \text{const}, \quad (40)$$

$$\beta = \frac{a''_{\max} - a''_{\min}}{a'_{\max} - a'_{\min}}. \quad (41)$$

Теперь a' — это индексы сингулярности сейсмического поля, а a'' — индексы сингулярности сейсмоэнергетического поля. Выражения (37) и (40) показывают, что при вышеприведённых условиях 1 и 2 согласования скейлингов спектр сингулярностей одного поля должен трансформироваться в спектр сингулярностей другого поля с помощью аффинных преобразований растяжения и сдвига. А ведь $f(a)$ -спектры — сильнонелинейные функции и, будучи построенными по совершенно разным данным, они могут совпасть после линейных преобразований только в том случае, если они действительно удовлетворяют соотношениям (37) и (40).

Для проверки полученных модельных результатов было исследовано множество землетрясений, произошедших на участке земной коры площадью 60×60 км² в окрестности г. Барстоу (Barstow) к северо-востоку от Лос-Анджелеса (данные Южно-Калифорнийского каталога). За период 01.01.1992–31.12.2000 в диапазоне магнитуд $M \geq 1,9$ каталог для этого участка приводит данные о 2946 событиях, которые и составили исследуемую выборку. Пространственное распределение эпицентров этих событий приведено на рис. 3а.

На рисунке 3б представлена зависимость $\lg E$ от $\lg N$ по данным исследуемой выборки. Кружки, соединённые штриховой линией, соответствуют данным каталога, прямая представляет собой график линейной регрессии, вычисленной по экспериментальным точкам методом наименьших квадратов. Коэффициент регрессии $\beta = -1,570 \dots$

На рисунке 3в приведены $f(a)$ -спектры сейсмического (1) и сейсмоэнергетического (2) полей, построенные по данным исследуемой выборки. Максимальные и минимальные значения индексов сингулярности для исследуемых полей составили: $a'_{\min} \approx 0,770$, $a'_{\max} \approx 4,592$, $a''_{\min} \approx 0,502$, $a''_{\max} \approx 6,495$. Используя (41), получаем вторую оценку "наклона графика повторяемости": $\beta \approx 1,568$.

Зависимость (40) представим в виде $a'' = \beta a' + \phi$. Оценки коэффициентов β и ϕ могут быть найдены разными методами в зависимости от выбранного критерия расхождения спектров. В данном случае подбор коэффициентов осуществлялся посредством построения промежуточной функции $\hat{\tau}(q) = \beta \tau'(q) + \phi q$ и использования критерия Колмогорова $I = \sup_{-30 \leq q \leq 30} |\tau''(q) - \hat{\tau}(q)|$ для минимизации модуля максимальной невязки между $\tau''(q)$ и $\hat{\tau}(q)$. Здесь $\tau'(q)$ и $\tau''(q)$ — кумулянт-генерирующие функции для сейсмического и сейсмоэнергетического полей. Результатом стали оценки: $\beta \approx 1,545$, $\phi \approx -0,643$. На рисунке 3г приведены $f(a)$ -спектр сейсмоэнергетического поля и $f(a)$ -спектр сейсмического поля, перестроенные в соответствии с выражениями (37) и (40) с указанными значениями

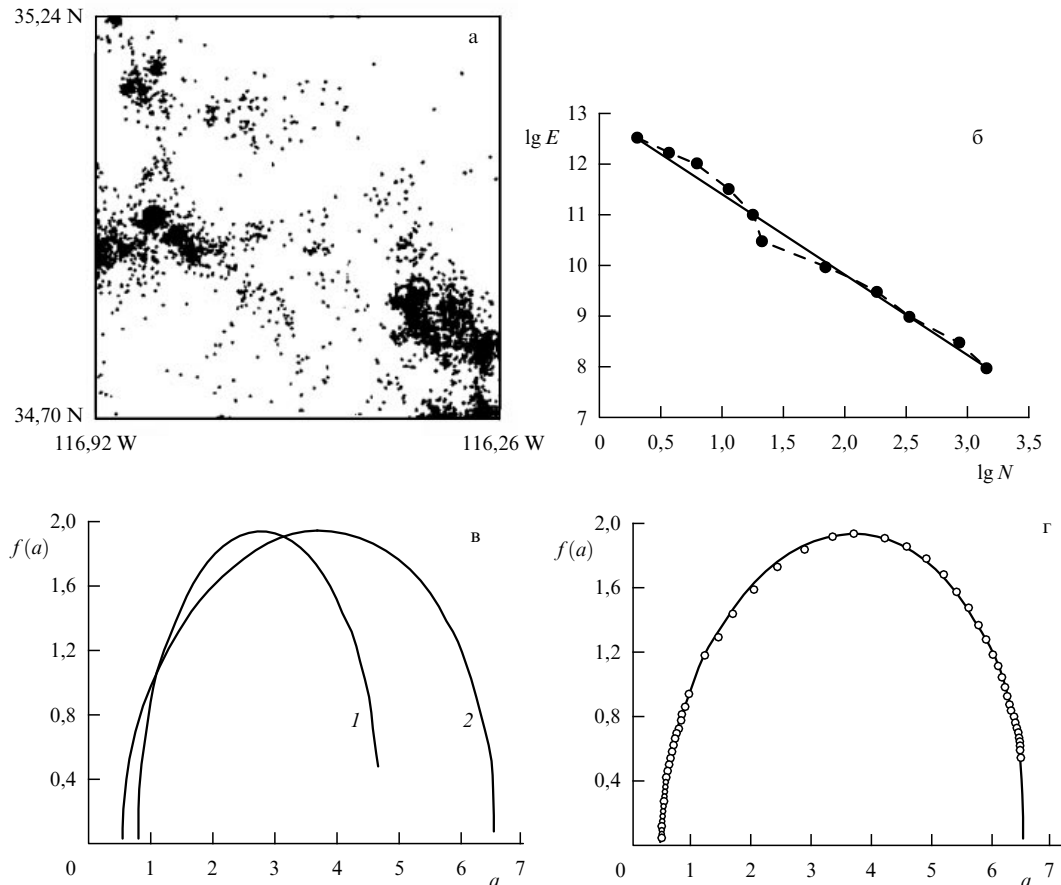


Рис. 3. (а) Пространственное распределение эпицентров землетрясений на участке площадью $60 \times 60 \text{ км}^2$ в окрестности г. Барстоу за период 01.01.1992 – 31.12.2000 в диапазоне магнитуд $M \geq 1,9$ (2946 событий). Крупными кружками отмечены эпицентры событий с $4,5 \leq M \leq 5,2$. (б) График повторяемости в энергетической форме для исследуемой выборки данных. Кружки — данные каталога, сплошная прямая — линейная регрессия, построенная по этим данным. (в) Спектры сингулярностей сейсмического (1) и сейсмоэнергетического (2) полей. (г) Результат наложения спектра сингулярностей сейсмического поля (кружки) после преобразований растяжения и сдвига на спектр сингулярностей сейсмоэнергетического поля (сплошная кривая).

коэффициентов. После преобразований растяжения и сдвига $f(a)$ -спектр сейсмического поля практически совпал с $f(a)$ -спектром сейсмоэнергетического поля. Незначительные расхождения объясняются неточностями построения самих $f(a)$ -спектров (в первую очередь — их правых ветвей) из-за элементарной нехватки данных. При этом различие независимых оценок наклона графика повторяемости (β), полученных тремя разными способами, составляет всего около 1,5 %.

Мы убедились в корректности модели, но что нового мы узнали о сейсмическом процессе? Мы увидели, что пространственный и энергетический скейлинги сейсмического процесса взаимосвязаны! Под энергетическим скейлингом здесь подразумевается наклон графика повторяемости. Сейсмологам может показаться удивительным, что наклон графика повторяемости может быть определен без построения самого графика повторяемости, тем не менее параметр β действительно может быть вычислен на основе анализа исключительно пространственных распределений эпицентров и сейсмической энергии (41). Масштабная инвариантность оказалась не внешним атрибутом сейсмичности, а структурным стержнем всего процесса.

В работе [90] идея согласования скейлингов распространена на три мультифрактальных поля: разломное, сейсмическое и сейсмоэнергетическое (модель самоподобной самоорганизующейся структуры земной коры). Отметим, что вопрос о связи сейсмической активности земной

коры с морфоструктурами в течение длительного времени обсуждается в сеймотектонической литературе [94–96]. Традиционно для поиска соотношений между дизъюнктивными и сейсмическими структурами используется евклидова геометрия: в земной коре оконтуриваются некоторые объемы, включающие в себя гипоцентры землетрясений, которые так или иначе приурочиваются к траекториям разломов. Универсального описания взаимосвязи сейсмичности и разломообразования на этом пути не найдено. Однако решение находится с помощью средств фрактальной геометрии. Подлинная связь между мультифрактальными полями обнаруживается на уровне согласования их скейлингов.

Взаимосвязь множителей мультипликативных каскадов в модели согласования скейлингов не ограничивается степенной зависимостью типа (35). Некоторые более общие случаи рассмотрены в работе [93].

4. Микроуровень разрушения

4.1. Кинетика микроразрушения

Любое разрушение поликристаллических горных пород (и землетрясения в том числе) начинается с разрыва межмолекулярных связей. Для описания этого процесса предложены две модели, исходящие из совершенно разных посылок. Кинетическая концепция прочности предпола-

гает, что разрыв происходит в результате превышения энергией термодинамических флуктуаций энергии связи (энергии активации), что приводит к кинетическому уравнению вида [4, 97]

$$\frac{dQ}{dt} \propto \exp\left(-\frac{E - \gamma\sigma}{k_B T}\right), \quad (42)$$

где Q имеет смысл числа разрушенных связей за время t , E — энергия активации, σ — механическое напряжение, T — абсолютная температура, k_B — постоянная Больцмана, γ — параметр материала.

Альтернативная по отношению к кинетической концепции квантовая модель объясняет исчезновение потенциала взаимодействия между атомами кристаллического твёрдого тела туннельным выходом валентных электронов из валентной зоны в зону проводимости или сплошной спектр [5]. Эта модель приводит к кинетическому уравнению

$$\frac{dQ}{dt} \propto \exp\left(-\frac{C}{\sigma}\right), \quad (43)$$

где C — параметр материала.

Какая же из этих моделей соответствует реальному процессу разрушения в горных породах? Однозначного ответа пока нет. Однако по своей физической сути уравнения (42) и (43) моделируют кинетику разрушения *разных* кристаллов: уравнение (42) соответствует разрушению кристаллов с ионными связями, тогда как уравнение (43) — разрушению кристаллов с ковалентными связями.

Большинство минералов, слагающих изверженные горные породы, являются диэлектриками и характеризуются, как и большинство диэлектриков, ионными межатомными связями. Ионные связи требуют для своего разрушения значительно меньших энергетических затрат, чем ковалентные. Поэтому логика подсказывает, что в условиях земных недр механизм, заложенный в выражение (42), должен реализовываться с большей вероятностью, чем механизм, заложенный в выражение (43).

Уравнение (42) — это классическое уравнение химической кинетики Аррениуса [98], адаптированное для химических реакций, зависящих от наличия механических напряжений. Иными словами, кинетическая концепция прочности определяет разрушение ионных кристаллов (а следовательно, и землетрясения) как твердотельную неравновесную химическую реакцию диссоциации. Механическим напряжениям при этом отводится роль не причины, а катализатора разрушения (согласно уравнению (42) при $\sigma = 0$, но при $T \neq 0$ скорость появления разрывов $dQ/dt > 0$). Фактически в соответствии с кинетической концепцией прочности землетрясения как мгновенное выделение энергии разрушенных межмолекулярных связей следует считать химическим ("молекулярным") взрывом. В работе [6] делается ещё более радикальный вывод и проводится сравнение землетрясений с таким критическим явлением, как "цепной химический взрыв", происходящий в "литосферном макрореакторе". Учитывая цели настоящего обзора, заметим, что в процессе слияния микротрещин в макроразрыв действительно можно обнаружить некоторые аналогии с цепными реакциями.

Однако обе модели едины в том, что причиной разрушения является неравновесное состояние кристаллической решётки. Именно флуктуации — термодинамические или квантовые — приводят к разрыву межатомных связей. Соответственно, разрушение на более крупных масштабах

наследует флуктуационный характер источника разрушения.

4.2. Масштабная инвариантность на этапе слияния микротрещин

Представление об эмпирическом критерии слияния трещин введено почти 30 лет назад [99]. Для трещин с одинаковыми длинами критерий слияния определяется следующим образом:

$$K = \frac{L}{l} = \frac{1}{l\sqrt[3]{X}} \approx e, \quad (44)$$

где L — расстояние между вершинами трещин, т.е. размер барьера, который должен быть преодолен при слиянии трещин, l — длины сливающихся трещин, X — концентрация трещин с одинаковыми длинами в материале, e — основание натурального логарифма. Согласно определению критерия слияния (названного "концентрационным"), трещины сливаются при тех же термодинамических параметрах среды, при которых образуются, если расстояния между ними становятся примерно равными e длинам трещин. На практике критерий слияния часто считают равным трём, $K \approx 3$. Как следует из самого определения (44), распределение трещин в пространстве при этом предполагается однородным. Это объясняется тем, что к моменту экспериментального обнаружения критерия слияния трещин в физике разрушения не было известно о наличии у ансамблей трещин какой-либо внутренней структуры. Поскольку позднее было показано, что реальные пространственные распределения трещин в горных породах всегда фрактальны, численное значение критерия слияния, вообще говоря, требует пересчёта с учётом этого факта. Так, в экспериментальных работах, посвящённых исследованию процесса слияния трещин, искусственно вносимых в образцы горных пород, показано, что под нагрузкой трещины сливаются, если расстояние между ними примерно равно их длине [100, 101].

Однако значительно более важно, что на чисто экспериментальном уровне было определено (ещё до рождения фрактальной геометрии!), что критерий слияния трещин имеет масштабно-инвариантную природу (44). Нетрудно увидеть, к чему приводит действие масштабно-инвариантного критерия слияния в масштабно-инвариантном ансамбле трещин. На рисунке 4 стрелка 1 показывает известную процедуру: первые пять итераций построения канторова множества (единичный отрезок делится на три



Рис. 4. Стрелка 1 показывает первые пять итераций построения однородного канторова множества. При бесконечном числе итераций эта процедура генерирует простейший фрактал — множество меры нуль по Лебегу с $d_f \approx 0,63$. Стрелка 2 показывает обратную каскадную процедуру — последовательное слияние микротрещин, если между ближайшими из них выполняется критерий слияния K (отрезки интерпретируются как микротрещины). Таким образом в результате поэтапного слияния масштабно-инвариантного множества микротрещин может возникнуть макроразрыв.

равные части, после чего средняя часть удаляется; оставшиеся части на следующей итерации также делятся на три части и их средние трети удаляются и т.д.). При бесконечном числе итераций эта процедура генерирует множество меры нуль по Лебегу, "канторову пыль" или простейший фрактал. Интерпретируем теперь отрезки на низшем масштабном уровне как микротрещины, причём будем считать, что для ближайших микротрещин выполняется масштабно-инвариантный критерий слияния (каким бы ни было его численное значение). Как только наиболее близкорасположенные микротрещины низшего масштабного уровня сольются, они превратятся в трещины более крупного масштаба, но и на этом масштабном уровне (как и на всех последующих) критерий слияния снова будет выполняться. Следовательно, слияние будет происходить лавинообразно вплоть до появления макро-разрыва.

Стрелка 2 на рис. 4 показывает этот обратный каскадный процесс слияния трещин. В рамках масштабно-инвариантного распределения трещин при действии масштабно-инвариантного критерия слияния ничто не останавливает лавину разрушения. Процесс лавинообразного слияния трещин с микроуровня до макроразрыва можно обозначить заимствованным из теории перколяции термином "геометрический фазовый переход" [102]. Использование такой терминологии вполне оправданно, так как результатом геометрического фазового перехода является объективно значимая перестройка структуры материала — первоначально мелкомасштабная структура приобретает крупномасштабный порядок. Процедура обратного каскада неоднократно использовалась при моделировании процессов подготовки землетрясений [103–105]. Каскадообразное укрупнение трещин наблюдается и в лабораторных экспериментах [106].

Возвратимся к схеме на рис. 4. Обозначим через \aleph число оставшихся частей исходного отрезка на второй итерации описанной каскадной процедуры. В общем случае \aleph может быть любым (целым) числом, оно характеризует структуру множества, которая может иметь бесконечно большое количество вариантов. Считаем, что расстояние между оставшимися частями выражается целым числом длин оставшихся частей (по-прежнему интерпретируемых как "трещины"). Тогда число элементов множества "трещин" на k -й итерации будет выражаться как

$$\aleph(k) = \aleph^{k-1}, \quad (45)$$

а длину элементов нашего множества (длину "трещин") можно определить из уравнения

$$l(k) = [\aleph + K(\aleph - 1)]^{-(k-1)}. \quad (46)$$

Будем рассматривать l как масштабную единицу: $l = 1/\lambda$. Тогда фрактальную размерность нашего множества определим из выражения

$$\aleph \propto l^{-d_f}. \quad (47)$$

Подставляя (45) и (46) в (47), получим

$$d_f = -\lim_{l \rightarrow 0} \frac{\ln \aleph^{k-1}}{\ln [\aleph + K(\aleph - 1)]^{-(k-1)}} = -\frac{\ln \aleph}{\ln [\aleph + K(\aleph - 1)]^{-1}}, \quad (48)$$

т.е. для рассматриваемых типов одномерных множеств (при целочисленных значениях K), если расстояние между оставшимися частями исходного отрезка соответствует K ,

связь критерия слияния с фрактальной размерностью получаемого множества определяется выражением

$$K = \frac{\aleph^{1/d_f} - \aleph}{\aleph - 1}. \quad (49)$$

Изменяя структурное число \aleph , мы можем получать в рассматриваемой схеме бесконечное разнообразие форм модельных "множеств трещин". Мы видим, что действие масштабно-инвариантного критерия слияния в масштабно-инвариантном множестве трещин радикально меняет саму парадигму разрушения (разрушение горных пород — это не потеря устойчивости одиночной макротрещиной, а потеря устойчивости множеством микроскопических трещин). Отсюда следует целый ряд неожиданных вопросов. Даже из рассмотренной довольно простой схемы ясно, что слияние трещин может происходить одновременно во многих точках траектории будущего макроразрыва. Тогда что называть "эпицентром" землетрясения? При фрактальном пространственном распределении микротрещин их суммарная длина Nl , как следует из (45), (46) стремится к нулю:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\aleph^{k-1}}{[\aleph + K(\aleph - 1)]^{k-1}} = 0, \quad (50)$$

т.е. теоретически является бесконечно малой величиной. Иными словами, землетрясения возникают из "ничего"? В конечном масштабном диапазоне длины трещин, разумеется, всегда конечны, но всё же выражение (50) с известной долей условности допускает такую гиперболизированную метафору.

Компьютерное моделирование показывает, что при достаточно большом значении \aleph (например, при $\aleph > 10^2$) число этапов слияния трещин, перекрывающее весь масштабный диапазон от микротрещин до сейсмических разрывов, оказывается весьма незначительным, менее десяти. Если же микротрещины, число которых достаточно для слияния в макроразрыв (опять в конечном масштабном диапазоне), перераспределят в пространстве равномерно, то между ними окажутся абсолютно непреодолимые барьеры ненарушенного материала. Микротрещины в столь малом количестве сливаются в макроразрыв именно потому, что распределены в пространстве крайне неоднородно, а именно масштабно-инвариантно. Мы снова сталкиваемся с тем, что масштабная инвариантность является индикатором критического состояния неравновесной системы. При этом экспериментальные исследования показывают, что ансамбли трещин в горных породах имеют самоподобную пространственную структуру практически всегда, т.е. накопление микротрещин в массиве горной породы — это процесс постепенного возрастания фрактальной размерности множества микротрещин вплоть до критического перехода — лавинообразного слияния.

Рассмотренная схема геометрического фазового перехода понятна даже на интуитивном уровне, однако перейти от неё к количественным оценкам параметров разрушения оказалось чрезвычайно сложно. Реальные множества микротрещин существуют в массиве горной породы и всегда являются трёхмерными. Исследовать структуру и фрактальные размерности одномерных подмножеств таких трёхмерных множеств трещин пока не удаётся. Сегодня мы не знаем критических значений фрактальных размерностей одномерных ансамблей трещин, т.е. значений фрактальных размерностей, при достижении которых в горных породах происходят лавинообразное слияние трещин в магистральный разрыв или геометрический фазовый переход. Однако рассмотренная схема не содержит

необоснованных допущений и представляет собой обобщение эмпирически полученных фактов, поэтому можно надеяться на её дальнейшее развитие по мере поступления новой информации.

5. Прогностические признаки землетрясений

5.1. Пространственные распределения эпицентров

Что же представляет собой процесс подготовки корового землетрясения? Соберём известные результаты экспериментальных, модельных и теоретических работ и сформулируем осторожную феноменологическую гипотезу. В процессе тектонического деформирования земной коры вследствие геометрической, структурной или какой-либо иной неоднородности в массиве коры может появиться концентратор напряжений. В области концентрации напряжений (имеющей макроскопические масштабы) значительно увеличивается скорость накопления отдельных микроразрывов. В процессе дальнейшего деформирования и накопления микроразрывов область концентрации напряжений постепенно переходит в сильно неравновесное состояние и приближается к моменту потери устойчивости. В области концентрации напряжений микротрещины образуют фрактальные кластеры (множества микротрещин, обладающие самоподобием общего вида, мультифрактальностью). При достижении монофрактальной размерностью кластера критического значения происходит лавинообразное слияние микротрещин в макроразрыв (геометрический фазовый переход), который и воспринимается на поверхности Земли как землетрясение.

Повторим, что это только гипотеза, сознательно сформулированная предельно схематично. Но она не противоречит никаким из известных фактов, а потому допускает некоторые общие выводы.

Во-первых, "очагом" готовящегося землетрясения оказывается фрактальный кластер микротрещин, не имеющий конкретного размера, формы, огибающей поверхности и характерного масштаба. Во-вторых, при подготовке землетрясения на мезомасштабах между микроскопическими трещинами, вызванными термодинамическими флуктуациями, и макроразрывом не требуются никакие промежуточные физические механизмы, например "триггерные" воздействия, подобные диффузии флюидов. Благодаря масштабной инвариантности кластера микротрещин лавина разрушения преодолевает любой масштабный диапазон. И в-третьих, процессы, приводящие к землетрясениям, происходят в любом фрагменте (куске) кристаллической горной породы, независимо от его размера. Причиной разрушения является само неравновесное, флуктуационное состояние кристаллической решётки. Естественное разрушение начинает восприниматься как сейсмичность, если "фрагмент породы" становится очень большим, например, размером с литосферную плиту, и разрушение вследствие своей масштабной инвариантности выходит на "сейсмические" масштабы.

Выводы можно было бы продолжить, а каждый из затронутых вопросов — обсудить, но наша задача сейчас заключается в том, чтобы определить, какие предваряющие землетрясения процессы мы можем отследить с поверхности Земли и использовать их как прогностические признаки готовящегося землетрясения. Мы не можем измерять напряжения в "очаге", не можем обнаруживать там появление микротрещин и не можем измерять фрактальную размерность кластера микротрещин. Но мы можем предполагать, что при крайне неоднородном распределении микротрещин в трёхмерном массиве горной

породы фрактальная размерность множества микротрещин будет достигать критического значения в различных точках области концентрации напряжений одновременно. Образование магистрального разрыва (глобальная потеря устойчивости) будет предваряться более мелкомасштабной сейсмичностью.

Если в терминах теории диссипативных структур рассматривать землетрясение как глобальную "бифуркацию" в процессе эволюции сейсмогенерирующей системы, то из самых общих соображений можно ожидать, что "бифуркации" в сильно неравновесном состоянии предшествуют возрастающие "флуктуации" параметров системы. В нашем случае это означает флуктуации сейсмической активности. Правда, обнаружить их и выделить на фоне крайне неоднородного характера сейсмической активности — задача нетривиальная.

Можно попробовать решить эту задачу методами теории мультифракталов. Дополнительная сложность заключается в слабой представительности существующих сейсмических данных. Порог представительности сейсмических данных на сегодняшний день довольно высок — обычно порядка двух единиц магнитуды. Данных оказывается просто недостаточно для того, чтобы строить по ним мультифрактальные меры (сейсмические поля), например, по месяцам. Если же строить их по данным за несколько лет, то результатом будут кумулятивные поля, в которых утрачена информация о времени искомым флуктуаций сейсмической активности. Однако можно попытаться обнаружить хотя бы сам факт их наличия.

Для проверки этих предположений (в ретроспективе) применим следующую расчётную процедуру. Возьмём данные сейсмического каталога по сейсмичности, предшествовавшей сильным землетрясениям в окрестностях их эпицентров за 4–5 лет, разделим эти данные на две выборки за периоды по 2–2,5 года и построим по этим выборкам два мультифрактальных поля. Одно будет характеризовать сейсмическую активность окрестностей будущего эпицентра задолго до сильного землетрясения, а другое — непосредственно перед ним. Таким образом мы будем моделировать сейсмические поля установившегося сейсмического процесса и переходного процесса перед сильным землетрясением. Если методы мультифрактального анализа чувствительны к искомым флуктуациям сейсмической активности, то параметры модельных полей должны различаться.

Результаты такого сравнения представлены на рис. 5 [107, 108]. Спектры сингулярностей сейсмических полей, построенные по данным сейсмичности на полигоне площадью 80×80 км² перед землетрясением Джошуа Три в Южной Калифорнии (23.04.1992, магнитуда $M = 6,1$, глубина гипоцентра 12 км), показаны на рис. 5а. Эпицентр этого землетрясения находился в центре полигона. Первый спектр (сплошная кривая) построен по данным за период 01.04.1988–01.04.1990 (1713 событий), а второй (штриховая кривая) — по данным за период 01.04.1990–23.04.1992 (1713 событий).

На рисунке 5б показаны спектры сингулярностей сейсмических полей, построенные по данным сейсмичности на полигоне размером 60×60 км² перед землетрясением в Исландии (17.06.2000, $M = 6,6$, глубина гипоцентра 6,3 км). Первый спектр (сплошная кривая) построен по данным за 28.05.1995–17.06.1998 (2230 событий), а второй (штриховая кривая) — по данным за период 17.06.1998–17.06.2000 (2230 событий).

Рисунок 5 показывает, что в обоих случаях $f(a)$ -спектры сейсмических полей, построенные по данным о сейсмичности, непосредственно предшествовавшей сильным

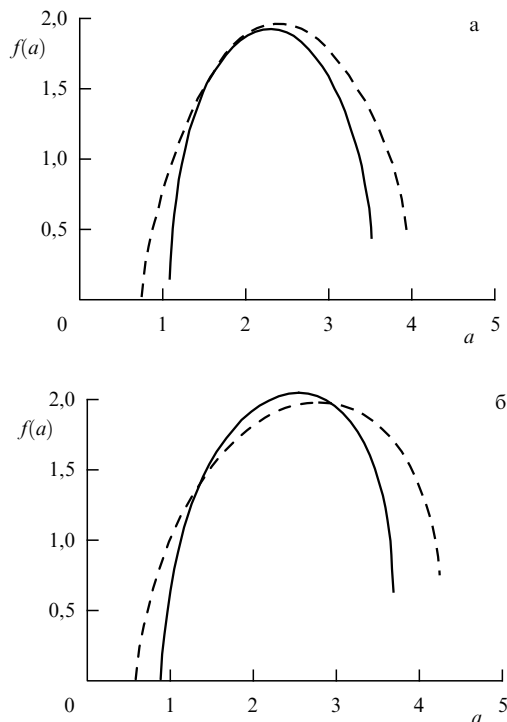


Рис. 5. Эффект расширения $f(a)$ -спектров сейсмических полей перед (а) землетрясением Джошуа Три (1992 г., $M = 6,1$) в Южной Калифорнии, (б) землетрясением в Исландии (2000 г., $M = 6,6$). Более широкие спектры (штриховые кривые) построены по данным за последние два года перед этими землетрясениями, а более узкие спектры (сплошные кривые) — по более ранним данным.

землетрясениям, оказываются существенно шире спектров, характеризующих более раннюю сейсмическую активность. Сейсмические поля, непосредственно предшествовавшие сильным землетрясениям, содержат более широкие диапазоны индексов сингулярности, что количественно (статистически) отражает факт флуктуаций сейсмической активности перед сильными землетрясениями (кратковременные, но существенные всплески активности в одних точках поля и понижение активности в других). Можно полагать, что эффект уширения $f(a)$ -спектров сейсмических полей вызван переходом сейсмогенерирующих систем в сильно неравновесное состояние перед потерей этими системами устойчивости (главными толчками землетрясений, разрушением систем).

Отметим, что процесс подготовки сильных землетрясений выявляется посредством анализа высших моментов мультифрактальных мер, построенных по сейсмическим данным, в то время как монофрактальные размерности этих мер (значения экстремумов спектров) слабо чувствительны к перестройке структуры поля. Это связано с тем, что значительное количество землетрясений происходит в одних и тех же точках поля (в фокальных центрах), которые индуцируют землетрясения многократно. Распределения фокальных центров и определяют монофрактальные размерности полей, а эти распределения стационарны (поскольку тесно связаны с разломными полями). Переменной величиной является сейсмическая активность фокальных центров, что и отражено в поведении высших моментов мер. Учитывая уже упоминавшиеся термодинамические аналогии в теории мультифрактальных мер, сейсмический скейлинг можно назвать макропараметром сейсмогенерирующей среды, который, подобно температуре в термодинамической системе, позволяет отслежи-

вать состояние сейсмогенерирующей среды, степень близости к моменту потери ею глобальной устойчивости.

5.2. Временной ход сейсмичности

Эффект расширения $f(a)$ -спектров сейсмических полей перед сильными землетрясениями явно указывает на различия сейсмического процесса в зависимости от времени, на наличие в сейсмическом процессе установившегося режима и переходного процесса, заканчивающегося сильным землетрясением (мы говорим о "сильном" землетрясении только потому, что чувствительность современных сейсмических сетей не позволяет обнаруживать этот эффект перед "слабыми" событиями). Мы уже упоминали, что временной ход сейсмичности может быть самоподобен, и теперь познакомимся с этим вопросом ближе.

Поведение любой динамической системы, эволюционирующей в установившемся режиме, может быть изучено посредством построения её аттрактора (фазового портрета), т.е. предельного подмножества фазового пространства, определяющего последовательность состояний системы (фазовую траекторию). Построение аттрактора не вызывает проблем, если уравнения эволюции системы известны. Однако для сейсмичности нам неизвестны не только сами уравнения эволюции, но и даже их количество. В таких случаях топологические инварианты аттрактора динамической системы могут быть вычислены с помощью процедуры реконструкции аттрактора по временному ряду экспериментально наблюдаемого параметра системы. Процедура основана на доказательстве теоремы Ф. Такенса [109].

Процедура реконструкции аттрактора по временному сейсмическому ряду проведена в работе [110]. Под временным рядом здесь подразумевается ряд, элементами которого являются числа событий в единицу астрономического времени. Использовались сейсмические данные Южно-Калифорнийского каталога для ограниченной окружностью радиусом 25 км области, расположенной южнее озера Солтон-Си в Южной Калифорнии. Сильные землетрясения ни за инструментальный, ни за исторический периоды для этого региона неизвестны, что позволяет определить исследовавшийся сейсмический режим как установившийся. Выборка содержала данные о 3398 событиях в магнитудном диапазоне $1,7 \leq M \leq 5,1$ за период от 01.01.2000 г. до 01.11.2014 г.

Реконструкция показала, что сейсмический аттрактор представлял собой странный хаотический аттрактор в трёхмерном фазовом пространстве. Оценка старшего ляпуновского показателя этого аттрактора оказалась положительной, что является критерием хаоса. Таким образом было показано, что временной ход сейсмической кинетики в установившемся сейсмическом режиме оказывается хаотическим и непредсказуемым. Временной ряд в этом случае не содержит информации о конкретных состояниях системы в будущем, а содержит только статистическую информацию о топологической структуре аттрактора. Временной сейсмический ряд в установившемся сейсмическом режиме не обладает и масштабной инвариантностью.

Справедливости ради следует отметить, что предположения о пуассоновском характере временных сейсмических рядов выдвигались достаточно давно [111]. Но наша задача — найти во временном ходе сейсмичности прогностические признаки сильных землетрясений, и снова "сигнал" предстоит выделить из "фона", характеризующегося чрезвычайно высокой перемежаемостью.

Но прежде задумаемся: является ли временной сейсмический ряд, каждый элемент которого представляет собой

число событий в единицу астрономического времени, наилучшей характеристикой временного хода процесса сейсмической кинетики? При построении традиционных временных сейсмических рядов во избежание появления в них нулевых (т.е. бессодержательных) элементов единицу времени приходится выбирать достаточно большой (порядка месяца). При этом информация о времени каждого события утрачивается, а общее число элементов ряда во многих случаях оказывается недостаточным для статистического анализа. Тем самым возникает необходимость поиска таких методов работы с временными сейсмическими данными, которые позволяли бы сохранять в объекте исследования всю информацию о временах сейсмических событий, содержащуюся в каталогах.

В качестве такого метода можно предложить анализ ряда, элементы которого представляют собой временные интервалы между последовательно происходящими сейсмическими событиями в области подготовки сильного землетрясения (в фокальной области) [112]. Размер фокальной области принято оценивать по формуле Садовского [113], которой можно придать такой вид:

$$\mathfrak{Z} \approx \sqrt[3]{\frac{E}{10^3}}, \quad (51)$$

где E — энергия землетрясения [эрг], \mathfrak{Z} — линейный размер фокальной области [см]. В частности, для землетрясения с $M = 7$ формула (51) даёт $\mathfrak{Z} \approx 3 \times 10^6$ см = 30 км.

В оригинальной статье Садовского [113] величина \mathfrak{Z}^3 трактуется как объём "очага". Но согласно феноменологической схеме, приведённой в разделе 5.1, "очаг" — это фрактальный кластер микротрещин, к которому неприменимо понятие объёма. В рамках этой схемы \mathfrak{Z} можно интерпретировать как размер, пропорциональный радиусу гирации R_g [114, 115] фрактального кластера микротрещин:

$$\mathfrak{Z} \propto 2R_g, \quad (52)$$

где

$$R_g = \left(\frac{1}{N_*} \sum_{i=1}^{N_*} |\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_{CM}|^2 \right)^{1/2}. \quad (53)$$

Здесь \mathbf{r}_{CM} — радиус-вектор "центра масс" кластера, \mathbf{r}_i — радиусы-векторы элементов кластера, N_* — общее число элементов кластера. Радиус гирации — это "среднеквадратичный радиус" кластера и, по-видимому, вполне возможная характеристика "очага", представляющего собой фрактальное множество микротрещин. Окружность с радиусом, равным радиусу гирации, сосредоточивает в себе основное количество элементов кластера, что в сейсмологическом приложении означает основное количество афтершоков землетрясения (если они наблюдаются). Примерно в пределы этой окружности попадает и магистральный разрыв.

Воспользуемся снова Южно-Калифорнийским каталогом. Последнее из сильнейших землетрясений, которое произошло в Южной Калифорнии (точнее, уже на территории Мексики), — это землетрясение Северная Баха (Northern Baja или Sierra El Mayor Cucarahn, 04.04.2010 г., $M = 7,2$, глубина гипоцентра 10 км). Для фокальной области этого землетрясения радиусом 15 км ($\mathfrak{Z}/2$) за период 01.01.1990–04.04.2010 гг. каталог приводит данные о 2991 событии с магнитудой выше пороговой, $M \geq 1,7$ ($M = 1,7$ — порог представительности каталога). Пере-

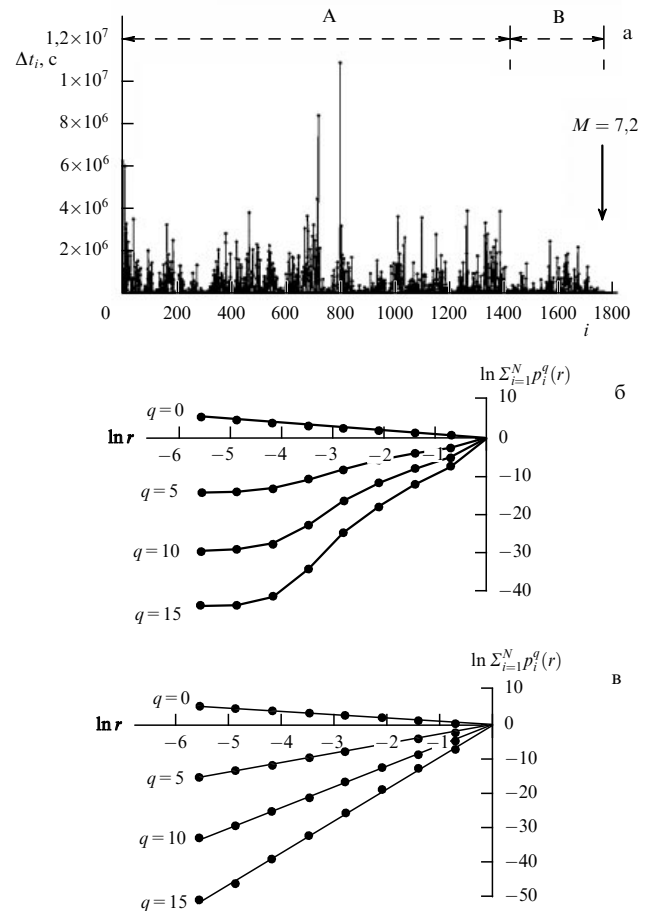


Рис. 6. Возникновение самоподобия во временном ходе микросейсмичности в фокальной области землетрясения Северная Баха (2010 г., $M = 7,2$). (а) Ряд временных интервалов между последовательно происходившими в фокальной области микроземлетрясениями. По оси абсцисс — порядковый индекс событий, по оси ординат — длительность временных интервалов в секундах. Стрелка указывает момент землетрясения Северная Баха. Значения элементов ряда показаны кружками, которые для наглядности соединены прямыми отрезками. (б) Зависимость сумм моментов меры от масштаба для основной части ряда (А). (в) Зависимость сумм моментов меры от масштаба для финальной части ряда (В).

нумеруем события в исследуемой выборке индексом i в направлении хода времени. Тогда временным интервалом между событиями с индексами i и $i + 1$ будем называть величину

$$\Delta t_i = t_{i+1} - t_i, \quad (54)$$

где t_i — время i -го события.

Рисунок 6а представляет ряд временных интервалов Δt_i , построенный по исследуемой выборке после очистки данных от афтершоков. Рисунок показывает, что ряд Δt_i является числовым рядом, который формально может быть рассмотрен как чисто геометрический объект, т.е. как распределение величин временных интервалов по равномерной шкале их порядковых индексов или как распределение измеряемого физического параметра по равномерной масштабной сетке. Подобное представление данных каталога имеет характерные особенности, отличающие его от традиционных временных сейсмических рядов (элементами которых являются количества событий в единицу астрономического времени). Как упо-

миналось выше, в традиционных временных сейсмических рядах информация о времени каждого события утрачивается, тогда как в ряде временных интервалов Δt_i она сохраняется и может быть непосредственно использована в расчётных процедурах. Число элементов ряда временных интервалов оказывается достаточно большим для применения методов статистического анализа. При этом значения Δt_i могут быть определены с высокой точностью, так как сами астрономические времена сейсмических событий устанавливаются с точностью до секунд. Как видим, ряд интервалов Δt_i сохраняет практически всю временную информацию о процессе сейсмической кинетики, которая присутствует в каталоге.

Анализ ряда временных интервалов представлял собой цифровую фильтрацию данных в скользящем окне с использованием методов скейлингового анализа. Скользящее окно (размером в n элементов ряда) перемещалось вдоль шкалы порядковых индексов элементов исследуемого ряда Δt_i . Элементы ряда, попадающие в скользящее окно, преобразовывались в меру P , доли которой p_j , соответствующие одному элементу ряда, аппроксимировались с помощью нормировки. Тем самым мера P распределялась по одномерной сетке в n боксов. Далее определялась выполняемость степенного соотношения между функцией разбиения и масштабом (или, что то же самое, линейного соотношения между их логарифмами) (6). Значения q и r задавались дискретно. Изменения масштаба r ($r = r_1, r_2, \dots, r_{\min}$) определялись ренормированием сетки, значения q перебирались с шагом $\Delta q = 0,1$ в конечном диапазоне значений. При фиксированном значении q строились матрицы

$$Y_q = (\mathbf{X}_{r_1} \ \mathbf{X}_{r_2} \ \dots \ \mathbf{X}_{r_{\min}})^T, \quad (55)$$

строками которых являлись векторы

$$\mathbf{X}_r = \left[\ln \left(\sum_{j=1}^N p_j^q(r) \right), \ln r \right]. \quad (56)$$

По компонентам матриц (55) строились зависимости $\ln \left(\sum_{j=1}^N p_j^q(r) \right)$ от $\ln r$, которые могли оказаться линейными (соотношение (6) выполнялось) или нелинейными (соотношение (6) не выполнялось). Затем расчёты повторялись со следующим значением q .

Для удобства скейлингового анализа размер скользящего окна был выбран равным $n = 2^8 = 256$ элементам ряда, т.е. ренормирование меры P осуществлялось с использованием биномиальной каскадной схемы. После выполнения очередного отсчёта окно сдвигалось вдоль ряда на один элемент и полный цикл расчётов повторялся. Таким образом отслеживалось изменение свойств ряда вдоль всей его длины.

На рисунке ба показано, что ряд временных интервалов может быть разделён на две части: основную (А) и финальную (В). На всём протяжении основной части ряда зависимости сумм моментов мер от масштаба имели вид, подобный приведённому на рис. 6б. Как видим, зависимости $\ln \left(\sum_{j=1}^N p_j^q(r) \right)$ от $\ln r$ для части А ряда характеризуются нелинейностью — соотношение (6) для них не выполняется. Тем самым в части А ряда не обнаруживается никакой структуры. Характерно, что нелинейность зависимостей $\ln \left(\sum_{j=1}^N p_j^q(r) \right)$ от $\ln r$ повышается с увеличением порядка момента q — именно анализ поведения высших моментов позволяет идентифицировать основную часть ряда как хаотическую (чувствительность к хаосу низших моментов значительно ниже). Мы повторили результат, полученный при реконструкции сейсмического аттрактора, — в установившемся режиме временной ход сейсмической кинетики оказывается хаотическим.

Однако в финальной (В) части ряда зависимости $\ln \left(\sum_{j=1}^N p_j^q(r) \right)$ от $\ln r$ становятся линейными, т.е. ряд приобретает статистически самоподобную структуру (рис. 6в). Как видим, перед землетрясением Северная Баха в структуре исследуемого ряда появляется масштабная инвариантность.

Таким образом, процесс сейсмической кинетики в фокальной области землетрясения Северная Баха в течение длительного времени характеризовался хаотичностью, но примерно за 21 месяц до главного толчка во временном ходе микросейсмичности начала формироваться глобальная масштабна-инвариантная структура (в масштабах фокальной области). Естественно предположить, что причиной этого является глобальный (в масштабах фокальной области) переход материала земной коры в сильно-неравновесное состояние, которое и закончилось главным толчком землетрясения Северная Баха. Переход сопровождался появлением во временном ходе микросейсмичности статистического самоподобия, которое могло быть замечено и выявлено методами мультифрактального анализа, когда масштабна-инвариантная структура ряда оказалась сформированной в достаточно широком для численного анализа масштабном диапазоне. Тем самым появление самоподобия в ряде временных интервалов между последовательно происходившими событиями можно рассматривать как физически обоснованный прогностический признак сильного землетрясения.

В качестве дополнительного результата отметим, что в основной части ряда (А) выборочное среднее значение длительностей временных интервалов составило 406529,01... с, тогда как в финальной части ряда (В) выборочное среднее значение длительностей временных интервалов оказалось равным 181308,29... с, т.е. более чем в два раза меньшим. Часть ряда (В), непосредственно предшествовавшая главному толчку землетрясения Северная Баха, — это часть ряда с пониженными ("в среднем") относительно основной части ряда значениями временных интервалов Δt_i (при сохранении высокой перемежаемости, характерной для ряда в целом).

Временная масштабная инвариантность процесса сейсмической кинетики в соответствии с концепцией SOC и теорией диссипативных структур выявляет сильнонеравновесное состояние среды. Поэтому можно заметить определённые аналогии между структурной организацией ряда временных интервалов Δt_i и свойствами внутреннего времени неравновесных систем, которое вводит Пригожин [12] в теории диссипативных структур. Как отмечалось, внутреннее время в среднем совпадает с астрономическим, но может отличаться от него в периоды неустойчивостей. Как показывает проведённое исследование, систематические отклонения величин временных интервалов Δt_i от выборочного среднего значения $\langle \Delta t \rangle$ основной части ряда наблюдались именно перед сильным землетрясением, когда сейсмогенерирующая система находилась в критическом состоянии. Видимо, можно говорить о том, что длительность временных интервалов Δt_i чувствительна к тем же физическим факторам, что и внутреннее время неравновесной системы по Пригожину. Основными из этих факторов являются изменения термодинамической энтропии системы и степень близости системы к моменту потери устойчивости. В результате действия этих факторов микросейсмическое землетрясение начинают происходить "чаще" и при этом формируют временную масштабна-инвариантную структуру.

5. Заключение

Сейсмичность — один из наиболее наглядных примеров самоорганизации сложных неравновесных систем через последовательность бифуркаций, приводящей к масштабно-инвариантной организации диссипативных структур. Многочисленные механические проявления сейсмичности: движение берегов сейсмического разрыва, генерация сейсмических волн и т.д. — являются макроscopicкими следствиями термодинамических процессов, происходящих на уровне кристаллической решётки: изменения энтропии системы, термодинамических флуктуаций, разрушения молекулярных связей, накопления микротрещин, пространственной организации микротрещин в виде самоподобных множеств, критических переходов в их структуре и т.д. При таком предельно жёстком сочетании масштабов наблюдаемых процессов и масштабов их первопричин природа всё же оставила сейсмологам путь получения прямой информации о процессах подготовки землетрясений в текущем времени, и этот путь — масштабная инвариантность сейсмического процесса. Благодаря масштабной инвариантности мы понимаем (хотя бы качественно), что происходит в земных недрах на макро- и микроуровнях, и можем обнаружить период неустойчивого, сильно неравновесного состояния материала земной коры, которое и заканчивается землетрясением.

В данном обзоре приведены примеры того, как возникает масштабная инвариантность разрушения горных пород, где и как наблюдается, какие формы принимает, к каким взаимодействиям мультифрактальных полей приводит и как определяет процесс подготовки землетрясения, а также как она может быть использована в сейсмическом прогнозе. Результаты теоретических, экспериментальных и модельных работ, исследующих масштабную инвариантность сейсмичности, взаимно дополняют друг друга и создают необычную для классической физики, но внутренне непротиворечивую картину процесса подготовки землетрясения. Масштабную инвариантность можно назвать структурным каркасом сейсмичности, тесно связанным с её физической основой. Сейсмический скейлинг — это и форма нетривиального описания сейсмического процесса, и макропараметр среды, и индикатор её критического состояния.

Сам факт масштабной инвариантности сейсмических структур, по-видимому, означает, что сейсмогенерирующую систему следует воспринимать как принципиально неинтегрируемую систему. Основным физико-химическим феноменом, присущим процессу подготовки любого корового землетрясения, является самоорганизация системы, вызванная её неравновесным состоянием. Самоорганизация определяет свойства системы по мере её приближения к моменту потери устойчивости. В рамках этих представлений очаг землетрясения оказывается фрактальным кластером микротрещин, вызванных термодинамическими флуктуациями, т.е. объектом, который не может быть исследован методами евклидовой геометрии. Однако подобная модель очага (пока ещё гипотетическая) позволяет объяснить целый ряд особенностей сейсмического процесса, таких как известные погрешности в определении координат эпицентров землетрясений, невозможность обнаружения очага методом сейсмического зондирования и т.д. Представление о критическом переходе (геометрическом фазовом переходе) во фрактальном кластере микротрещин снимает вопрос о "триггерном воздействии" на очаг, в качестве которого часто предлагается диффузия воды, поэтому модель очага в виде фрактального кластера микротрещин применима для

исследования не только земной, но и, например, лунной сейсмичности.

Пространственное самоподобие сейсмических структур тесно связано с пространственным самоподобием разломных систем земной коры, эволюционирующих в геологических, а не в сейсмических масштабах времени. Это приводит к тому, что монофрактальные размерности сейсмических полей слабочувствительны к процессам подготовки отдельных землетрясений. Однако предсказываемое теорией диссипативных структур возрастание флуктуаций сейсмической активности перед "глобальной бифуркацией" может быть обнаружено по поведению высших моментов мультифрактальных мер, индуцированных множествами эпицентров.

Масштабная инвариантность обнаруживается и во временном ходе процесса сейсмической кинетики в фокальных областях готовящихся землетрясений. Возникновение масштабной инвариантности во временном ходе сейсмичности можно определить как результат переходного процесса от установившегося сейсмического режима (хаотического, характеризуемого странным хаотическим аттрактором) к собственно землетрясению (потере системой глобальной устойчивости). Тем самым обнаружение масштабной инвариантности во временных диссипативных структурах сейсмичности позволяет локализовать во времени период сильно неравновесного состояния сейсмогенерирующей системы.

Современный уровень структурных исследований сейсмичности всё ещё лимитируется сильной, а часто и катастрофической нехваткой данных. С повышением качества сейсмических данных можно надеяться и на возможность изучения тонкой структуры сейсмических объектов, что в перспективе позволит получить и новые прогностические признаки землетрясений. Исследования фрактальной структуры сейсмичности по сути дела начались сравнительно недавно, но их результаты позволяют с оптимизмом ждать новых открытий в ближайшем будущем.

Список литературы

1. Соболев Г А *Основы прогноза землетрясений* (М.: Наука, 1993)
2. Соболев Г А *Концепция предсказуемости землетрясений на основе динамики сейсмичности при триггерном воздействии* (М.: ИФЗ РАН, 2011)
3. Костров Б В *Механика очага тектонического землетрясения* (М.: Наука, 1975); Пер. на англ. яз.: Kostrov B V *Principles of Earthquake Source Mechanics* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1988)
4. Журков С Н *Вестник АН СССР* (3) 46 (1968)
5. Gilman J J, Tong H C *J. Appl. Phys.* **42** 3479 (1971)
6. Бучаченко А Л *УФН* **184** 101 (2014); Buchachenko A L *Phys. Usp.* **57** 92 (2014)
7. Арнольд В И *Теория катастроф* (М.: Наука, 1990); Пер. на англ. яз.: Arnold V I *Catastrophe Theory* (Berlin: Springer-Verlag, 1992)
8. Thompson J M T *Instabilities and Catastrophes in Science and Engineering* (Chichester: Wiley, 1982); Пер. на русск. яз.: Томпсон Дж М Т *Неустойчивости и катастрофы в науке и технике* (М.: Мир, 1985)
9. Mandelbrot B *PAGEOPH* **131** 5 (1989)
10. Schertzer D, Lovejoy S *Physica A* **185** 187 (1992)
11. Prigogine I *The End of Certainty. Time, Chaos, and the New Laws of Nature* (New York: The Free Press, 1997); Пер. на русск. яз.: Пригожин И *Конец определенности. Время, хаос и новые законы природы* (М.-Ижевск: РХД, 1999)
12. Prigogine I *From Being To Becoming. Time and Complexity in The Physical Sciences* (San Francisco: W.H. Freeman and Co., 1980); Пер. на русск. яз.: Пригожин И *От существующего к возникаю-*

- целму. *Время и сложность в физических науках* (М.: Едиториал УРСС, 2002)
13. Гульельми А В *УФН* **185** 415 (2015); Guglielmi A V *Phys. Usp.* **58** 384 (2015)
 14. Bak P, Tang C J *Geophys. Res.* **94** 635 (1989)
 15. Grassberger P *Phys. Lett. A* **97** 227 (1983)
 16. Meneveau C, Sreenivasan K R *Phys. Rev. Lett.* **59** 1424 (1987)
 17. Vicsek T, Family F *Phys. Rev. Lett.* **52** 1669 (1984)
 18. Kohomoto M, Technical Report of ISSP. Ser. A No. 2014 (Tokyo: Univ. of Tokyo, 1988)
 19. Kagan Y Y *Nonlin. Sci. Today* **2** 8 (1992)
 20. Prigogine I *Acad. R. Belg. Bull. Cl. Sci.* **31** 600 (1945)
 21. Климонтович Ю Л *Письма в ЖТФ* **9** 1412 (1983); Klimontovich Yu L *Sov. Tech. Phys. Lett.* **9** 606 (1983)
 22. Bak P, Tang C, Wiesenfeld K *Phys. Rev. A* **38** 364 (1988)
 23. Grinstein G, in *Scale Invariance, Interfaces, and Non-Equilibrium Dynamics* (NATO ASI Series, Ser. B, Vol. 344, Eds A McKane et al.) (New York: Plenum Press, 1995) p. 261
 24. Caruso F et al. *Phys. Rev. E* **75** 055101(R) (2007)
 25. Zhang Y-C *Phys. Rev. Lett.* **63** 470 (1989)
 26. Sornette A, Sornette D *Europhys. Lett.* **9** 197 (1989)
 27. Yang X, Du S, Ma J *Phys. Rev. Lett.* **92** 228501 (2004)
 28. Steacy S J et al. *Geophys. Res. Lett.* **23** 383 (1996)
 29. Pruessner G *Self-Organised Criticality: Theory, Models, and Characterisation* (Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2012)
 30. Dhar D *Physica A* **369** 29 (2006)
 31. Mandelbrot B B *The Fractal Geometry of Nature* (San Francisco, Calif.: W.H. Freeman, 1982)
 32. Frisch U, Parisi G, in *Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics and Climate Dynamics* (Proc. of the Intern. School of Physics "Enrico Fermi", Course 88, Eds M Ghil, R Benzi, G Parisi) (Amsterdam: North-Holland, 1985) p. 84
 33. Halsey T C et al. *Phys. Rev. A* **33** 1141 (1986)
 34. Schertzer D, Lovejoy S J *Geoph. Res. D* **92** 9693 (1987)
 35. Lovejoy S, Schertzer D *Water Resour. Res.* **21** 1233 (1985)
 36. Wilson K G *Rev. Mod. Phys.* **55** 583 (1983)
 37. Chhabra A B et al. *Phys. Rev. A* **40** 5284 (1989)
 38. Atmanspacher H, Scheingraber H, Wiedenmann G *Phys. Rev. A* **40** 3954 (1989)
 39. Gibbs J W *Trans. Connect. Acad.* (2) 382 (1873); Пер. на русск. яз.: Гиббс Дж В *Термодинамика, статистическая физика* (М.: Наука, 1982) с. 40
 40. Bale H D, Schmidt P W *Phys. Rev. Lett.* **53** 596 (1984)
 41. Jouini M S, Vega S, Mokhtar E A *Nonlin. Process. Geophys.* **18** 941 (2011)
 42. Radlinski A P et al. *J. Appl. Crystallogr.* **33** 860 (2000)
 43. Sen D, Mazumder S, Tarafdar S J. *Mater. Sci.* **37** 941 (2002)
 44. Wong P, Howard J, Lin J-S *Phys. Rev. Lett.* **57** 637 (1986)
 45. Hirata T, Satoh T, Ito K *Geophys. J. Int.* **90** 369 (1987)
 46. Chelidze T, Gueguen Y *Int. J. Rock Mech. Mining Sci.* **27** 223 (1990)
 47. Feng X-T, Seto M *Geophys. J. Int.* **136** 275 (1999)
 48. Johansen A, Sornette D *Eur. Phys. J. B* **18** 163 (2000)
 49. Turcotte D L, Newman W L, Shcherbakov R *Geophys. J. Int.* **152** 718 (2003)
 50. Sammis C G, Biegel R L *PAGEOPH* **131** 255 (1989)
 51. Badri A et al. *Acta Stereol.* **13** 183 (1994)
 52. Shao S-M, Zou J Ch *Acta Seismol. Sin.* **9** 485 (1996)
 53. Крылов С С, Бобров Н Ю *Фракталы в геофизике* (СПб.: Изд-во Санкт-Петербургского ун-та, 2004)
 54. Hirata T *PAGEOPH* **131** 157 (1989)
 55. Vignes-Adler M, Le Page A, Adler P M *Tectonophysics* **196** 69 (1991)
 56. Stakhovsky I R, Belousov T P *J. Earthquake Prediction Res.* **5** 505 (1996)
 57. Stakhovsky I R, in *Basement Tectonics 11. Europe and Other Regions* (Proc. of the Intern. Conf. on Basement Tectonics, Vol. 5, Eds O Oncken, C Janssen) (Dordrecht: Kluwer Acad., 1996) p. 101
 58. Ouillon G, Castaing C, Sornette D J. *Geophys. Res.* **101** 5477 (1996)
 59. Tessier Y, Lovejoy S, Schertzer D J. *Appl. Meteorol.* **32** 223 (1993)
 60. Boufadel M C et al. *Water Resour. Res.* **36** 3211 (2000)
 61. Kagan Y Y, Knopoff L *Geophys. J. Int.* **62** 303 (1980)
 62. Гейликман М Б, Голубева Т В, Писаренко В Ф *ДАН СССР* **310** 1335 (1990)
 63. Hirabayashi T, Ito K, Yoshii T *Math. Seismology* **40** 102 (1990)
 64. Ito K, Matsuzaki M J. *Geophys. Res.* **95** 6853 (1990)
 65. Hooge C et al. *Fractals* **2** 445 (1994)
 66. Lei Xinglin, Kusunose Kinichiro *Geophys. J. Int.* **139** 3 754 (1999)
 67. Godano C et al. *Geophys. J. Int.* **136** 99 (1999)
 68. Carpinieri A, Chiaia B, Invernizzi S *Chaos Solitons Fractals* **14** 917 (2002)
 69. Zamani, Agh-Atabai M *J. Sci. Technol.* **39** 521 (2011)
 70. Pastén D et al. *Phys. Rev. E* **84** 066123 (2011)
 71. Telesca L, Lapenna V, Macchiato M *Physica A* **354** 629 (2005)
 72. Telesca L, Toth L *Physica A* **448** 21 (2016)
 73. Godano C, Caruso V *Geophys. J. Int.* **121** 385 (1995)
 74. Godano C, Alonzo M L, Vilardo G *PAGEOPH* **149** 375 (1997)
 75. Wang J-H J. *Geol. Soc. China* **39** 117 (1996)
 76. Стаховский И Р *Физика Земли* (4) 41 (2000)
 77. Telesca L, Lapenna V *Tectonophysics* **423** (1–4) 115 (2006)
 78. Wilson K G *Sci. Am.* **241** (2) 158 (1979)
 79. Louis E, Guinea F *Europhys. Lett.* **3** 871 (1987)
 80. Louis E, Guinea F *Physica D* **38** 235 (1989)
 81. Hassold G N, Srolovitz D J *Phys. Rev. B* **39** 9273 (1989)
 82. Hinrichsen E L, Hansen A, Roux S *Europhys. Lett.* **8** 1 (1989)
 83. Herrmann H J *Physica A* **163** 359 (1990)
 84. Стаховский И Р *Физика Земли* (11) 11 (1998)
 85. Scheidegger A E *Can. J. Phys.* **35** 4 (1957)
 86. Turcotte D L, in *Fractals and Dynamic Systems in Geoscience* (Ed. J H Kruhl) (Berlin: Springer-Verlag, 1994) p. 7
 87. Turcotte D L *Rep. Prog. Phys.* **62** 1377 (1999)
 88. Obukhov A J. *Geophys. Res.* **67** 3011 (1962)
 89. Kolmogorov A N J. *Fluid Mech.* **13** 82 (1962)
 90. Стаховский И Р *Физика Земли* (12) 35 (2007); Stakhovsky I R *Izv. Phys. Solid Earth* **43** 1012 (2007)
 91. Кулабухов С Ю *Дискретная математика* (Таганрог: Мин. общ. проф. обр. РФ, 2001)
 92. Стаховский И Р *Физика Земли* (11) 38 (2004); Stakhovsky I R *Izv. Phys. Solid Earth* **40** 927 (2004)
 93. Стаховский И Р *Физика Земли* (7) 21 (2001); Stakhovsky I R *Izv. Phys. Solid Earth* **37** 547 (2001)
 94. Саньков В А и др. *Разломы и сейсмичность Северо-Муйского геодинамического полигона* (Отв. ред. С И Шерман) (Новосибирск: Наука, 1991)
 95. Scholz C H, in *Spontaneous Formation of Space-Time Structures and Criticality* (NATO ASI Series C, Vol. 349, Eds T Riste, D Sherrington) (Dordrecht: Kluwer Acad., 1991) p. 41
 96. Рейснер Г И и др. "Типизация земной коры и современные геологические процессы", в сб. *Результаты комплексного изучения тектоносферы* (М.: ИФЗ РАН, 1993) с. 1
 97. Zhurkov S N *Int. J. Fracture Mech.* **1** 311 (1965)
 98. Stiller W *Arrhenius Equation and Non-Equilibrium Kinetics: 100 Years Arrhenius Equation* (Leipzig: BSB V.G. Teubner, 1989); Пер. на русск. яз.: Штиллер В *Уравнение Аррениуса и неравновесная кинетика* (М.: Мир, 2000)
 99. Журков С Н и др., в сб. *Физические процессы в очагах землетрясений* (Отв. ред. М А Садовский, В И Мячкин) (М.: Наука, 1980) с. 78
 100. Шамина О Г *Модельные исследования физики очага землетрясений* (М.: Наука, 1981)

101. Соболев Г А, Кольцов А В *Крупномасштабное моделирование подготовки и предвестников землетрясений* (М.: Наука, 1988)
102. Стаховский И Р *Физика Земли* (7) 58 (2008); Stakhovsky I R *Izv. Phys. Solid Earth* **44** 570 (2008)
103. Gabrielov A et al. *Geophys. J. Int.* **143** 427 (2000)
104. Zaliapin I, Keilis-Borok V, Ghil M *J. Stat. Phys.* **111** 815 (2003)
105. Zaliapin I, Keilis-Borok V, Ghil M *J. Stat. Phys.* **111** 839 (2003)
106. Томилин Н Г, Куксенко В С *Физика Земли* (10) 16 (2004)
107. Стаховский И Р *Физика Земли* (2) 74 (2002); Stakhovsky I R *Izv. Phys. Solid Earth* **38** 156 (2002)
108. Стаховский И Р *Физика Земли* (11–12) 47 (2012); Stakhovsky I R *Izv. Phys. Solid Earth* **48** 829 (2012)
109. Takens F *Lecture Notes Math.* **898** 366 (1981)
110. Стаховский И Р *Физика Земли* (5) 120 (2016); Stakhovsky I R *Izv. Phys. Solid Earth* **52** 740 (2016)
111. Gardner J K, Knopoff L *Bull. Seismol. Soc. Am.* **64** 1363 (1974)
112. Стаховский И Р *Путь науки* (2) 134 (2016)
113. Садовский М А *ДАН СССР* **275** 1087 (1984)
114. Колесниченко А В, Маров М Я, Препринт № 75 (М.: ИПМ им. М.В. Келдыша, 2014)
115. Михайлов Е Ф, Власенко С С *УФН* **165** 263 (1995); Mikhailov E F, Vlasenko S S *Phys. Usp.* **38** 253 (1995)

Scale invariance of shallow seismicity and the prognostic signs of earthquakes

I.R. Stakhovsky

*Schmidt Institute of Physics of the Earth, Russian Academy of Sciences,
ul. Bol'shaya Gruzinskaya 10/1, str. 1, 123242 Moscow, Russian Federation
E-mail: stakhov@ifz.ru*

The results of seismic investigations on the basis of methods of non equilibrium processes theory and self-similarity theory have showed that a shallow earthquake can be treated as a critical transition that occurs during the evolution of a nonequilibrium seismogenic system and is preceded by such phenomenon as the scale invariance of spatiotemporal seismic structures. The implication is that seismicity can be interpreted as a purely multifractal process. Modeling the focal domain as a fractal cluster of microcracks allows the prognostic signs of earthquakes actually observed in seismic data to be formulated. Seismic scaling permits the state of a seismogenic system to be monitored as the system approaches instability.

Keywords: seismicity, multifractal measure, prognostic signs of earthquakes, seismic kinetics, scaling, fault field, seismic field, scaling correspondence

PACS numbers: **91.30**, –f, 91.30.Px

Bibliography — 115 references

Received 5 July 2016, revised 8 September 2016

Uspekhi Fizicheskikh Nauk **187** (5) 505–524 (2017)

Physics – Uspekhi **60** (5) (2017)

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNr.2016.09.037970>

DOI: <https://doi.org/10.3367/UFNe.2016.09.037970>